

ЛЕКЦИЯ 1 Числовые последовательности. Бесконечно большие и бесконечно малые последовательности. Основные свойства бесконечно больших последовательностей

ПЛАН

1. Числовые последовательности

2. Арифметические действия над числовыми последовательностями

3. Бесконечно большие и бесконечно малые последовательности

4. Основные свойства бесконечно малых последовательностей

5. Сходящиеся последовательности. Свойства сходящихся последовательностей

6. Число « ϵ ». Второй замечательный предел

1. Числовые последовательности

Если каждому n из множества натурального ряда чисел $1, 2, 3, \dots, n, \dots$ поставлено в соответствие по определённому закону некоторое вещественное число x_n , то множество чисел

$$x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots \quad (1)$$

называется *числовой последовательностью* и обозначается $\{x_n\}$, при этом x_n называется *общим членом числовой последовательности*, а число n - его номером. Числа x_n называются *элементами* или *членами* числовой последовательности.

Например, последовательность с общим членом $x_n = \frac{1}{n}$, будет последовательностью

$$\text{чисел } 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots = \left\{ \frac{1}{n} \right\}.$$

Последовательность с общим членом $x_n = 1 + (-1)^n$ будет последовательностью чисел $0, 2, 0, 2, \dots, (1 + (-1)^n), \dots = \{1 + (-1)^n\}$

Арифметическая и геометрическая прогрессия также являются числовыми последовательностями.

Арифметическая прогрессия – это числовая последовательность с общим членом $x_n = x_1 + d(n-1)$, где d – разность арифметической прогрессии. Например, $1, 5, 9, \dots, 4n-3, \dots$; $x_n = x_1 + 4(n-1) = 4n-3, d = 4$.

Геометрическая прогрессия – это числовая последовательность с общим членом $x_n = x_1 \cdot q^{n-1}$, где q – знаменатель геометрической прогрессии. Например: $3, \frac{3}{5}, \frac{3}{25}, \frac{3}{125}, \dots, \frac{3}{5^{n-1}}, \dots$; $x_n = 3\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}, q = \frac{1}{5}$.

2. Арифметические действия над числовыми последовательностями

Пусть даны последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$.

Произведением последовательности $\{x_n\}$ на число m назовем последовательность:

$$m\{x_n\} = \{mx_n\}, \text{ т.е. } mx_1, mx_2, \dots, mx_n, \dots;$$

Суммой данных последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ назовем последовательность $\{x_n\} + \{y_n\} = \{x_n + y_n\}$.

Разностью данных последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ назовем последовательность $\{x_n\} - \{y_n\} = \{x_n - y_n\}$.

Произведение последовательностей: $\{x_n\} \cdot \{y_n\} = \{x_n \cdot y_n\}$;

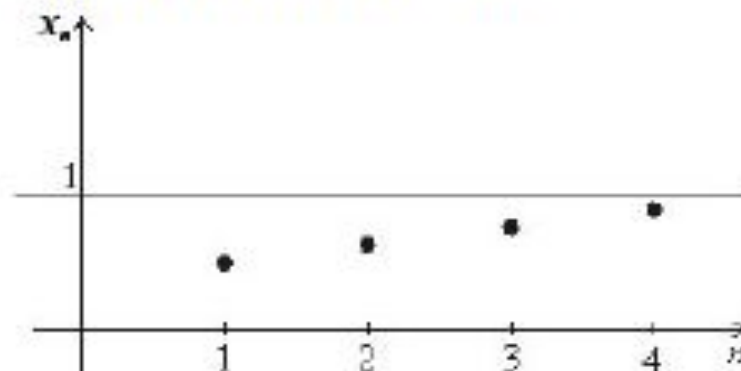
Частное последовательностей: $\frac{\{x_n\}}{\{y_n\}} = \left\{ \frac{x_n}{y_n} \right\}$ при $\{y_n\} \neq 0$.

Числовая последовательность называется *возрастающей*, если каждый ее член больше предыдущего, иными словами, если для всякого $n > 1$ верно неравенство $x_n > x_{n-1}$.

Аналогично дается определение *убывающей* числовой последовательности.

Вместе возрастающие и убывающие последовательности называются *монотонными* последовательностями.

Последовательность $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots$ можно изобразить «графиком», который будет состоять из отдельных точек координатной плоскости.



Последовательность $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots$ называется *ограниченной сверху (снизу)*, если существует такое число M (число m), что любой элемент x_n этой последовательности удовлетворяет неравенству $x_n \leq M$ ($x_n \geq m$).

Последовательность $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots$ называется *ограниченной*, если она ограничена сверху и снизу, т.е. существуют числа M и m такие, что любой элемент x_n этой последовательности удовлетворяет неравенству $m \leq x_n \leq M$ (рис.1).

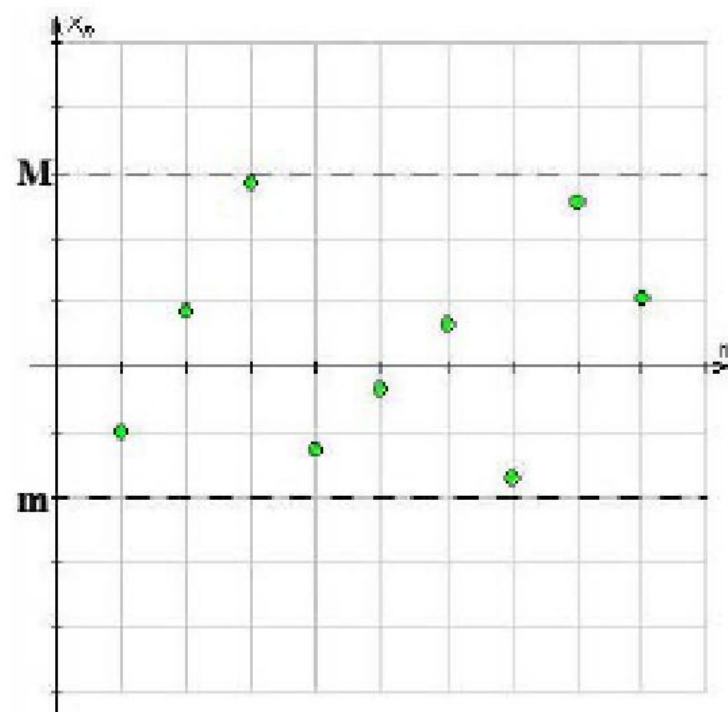


Рис. 1.

Последовательность $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots$ называется *неограниченной*, если для любого положительного числа A существует элемент x_n этой последовательности, удовлетворяющий неравенству $|x_n| \geq A$ (т.е. либо $x_n > A$, либо $x_n < -A$).

3. Бесконечно большие и бесконечно малые последовательности

Последовательность $\{x_n\}$ называется *бесконечно большой*, если для любого положительного числа A , сколь угодно большого, можно указать номер N такой, что при $n \geq N$ все элементы последовательности x_n удовлетворяют неравенству

$$|x_n| > A$$

Например, последовательность натурального ряда чисел $1, 2, \dots, n, \dots$ является бесконечно большой, т.к. какое ни возьми число N , начиная с которого, для $n \geq N$, члены последовательности будут всё-таки больше A .

Последовательность $1, 2, 1, 3, 1, 4, \dots, 1, n, \dots$ не является бесконечно большой, так как для всех нечетных членов этой последовательности неравенство $|x_n| > A$ не будет выполняться.

Последовательность $\{\alpha_n\}$ называется *бесконечно малой*, если для любого положительного числа ε , сколь угодно малого, можно указать номер N такой, что при $n \geq N$ все элементы $|\alpha_n| < \varepsilon$.

Например, геометрическая прогрессия, у которой знаменатель $|q| < 1$, является бесконечно малой числовой последовательностью.

Рассмотрим геометрическую прогрессию с общим членом

$$x_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} : 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \dots, \frac{1}{2^{n-1}}, \dots$$

Выберем сколь угодно малое число ε , например, $\varepsilon = 0,1$. Начиная с номера $N = 5$, для всех членов последовательности справедливо неравенство $x_n < 0,1$. Если выбрать $\varepsilon = 0,01$, то, начиная с номера $N = 8$, для всех членов последовательности справедливо $x_n < 0,01$.

Если в неравенстве $|\alpha_n| < \varepsilon$ раскрыть модульные скобки, то $(-\varepsilon < \alpha_n < \varepsilon)$ показывает, что начиная с номера N , зависящего от ε , все члены последовательности попадают на интервал $(-\varepsilon; \varepsilon)$. Для рассмотренного примера, при $\varepsilon = 0,1$, начиная с $N = 5$ члены последовательности попадают на интервал $(-0,1; 0,1)$; при $\varepsilon = 0,01$ на интервал $(-0,01; 0,01)$. Чем меньше ε , тем больше номер N . Все члены последовательности приближаются к нулю, но ни при одном n , не обращаются в нуль.

Рассмотрим пример последовательности с общим членом $x_n = (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{n}$,

$$1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \dots$$

Изобразим точками на числовой оси элементы этой последовательности (см. рис.2)

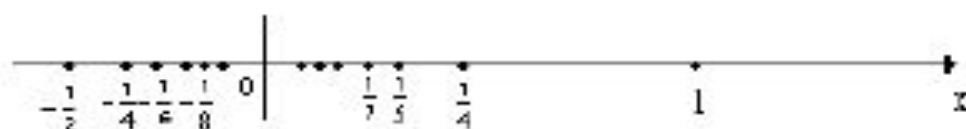


Рис. 2. Числовая последовательность с общим членом $x_n = (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{n}$

Видно, что члены последовательности приближаются к нулю, при этом ни один элемент последовательности не равен нулю. Для любого, сколь угодно малого, $\varepsilon > 0$, можно указать номер N , начиная с которого для всех $n \geq N$, справедливо неравенство $|x_n| < \varepsilon$. Так для $\varepsilon = 0,1$ номер $N = 11$, для $\varepsilon = 0,01$, номер $N = 101$ и т.д. Значит, последовательность также является бесконечно малой.

4. Основные свойства бесконечно малых последовательностей

1. Сумма бесконечно малых последовательностей есть последовательность бесконечно малая. $\{\alpha_n\} + \{\beta_n\} = \{\alpha_n + \beta_n\} = \gamma_n$.

2. Разность двух бесконечно малых последовательностей есть последовательность бесконечно малая $\{\alpha_n\} - \{\beta_n\} = \{\alpha_n - \beta_n\} = \gamma_n$.

3. Произведение любого конечного числа бесконечно малых последовательностей есть последовательность бесконечно малая $\{\alpha_n\} \cdot \{\beta_n\} = \{\alpha_n \cdot \beta_n\} = \{\gamma_n\}$.

4. Если $\{x_n\}$ – бесконечно большая последовательность, то, начиная с некоторого номера n , определена последовательность $\left\{\frac{1}{x_n}\right\}$, которая является бесконечно малой.

$$\left\{\frac{1}{x_n}\right\} = \{\alpha_n\}.$$

5. Если все члены бесконечно малой последовательности $\{\alpha_n\}$ не равны нулю, то последовательность $\left\{\frac{1}{\alpha_n}\right\}$ бесконечно большая. $\left\{\frac{1}{\alpha_n}\right\} = \{x_n\}$.

5. Сходящиеся последовательности. Свойства сходящихся последовательностей

Последовательность $\{x_n\}$ называется *сходящейся*, если существует такое число a , что последовательность $x_n - a$ является бесконечно малой. При этом число a называется *пределом последовательности* $\{x_n\}$ и обозначается

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a, \text{ или } x_n \rightarrow a \text{ при } n \rightarrow \infty \quad (2)$$

Дадим эквивалентное определение. Последовательность $\{x_n\}$ называется *сходящейся*, если существует такое число a , что для любого сколь угодно малого положительного ε , найдется номер N , такой, что при $n \geq N$ все элементы последовательности x_n удовлетворяют неравенству

$$|x_n - a| < \varepsilon \quad (3)$$

Неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$ эквивалентно неравенству $a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$. Будем говорить, что x_n попадает в ε -окрестности точки a (рис. 3).

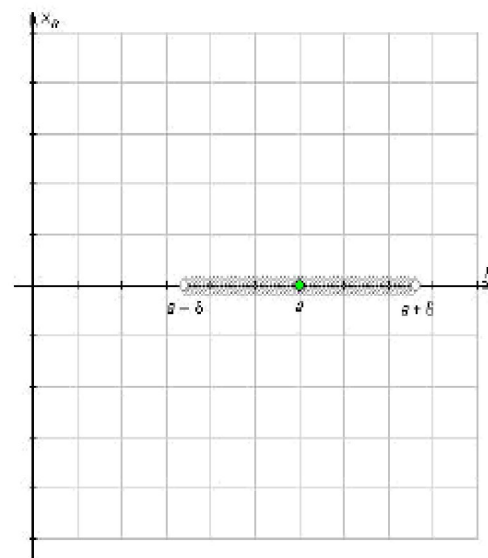


Рис. 3.

ПРИМЕРЫ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

1. Последовательность $\left\{\frac{n}{n+1}\right\}$ сходится и $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1$.

Составим последовательность $\{x_n - a\} = \left\{\frac{n}{n+1} - 1\right\} = \left\{-\frac{1}{n+1}\right\}$.

Докажем, что последовательность $\left\{-\frac{1}{n+1}\right\}$ бесконечно малая. Если $n \geq N$, то

$\left|-\frac{1}{n+1}\right| \leq \frac{1}{N+1}$, и поэтому по данному $\varepsilon > 0$ достаточно выразить номер N из условия

$$\frac{1}{N+1} < \varepsilon \text{ или } N > \frac{1}{\varepsilon} - 1.$$

2. Последовательность $3, 2\frac{1}{2}, 2\frac{1}{3}, 2\frac{1}{4}, \dots, 2 + \frac{1}{n}, \dots$ сходится к числу $a=2$.

Действительно, $x_n = 2 + \frac{1}{n}$, тогда последовательность $\{x_n - a\} = \left\{\left(2 + \frac{1}{n}\right) - 2\right\} = \left\{\frac{1}{n}\right\}$

бесконечно малая.

Свойства сходящихся последовательностей

1. Сходящаяся последовательность имеет только один предел (без доказательства).
2. Сумма сходящихся последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ есть последовательность сходящаяся, а её предел равен сумме пределов.

Доказательство. Пусть $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, тогда $x_n = a + \alpha_n$, α_n – бесконечно малая последовательность, $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$, тогда $y_n = b + \beta_n$, β_n – бесконечно малая последовательность.

Сумма $\{x_n\} + \{y_n\} = \{x_n + y_n\}$. Общий член последовательности может быть записан $x_n + y_n = a + \alpha_n + b + \beta_n = (a + b) + (\alpha_n + \beta_n)$, т.к. $\alpha_n + \beta_n$ есть сумма двух бесконечно малых последовательностей и является бесконечно малой последовательностью, то $x_n + y_n = (a + b) + \gamma_n$, где $\gamma_n = \alpha_n + \beta_n$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = a + b$.

3. Разность сходящихся последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ есть последовательность сходящаяся, а её предел равен разности пределов. Доказательство аналогично доказательству свойства 2.

4. Произведение сходящихся последовательностей есть последовательность сходящаяся, а её предел равен произведению пределов.

Доказательство. Пусть $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$, тогда $x_n = a + \alpha_n$, $y_n = b + \beta_n$, где α_n и β_n – бесконечно малые последовательности. Произведение $\{x_n\} \cdot \{y_n\} = \{x_n \cdot y_n\}$, а $x_n y_n = (a + \alpha_n)(b + \beta_n) = ab + (b\alpha_n + a\beta_n + \alpha_n\beta_n)$.

$(b\alpha_n + a\beta_n + \alpha_n\beta_n)$ является суммой бесконечно малых последовательностей и сама является бесконечно малой, например, γ_n . Тогда $x_n y_n = ab + \gamma_n$ и следовательно $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n y_n = ab$.

5. Частное двух сходящихся последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ при условии, что предел $\{y_n\}$ отличен от нуля, есть последовательность сходящаяся, а её предел равен частному пределов (без доказательства).

6. Число «е». Второй замечательный предел

Рассмотрим последовательность $\{x_n\}$ с общим членом $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. Докажем, что она сходится. Для этого достаточно доказать, что последовательность $\{x_n\}$ - возрастающая и ограничена сверху.

Применив формулу бинома Ньютона, найдем

$$x_n = 1 + n \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!} \frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} \frac{1}{n^3} + \dots + \frac{n(n-1)(n-2) \dots [n-(n-1)]}{n!} \frac{1}{n^n}$$

Представим это выражение в следующей форме:

$$x_n = 2 + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) + \dots + \frac{1}{n!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{n-1}{n}\right) \quad (4)$$

Аналогичным образом представим x_{n+1} :

$$x_{n+1} = 2 + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) + \frac{1}{3!} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \left(1 - \frac{2}{n+1}\right) + \dots + \frac{1}{(n+1)!} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \left(1 - \frac{2}{n+1}\right) \dots \left(1 - \frac{n}{n+1}\right)$$

Заметим теперь, что $1 - \frac{k}{n} < 1 - \frac{k}{n+1}$ при $0 < k < n$. Поэтому каждое слагаемое в выражении для x_{n+1} больше соответствующего слагаемого в выражении для x_n и, кроме того, у x_{n+1} по сравнению с x_n добавляется еще одно положительное слагаемое, следовательно, $x_n < x_{n+1}$, т.е. последовательность $\{x_n\}$ возрастающая.

Для доказательства ограниченности сверху данной последовательности заметим, что каждое выражение в круглых скобках в соотношении (4) меньше единицы. Учитывая также, что $\frac{1}{n!} < \frac{1}{2^{n-1}}$, для любого $n \geq 2$, получим

$$x_n < 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} < 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}},$$

где $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}}\right)$ – сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии S_{n-1} , $S_{n-1} = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = 1$. Получили, что $2 < x_n < 3$, т.е. последовательность $\{x_n\}$ –

возрастающая и ограничена сверху, следовательно, имеет предел. Этот предел обозначается буквой «e».



Leonhard Euler
швейцарский, немецкий и
русский математик и механик
(1707 – 1783)

Итак по определению:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \quad (5)$$

Число «e» определил Леонард Эйлер (1707 – 1783) – великий математик, член Петербургской Академии наук, большую часть жизни проведший в России, по происхождению швейцарец.

Выпишем несколько первых членов этой последовательности:

$$x_1 = 2, \quad x_2 = \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 = 2,25, \quad x_3 = \left(1 + \frac{1}{2}\right)^3 \approx 2,37,$$

$$x_4 = \left(1 + \frac{1}{2}\right)^4 \approx 2,44, \quad x_5 = \left(1 + \frac{1}{2}\right)^5 \approx 2,488 \text{ и т.д.}$$

При помощи современных ЭВМ, это число вычислено с точностью до 590 знаков после запятой. Отдавая дань Эйлеру, это число называют числом «e»: $e = 2,718281...$