СГБОУ ПО «СМК имени Жени Дерюгиной»

Понятие предела функции в точке. Теоремы о пределах

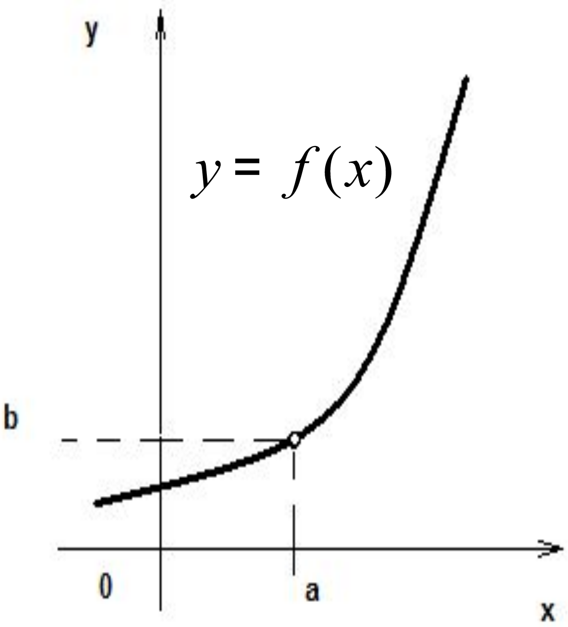
Преподаватель математики
С. А. Осетрова

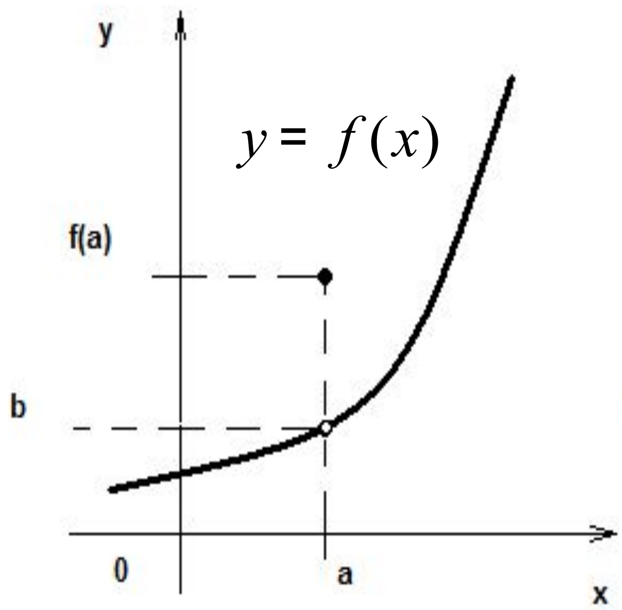
Предел функции

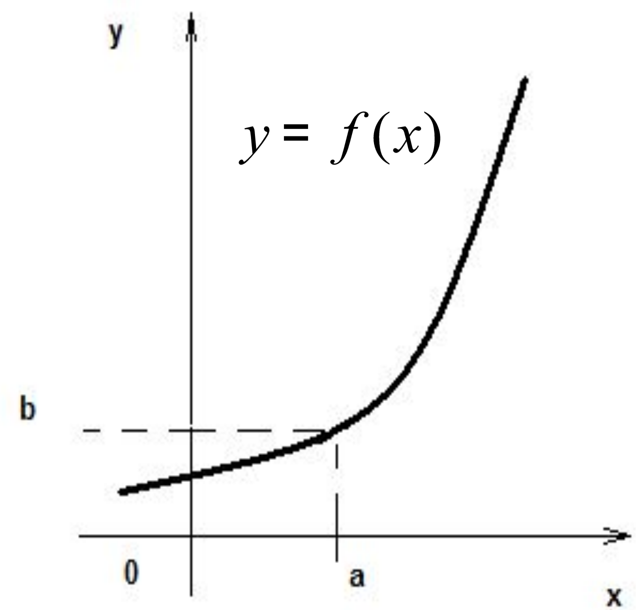
Предел ***– одно из основных понятий математического анализа.*** Понятие предела использовалось еще Ньютоном во второй половине XVII века и математиками XVIII века, такими как Эйлер и Лагранж, однако они понимали предел интуитивно. Первые строгие определения предела дали Больцано в 1816 году и Коши в 1821 году.

РАЗЛИЧАЮТ – предел функции в точке И предел функции на бесконечности.

Рассмотрим функции, графики которых изображены на следующих рисунках:

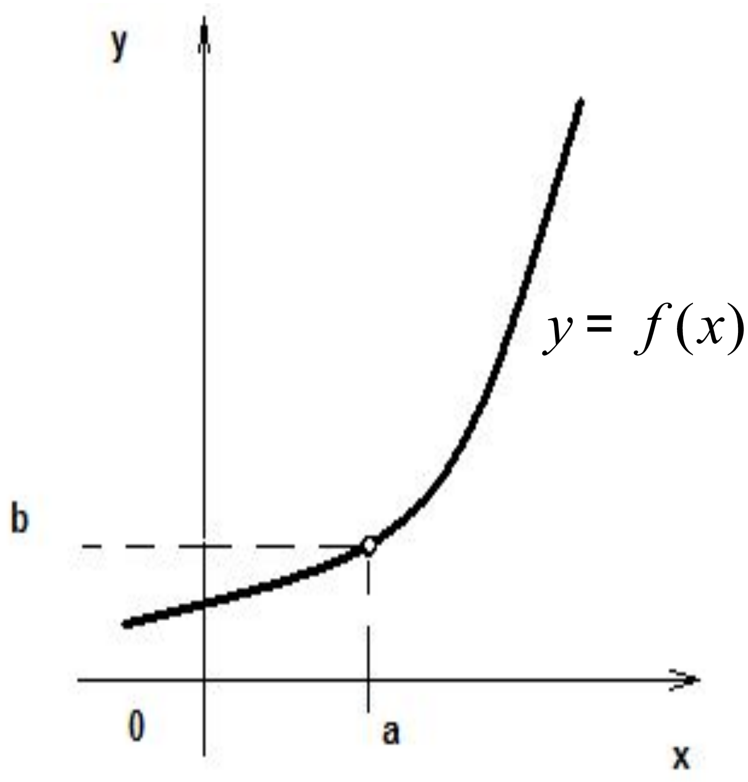




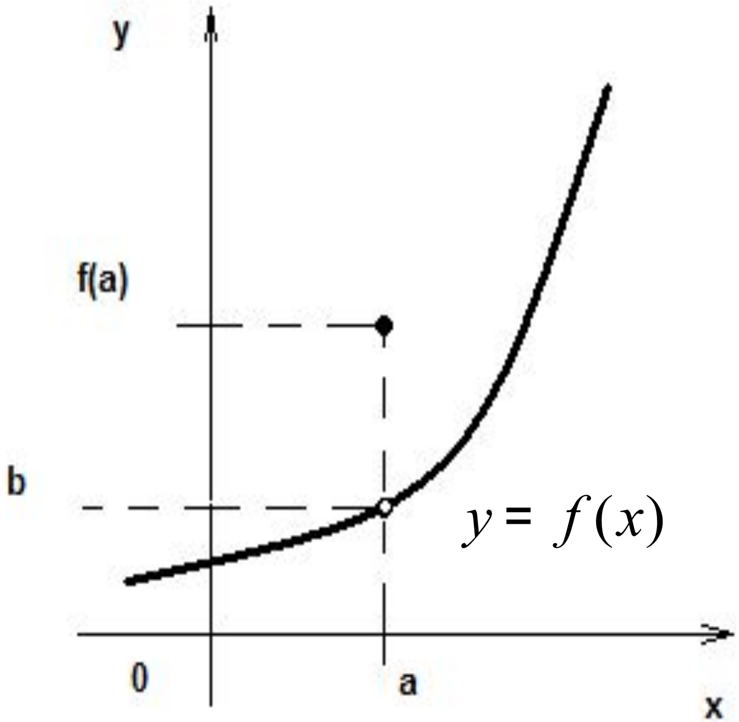


Во всех трех случаях изображена одна и та же кривая, но все же изображают они три разные функции, отличающиеся друг от друга своим поведением в точке $x = a$.

Рассмотрим каждый из этих графиков подробнее:

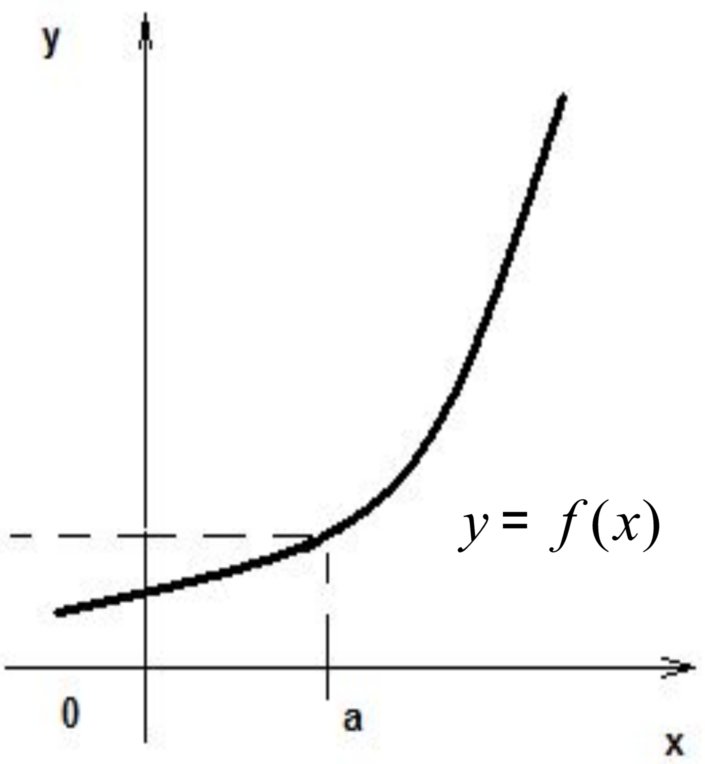


Для функции $y = f(x)$, график которой изображен на этом рисунке, значение $f(a)$ не существует, функция в указанной точке не определена.



Для функции $y = f(x)$ график которой изображен на этом рисунке, значение $f(a)$ существует, но оно отличное от, казалось бы, естественного значения b,

точка $(a,\ b)$ как бы выколота.



Для функции $y = f(x)$, график которой изображен на этом рисунке, значение $f(a)$ существует и оно вполне естественное.

Для всех трех случаев используется одна и та же запись:

$$\lim_{x \to a} f(x) = b,$$

которую читают: «предел функции $y = f(x)$ при стремлении x к a равен b ».

<u>Опр.</u> Число b называется пределом функции в точке а, если для всех значений х, достаточно близких к а и отличных от а, значение функции f (x) сколь угодно мало отличается от b .

ТЕОРЕМА 1.

Предел **СУММЫ** (разности) 2-х функций равен **СУММЕ** (разности) их пределов, если последние существуют:

$$\lim_{x \to x_0}(f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \to x_0} f(x) \pm \lim_{x \to x_0} g(x)$$

ТЕОРЕМА 2.

Предел константы равен самой этой константе.

$$\lim_{x \to x_0} C = C$$

ТЕОРЕМА 3.

Предел ПРОИЗВЕДЕНИЯ 2-х функций равен ПРОИЗВЕДЕНИЮ их пределов, если последние существуют

$$\lim_{x \to x_0}(f(x) * g(x)) = \lim_{x \to x_0} f(x) * \lim_{x \to x_0} g(x)$$

ТЕОРЕМА 4.

Предел **ОТНОШЕНИЯ** 2-х функций равен **ОТНОШЕНИЮ** их пределов, если последние существуют и **ПРЕДЕЛ ЗНАМЕНАТЕЛЯ ОТЛИЧЕН ОТ 0**:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)},\ \textit{если}\ \lim_{x\to x_0} g(x)\neq 0$$

ТЕОРЕМА 5.

Постоянный множитель можно выносить за знак предела

$$\lim_{x \to x_0}(k * f(x)) = k * \lim_{x \to x_0} f(x)$$

ТЕОРЕМА 6.

Предел **СТЕПЕНИ** переменного равен той же степени предела основания:

$$\lim_{x \to a}(z^n) = (\lim_{x \to a} z)^n$$

Вычисление пределов

Вычисление предела:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A$$

начинают с подстановки предельного значения ***x_0*** в функцию ***f(x).***

Если при этом получается конечное число, то предел равен этому числу.

$$\lim_{x \to 1} \frac{3x - 1}{x^2} = \frac{3*1-1}{1^2} = 2$$

Если при подстановки предельного значения ***x_0*** в функцию ***f(x)*** получаются выражения вида:

то предел будет равен:

$$\frac{C}{0} = \infty \qquad \frac{C}{\infty} = 0$$

Вычислите: $\lim\limits_{x \to 1} (x^3 - 2x^2 + 5x + 3).$ 7

а) $\lim\limits_{x \to 1} (x^2 - 3x + 5);$ 3

б) $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}} \dfrac{2x + 3}{4x + 2};$ 1

Домой (4 примера):

в) $\lim\limits_{x \to -1} (x^2 + 6x - 8);$ 3

г) $\lim\limits_{x \to -\frac{1}{3}} \dfrac{7x - 14}{21x + 2}.$ 1,4

а) $\lim\limits_{x \to 5} \sqrt{x + 4};$

б) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{3 + 4x}{2x^2 + 6x - 3};$

в) $\lim\limits_{x \to 6} \sqrt{x + 3};$

г) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{5 - 2x}{3x^2 - 2x + 4}.$

а) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2}{x^2 - x};$

Часто при подстановке предельного значения x_0 в функцию $f(x)$ получаются выражения следующих видов:

$$\frac{0}{0};\ \frac{\infty}{\infty};$$

Эти выражения называются ***неопределенности***, а вычисление пределов в этом случае называется ***раскрытие неопределенности***.

Правило № 1

- В большинстве случаев, чтобы раскрыть неопределенность вида $\frac{0}{0}$, достаточно

  числитель и знаменатель дроби разложить на множители, и затем сократить на множитель, приводящий к неопределенности.

Пример №1:

$$\lim_{x\to 0}\frac{3x^2-2x}{2x^2-5x}=\frac{0}{0}$$

Разложим числитель и знаменатель на множители:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x(3x-2)}{x(2x-5)}=\lim_{x\to 0}\frac{3x-2}{2x-5}=\frac{2}{5}$$

Вернемся к примеру

а) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2}{x^2 - x}$;

0

б) $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x^2 - 4}{2 + x}$;

-4

$\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{x^2 - 9}{4x + 12}$.

-1,5

Домой (№5,6,7):

в) $\lim\limits_{x \to 5} \dfrac{x^2 - 25}{x - 5}$;

г) $\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{3 + x}{x^2 - 9}$.

$$\lim_{x\to 0} \frac{4x}{3x^2 + 2x}$$

Раскрытие неопределенностей

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2+14x-32}{x^2-6x+8} = \lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+16)}{(x-2)(x-4)}$$

$$= \lim_{x\to 2}\frac{x+16}{x-4} = \frac{18}{-2} = -9$$

Если f(x) – дробно – рациональная функция, необходимо разложить на множители числитель и

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{x+1}-1\right)\left(\sqrt{x+1}+1\right)}{x\left(\sqrt{x+1}+1\right)}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\cancel{x+1-1}}{\cancel{x}\left(\sqrt{x+1}+1\right)} =$$

Если f(x) – иррациональная дробь, необходимо умножить числитель и знаменатель дроби на выражение, сопряженное числителю.

Упражнения (13 примеров):

$$\lim_{x\to -1}\frac{x^3+1}{x^2+1}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^3-3x+1}{x-4}+1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{2x^3-2x^2}{5x^3-4x^2}$$

$$\lim_{x\to 5}\frac{x^2-5x+10}{x^2-25}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{4x^3-3x^2}{2x^2+5}$$

$$\lim_{x\to 3}\frac{x-3}{x^2-9}$$

$$\lim_{x\to 6}\frac{6-x}{3-\sqrt{x+3}}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-x^2}{1+2x^2}$$

$$\lim_{x\to 4}\frac{\left(\sqrt{x}+1\right)}{\sqrt{x}-1}$$

$$\lim_{x\to 5}\frac{x^2-6x+5}{x^2-25}$$

$$\lim_{x\to -3}\frac{2x^2+x-15}{3x^2+5x-12}$$

$$\lim_{x\to 2}\left(2x^2-3x+4\right)$$

$$\lim_{x\to 1}\left[(7x+2)(4x-3)(5x+1)\right]$$

Домашнее задание (№8-11):

1) $\lim\limits_{x \to 2} (2x^2 - 3x + 4);$

3) $\lim\limits_{x \to 0} (3x^3 + x^2 + 8x + 10);$

5) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{(x+3)(x-2)}{x+2};$

1) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{3}{2x-6};$

+ знать ответы на следующие вопросы:

1) С какими математиками связано понятие «Предел»?
2) Как вычислить предел?
3) Как раскрыть неопределенность вида 0/0?
4) Как раскрыть неопределенность вида 0/0, если f(x) – иррациональная дробь?
5) Уметь формулировать теоремы.

Дополнительно

2) $\lim\limits_{x \to -1} (x^3 - x^2 + 1)$;

4) $\lim\limits_{x \to 2} ((x^2 - 1)(x - 3)(x - 5))$;

6) $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 1}$.

2) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{4}{3x^2 + 2x}$;

4) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{3x^3 + x}{x}$;

6) $\lim\limits_{x \to (-3/2)} \dfrac{4x^2 - 9}{2x + 3}$;