ПРИЛОЖЕНИЯ ПРОИЗВОДНОЙ

ПРАВИЛО ЛОПИТАЛЯ

Теорема

Предел отношения двух бесконечно малых или бесконечно больших функций равен пределу отношения их производных (конечному или бесконечному).

То есть если существует неопределенность вида

$$\frac{0}{0} \quad или \quad \frac{\infty}{\infty}$$

то

$$\boxed{\lim_{\substack{x\to x_0 \\ x\to\infty}} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{\substack{x\to x_0 \\ x\to\infty}} \frac{f'(x)}{g'(x)}}$$

ПРИМЕРЫ

Вычислить пределы, используя правило Лопиталя:

1

$$\boxed{\lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^x}}$$

Решение:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{x'}{(e^x)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{e^x}=0$$

2

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}}$$

Решение:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{(\sin x)'}{(x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{1}=1$$

ВОЗРАСТАНИЕ И УБЫВАНИЕ ФУНКЦИЙ

ТЕОРЕМА 1 (достаточное условие возрастания функции)

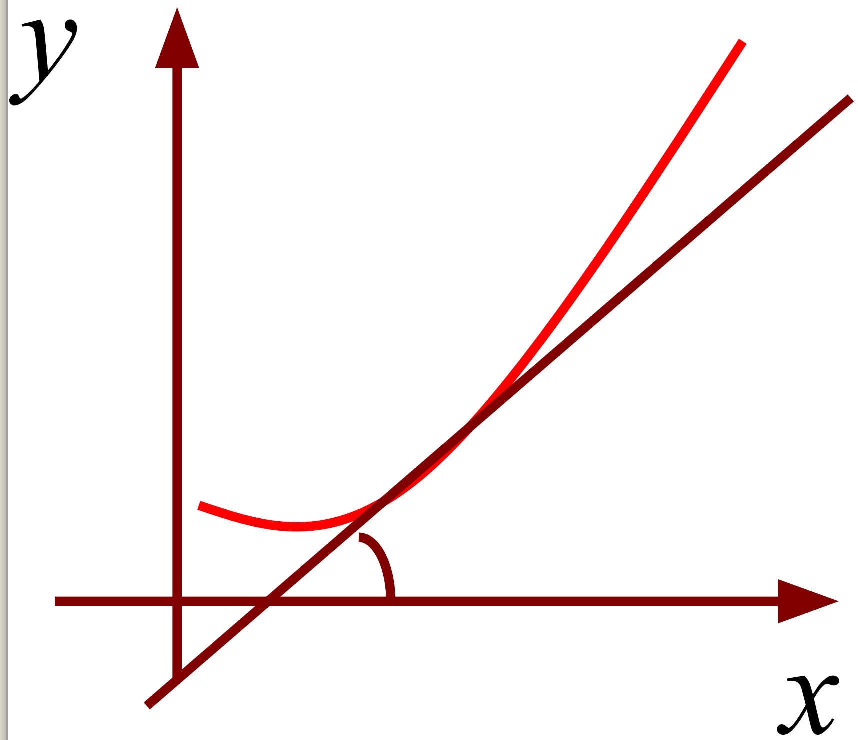
Если производная дифференцируемой функции положительна внутри некоторого промежутка Х, то она возрастает на этом промежутке.

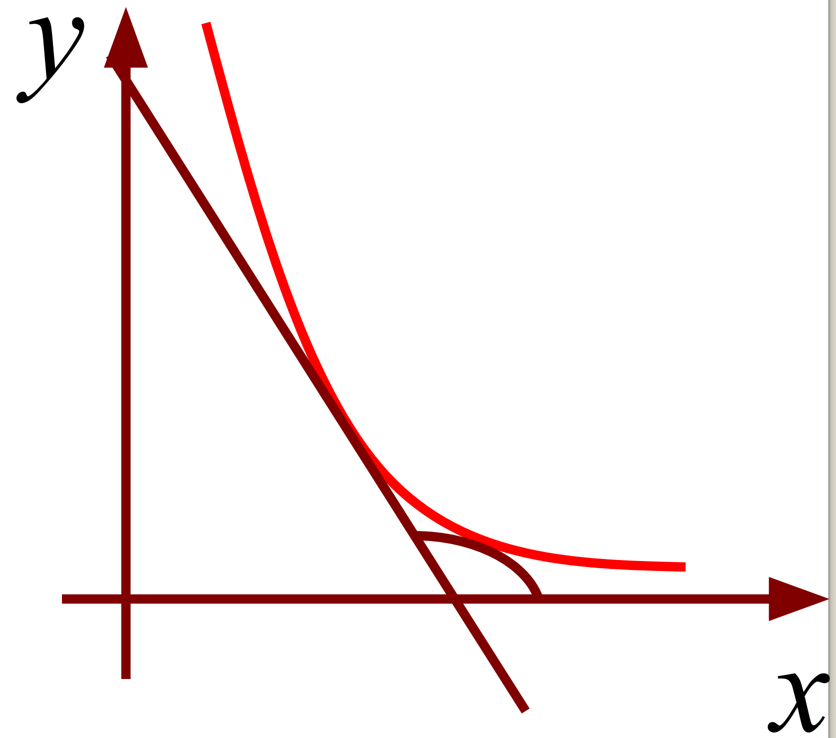
ТЕОРЕМА 2 (достаточное условие убывания функции)

Если производная дифференцируемой функции отрицательна внутри некоторого промежутка Х, то она убывает на этом промежутке.

Геометрическая интерпретация

Если касательные к кривой на некотором промежутке направлены под острыми углами к оси х, то функция возрастает. если они направлены под тупыми углами, то функция убывает.





Функция возрастает   **Функция убывает**

Пример

Найти интервалы монотонности функции

$$y = x^2 - 4x + 3$$

Решение:

Найдем производную этой функции:

$$y' = (x^2 - 4x + 3)' = 2x - 4$$

Исследуем знак этой производной:

$$y' = 2x - 4 > 0 \quad при \quad x > 2$$

$$y' = 2x - 4 < 0 \quad при \quad x < 2$$

Следовательно, функция будет возрастать на промежутке

$$(2;+\infty)$$

Функция будет убывать на промежутке

$$(-\infty;2)$$

ЭКСТРЕМУМ ФУНКЦИИ

Точка x_0 называется точкой <u>максимума</u> функции $f(x)$, если в некоторой окрестности точки x_0 выполняется неравенство

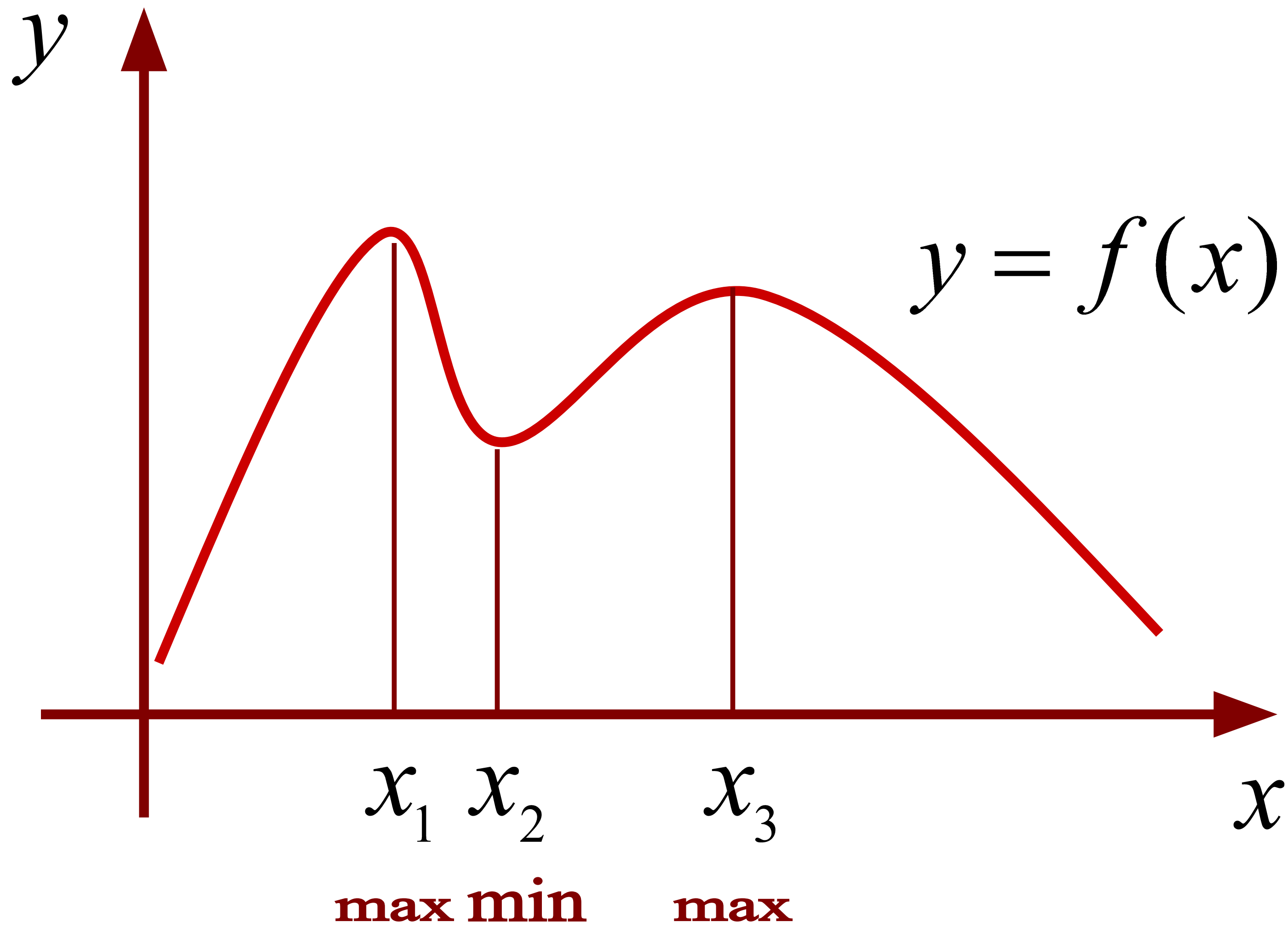
$$\boxed{f(x) \le f(x_0)}$$

Точка x_1 называется точкой <u>минимума</u> функции $f(x)$, если в некоторой окрестности точки x_1 выполняется неравенство

$$\boxed{f(x) \geq f(x_1)}$$

Значения функции в точках x_0 и x_1 называются соответственно точками <u>максимума </u>и <u>минимума</u>.

Максимум и минимум функции называется <u>экстремумом</u> функции.



y
y = f(x)
x
x1
x2
x3
max
min
max

Если в некоторой точке x_0 дифференцируемая функция $f(x)$ имеет экстремум, то в некоторой окрестности этой точки выполняется теорема Ферма и производная функции в этой точке равна нулю:

$$\boxed{f'(x_0) = 0}$$

Однако, функция может иметь экстремум в точке, в которой она не дифференцируема.

Например, функция

$$y = |x|$$

имеет минимум в точке

$$x = 0$$

но она в этой точке не дифференцируема.

Необходимое условие экстремума

Для того, чтобы функция $y=f(x)$ имела экстремум в точке x_0, необходимо, чтобы ее производная в этой точке равнялась нулю или не существовала.

Точки, в которых выполняется необходимое условие экстремума, называются <u>критическими</u> или <u>стационарными</u>.

Если в какой-либо точке имеется экстремум, то эта точка является критической.

Но критическая точка не обязательно является точкой экстремума.

Примеры

Найти критические точки и экстремумы функций:

1

$$y = x^2$$

Решение:

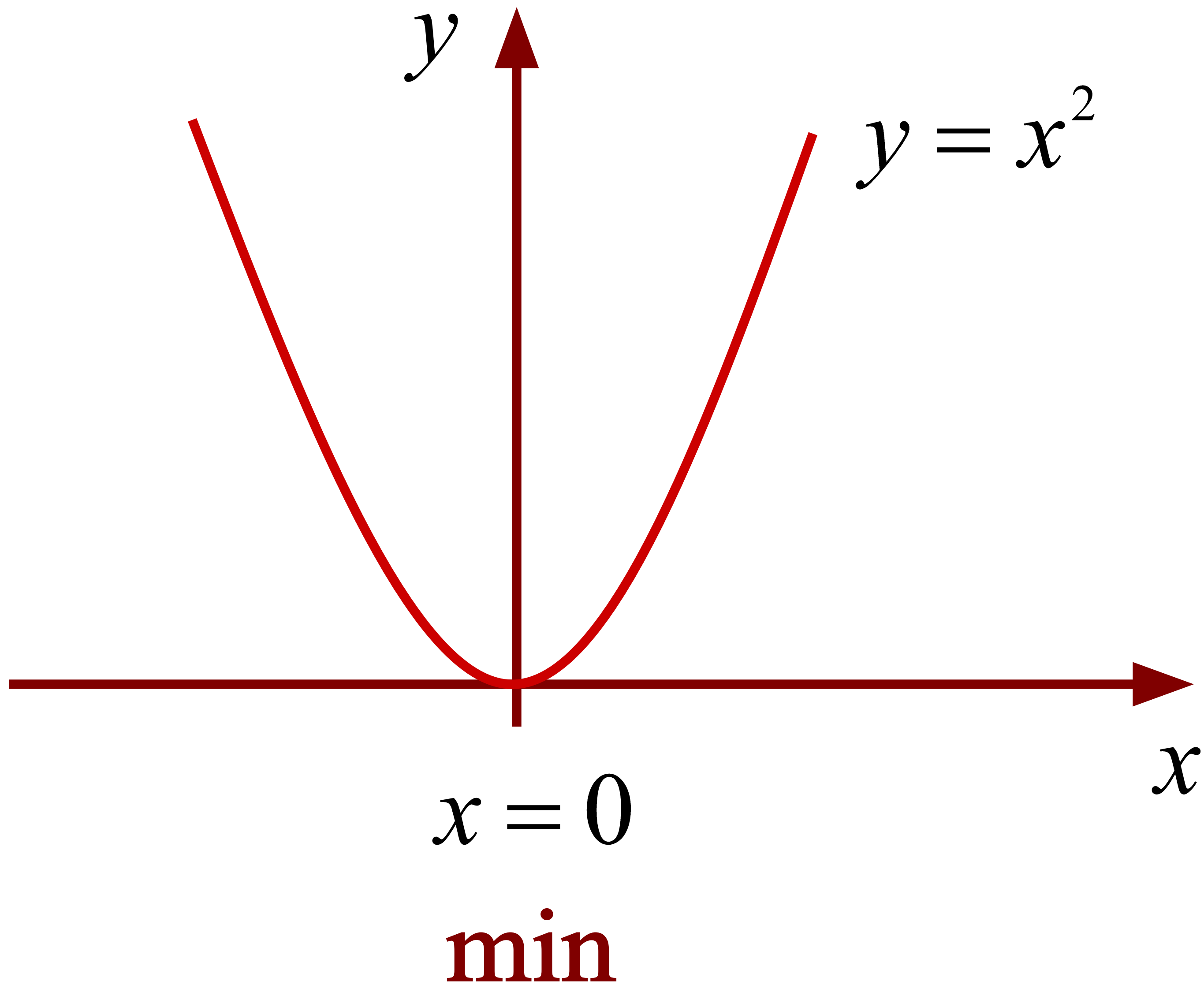
Применим необходимое условие экстремума:

$$y' = (x^2)' = 2x$$

$$y' = 2x = 0 \quad \textit{при} \quad x = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

- критическая точка


y
$y = x^2$
x
$x = 0$
min

2

$$\boxed{y = x^3 + 1}$$

Решение:

Применим необходимое условие экстремума:

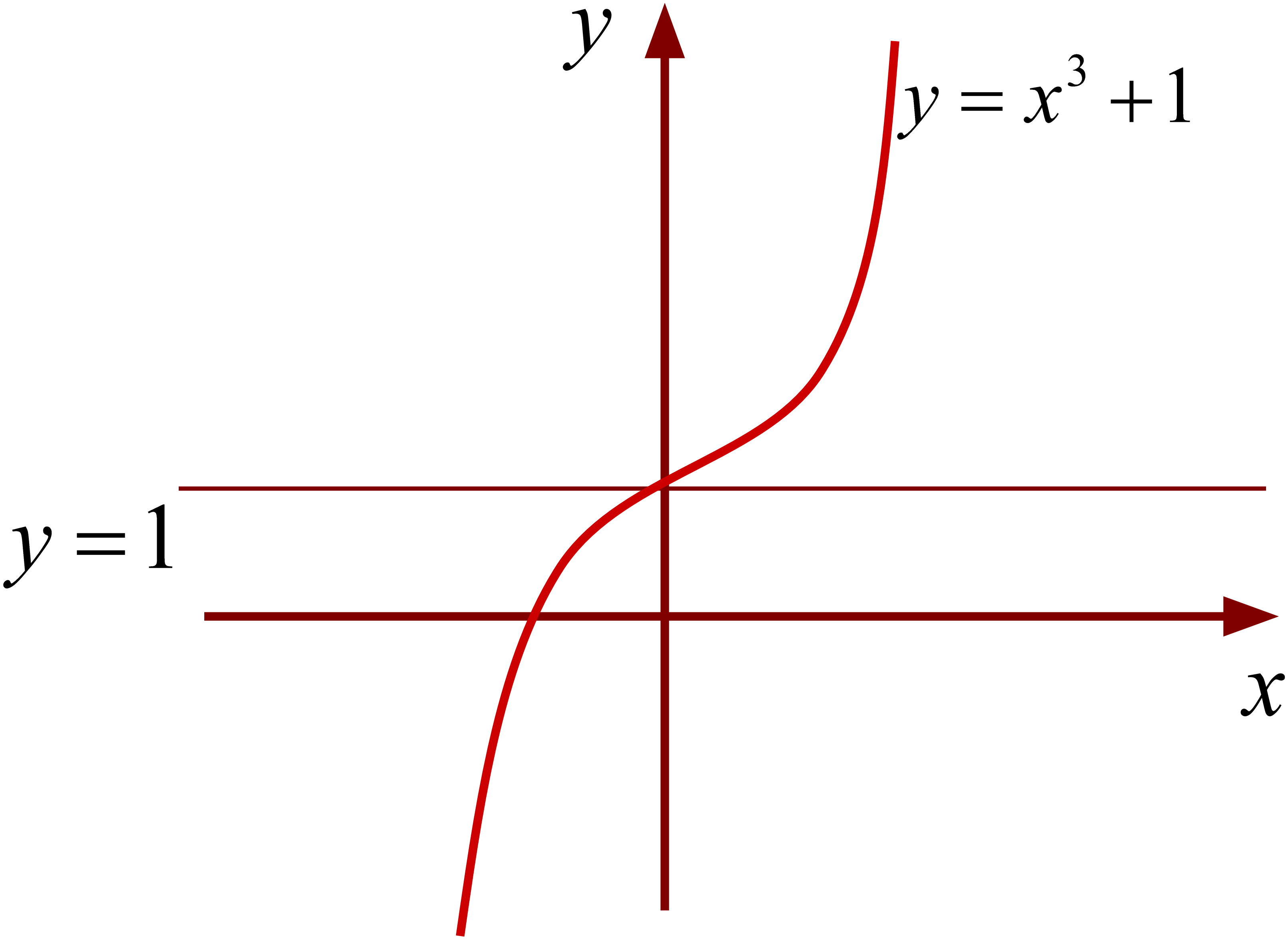
$$y' = (x^3 + 1)' = 3x^2$$

$$y' = 3x^2 = 0 \quad npu \quad x = 0$$

$$x = 0$$

- критическая точка

$$y = 1$$



y
$y = x^3 + 1$
$y = 1$
x

Первое достаточное условие экстремума

Если при переходе через точку x_0 производная дифференцируемой функции $y=f(x)$ меняет знак с плюса на минус, то x_0 есть точка максимума, а если с минуса на плюс, то x_0 есть точка минимума.

Схема исследования функции на экстремум

1

Найти производную функции

$$y' = f'(x)$$

2

Найти критические точки функции, в которых производная равна нулю или не существует.

3

Исследовать знак производной слева и справа от каждой критической точки.

4

Найти экстремум функции.

Пример

Исследовать функцию на экстремум:

$$y = x(x-1)^3$$

Решение:

Применим схему исследования функции на экстремум: 1

Находим производную функции:

$$y' = (x(x-1)^3)' = (x-1)^3 + 3x \cdot (x-1)^2 =$$

$$= (x-1)^2(x-1+3x) = (x-1)^2(4x-1)$$

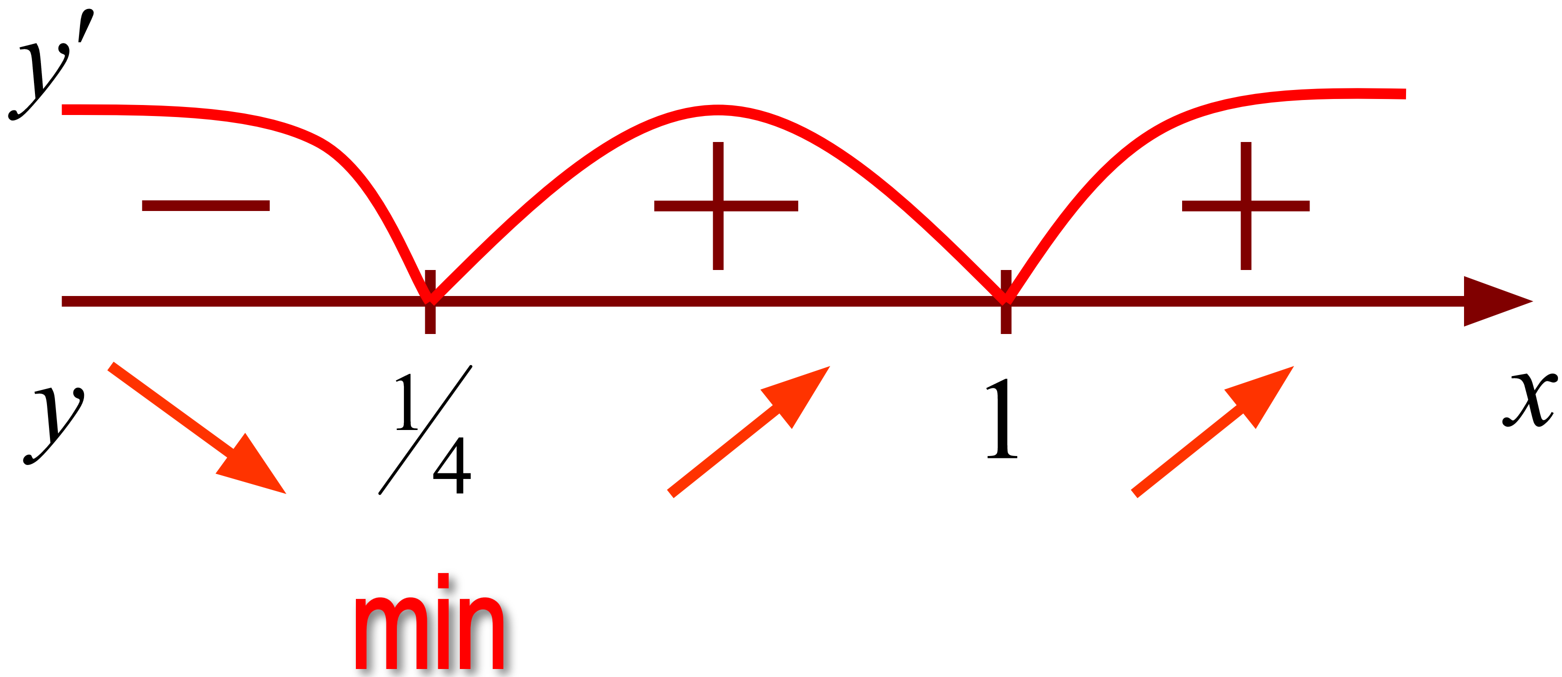
2

Находим критические точки:

$$(x-1)^2(4x-1)=0$$

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= 1 \\ x_2 &= \frac{1}{4} \end{aligned}\right]$$ критические точки

3 Исследуем знак производной слева и справа от каждой критической точки:



В точке $x=1$ экстремума нет.

4

Находим экстремум функции:

$$f_{\min}\left(\frac{1}{4}\right) = -\frac{27}{256}$$

Второе достаточное условие экстремума

Если первая производная дифференцируемой функции $y=f(x)$ в точке x_0 равна нулю, а вторая производная в этой точке положительна, то x_0 есть точка минимума, а если вторая производная отрицательна, то x_0 есть точка максимума.

Схема исследования функции на экстремум в этом случае аналогична предыдущей, но третий пункт следует заменить на:

3

Найти вторую производную и определить ее знак в каждой критической точке.

НАИБОЛЬШЕЕ И НАИМЕНЬШЕЕ ЗНАЧЕНИЯ ФУНКЦИИ НА ОТРЕЗКЕ

Согласно теореме Вейерштрасса, если функция непрерывна на отрезке [a;b], то на достигает на нем наибольшего и наименьшего значений.

Эти значения могут быть достигнуты на концах отрезка или в точках экстремума.

Схема нахождения наибольшего и наименьшего значения функции на отрезке

1

Найти производную функции.

2

Найти критические точки, в которых производная равна нулю или не существует.

3

Найти значения функции в критических точках и на концах отрезка, и выбрать из них наибольшее и наименьшее значения.

пример

Найти наибольшее и наименьшее значения функции

$$y = (x-2)^2 \cdot e^{-x}$$

на отрезке

$$[0\,;5]$$

решение:

1. **Находим производную функции:**

$$y' = \left((x-2)^2 \cdot e^{-x}\right)' = 2(x-2)\cdot e^{-x} - (x-2)^2 \cdot e^{-x} =$$

$$= e^{-x} \cdot (x-2) \cdot (x-4)$$

2. **Находим критические точки:**

$$y' = e^{-x} \cdot (x-2) \cdot (x-4) = 0$$

$$\left.\begin{matrix} x_1 = 2 \\ x_2 = 4 \end{matrix}\right]$$

критические точки

3

Находим значения функций в критических точках и на концах отрезка:

$$f(2) = 0 \qquad f(4) = \frac{4}{e^4} \qquad f(0) = 4 \qquad f(5) = \frac{9}{e^5}$$

$$\boxed{f_{наиб}(0) = 4} \qquad \boxed{f_{наим}(2) = 0}$$

ЗАМЕЧАНИЕ

Если функция непрерывна на интервале (а;в), то она может не принимать на нем наибольшее
и наименьшее значения. В частности, если дифференцируемая функция y=f(x) на интервале
(а;в) имеет лишь одну точку максимума (или минимума), то наибольшее (или наименьшее) значение функции совпадает с максимумом (минимумом) этой функции.