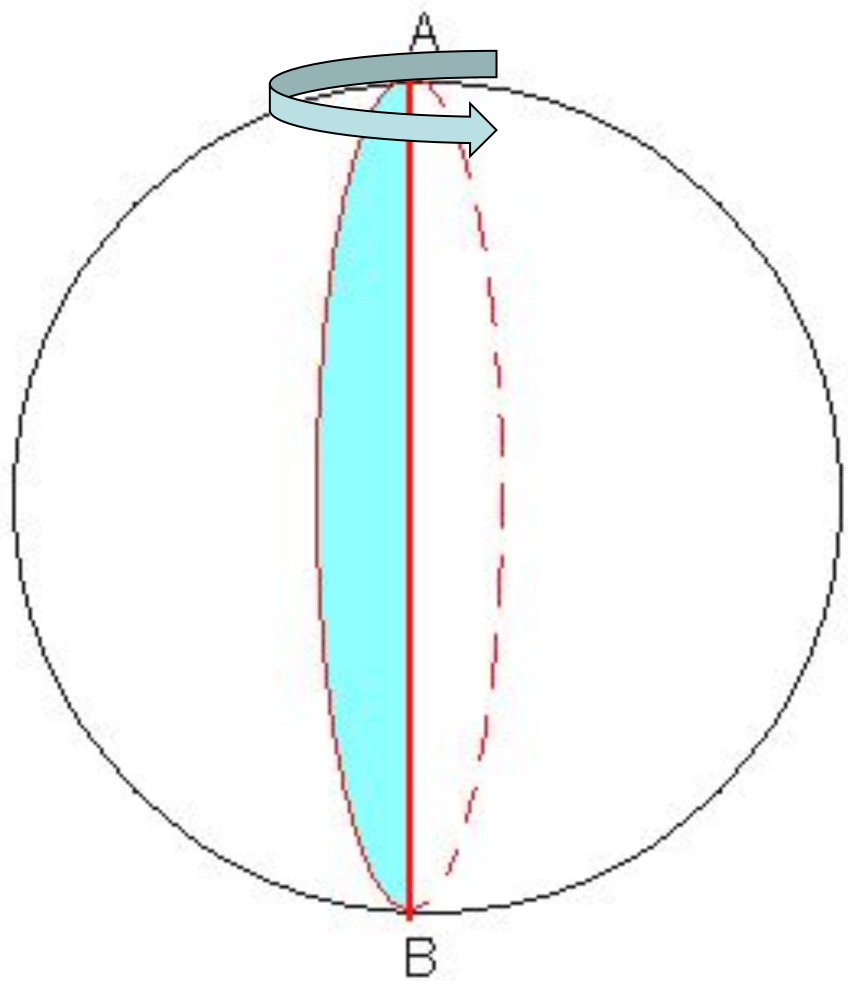
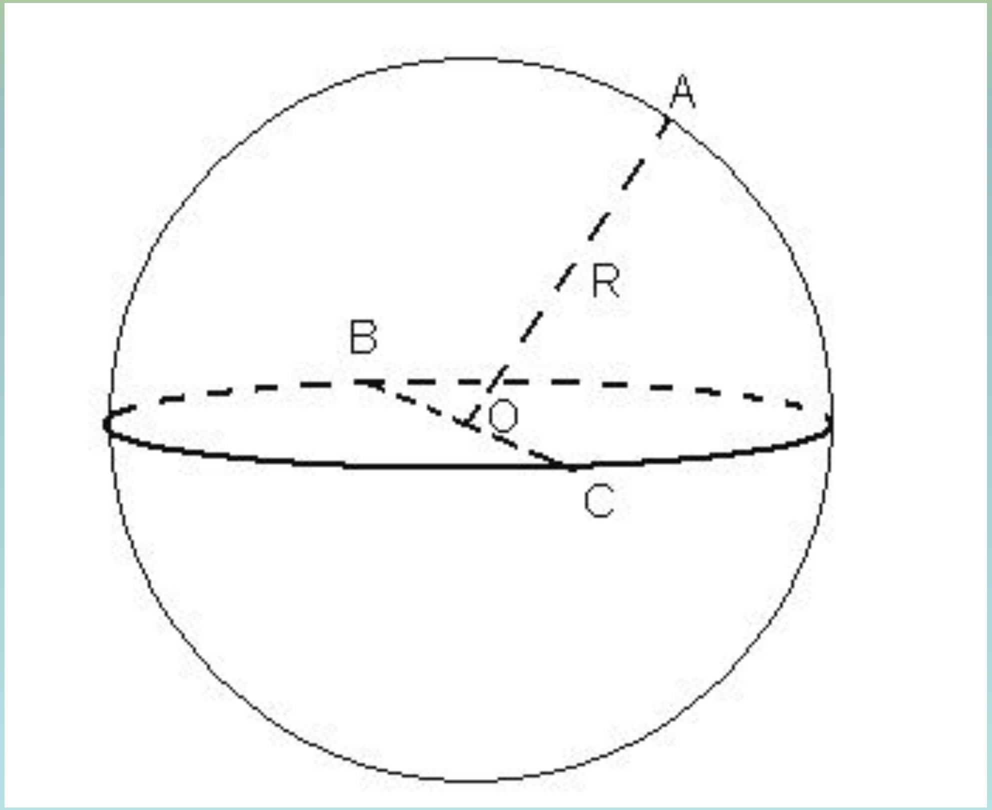
СФЕРА. УРАВНЕНИЕ СФЕРЫ

Тело вращения - сфера



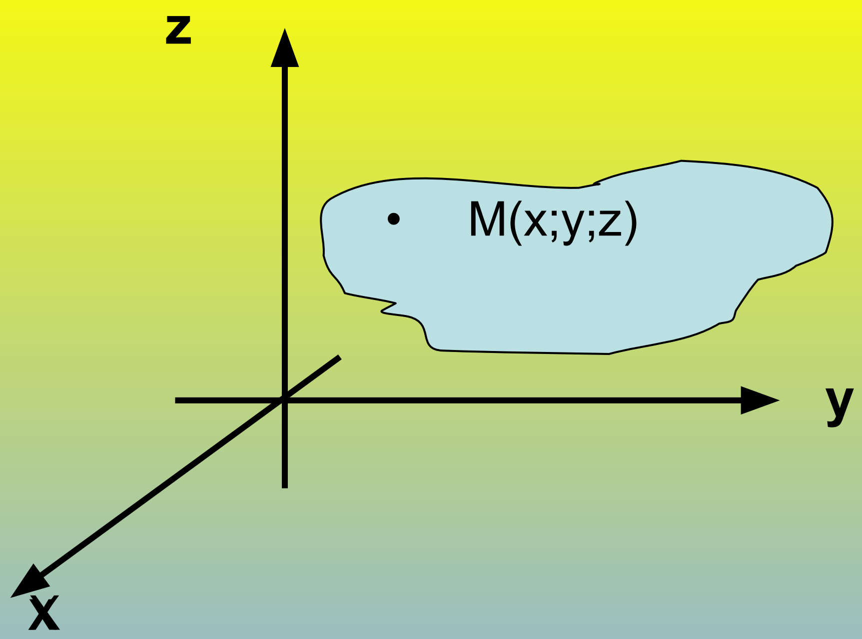
Определение сферы

- Сферой называется поверхность, состоящая из всех точек пространства, расположенных на данном расстоянии от данной точки.

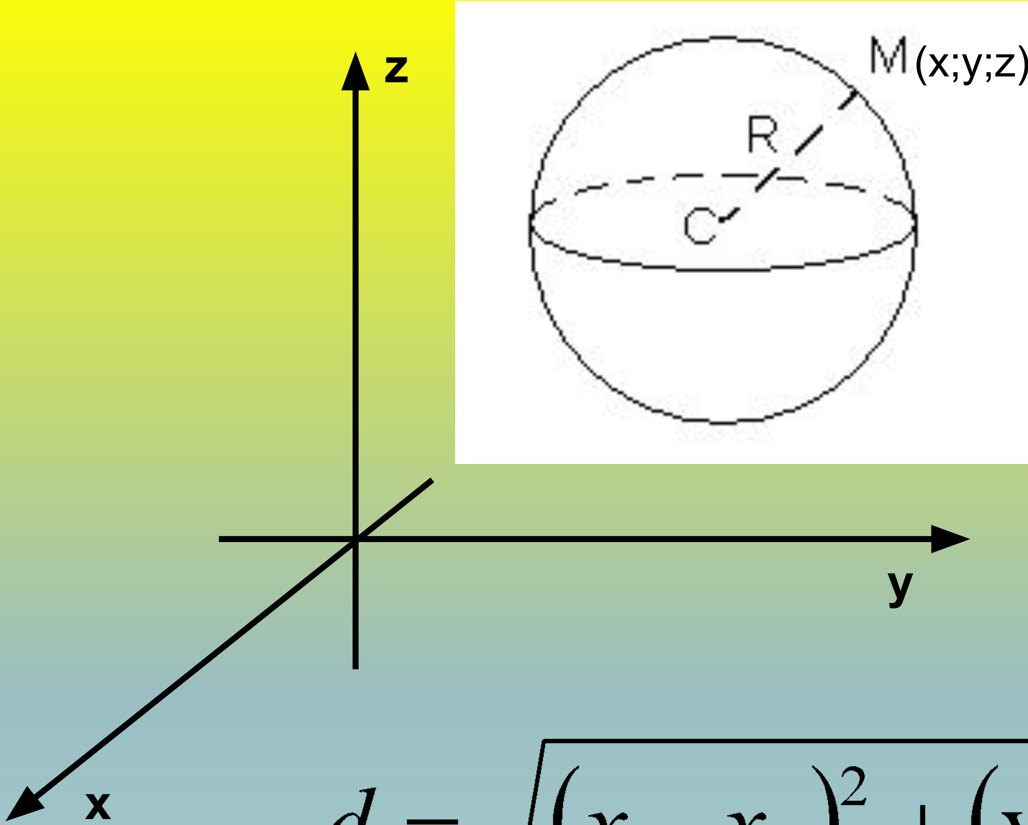


Элементы сферы

- т.О - центр сферы
- ОА – радиус сферы.
- Любой отрезок, соединяющий центр и какую-нибудь точку сферы называется радиусом сферы.
- ВС – диаметр сферы.
- Отрезок, соединяющий две точки сферы и проходящий через ее центр, называется диаметром сферы
- d=2r



Уравнение с тремя переменными x,y,z называется уравнением поверхности, если этому уравнению удовлетворяют координаты любой точки поверхности и не удовлетворяют координаты никакой точки, не лежащей на этой поверхности.



$$d = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}$$

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2$$

Уравнение плоскости и прямой

Общее уравнение плоскости

$$Ax+By+Cz+D=0$$

где A, B, C, D – числовые коэффициенты

Особые случаи уравнения:

- $D = 0 \Rightarrow Ax+By+Cz = 0$

  плоскость проходит через начало координат.
- $A = 0 \Rightarrow By + Cz + D = 0$

  плоскость параллельна оси Ox.
- $B = 0 \Rightarrow Ax + Cz + D = 0$

  плоскость параллельна оси Oy.
- $C = 0 \Rightarrow Ax+By+D = 0$

  плоскость параллельна оси Oz.

Особые случаи уравнения:

- $A = B = 0 \Rightarrow Cz + D = 0$

  плоскость параллельна плоскости Oxy.

- $A = C = 0 \Rightarrow By + D = 0$

  плоскость параллельна плоскости Oxz.

- $B = C = 0 \Rightarrow Ax + D = 0$

  плоскость параллельна плоскости Oyz.

Особые случаи уравнения:

- $A = D = 0 \Rightarrow By + Cz = 0$

  плоскость проходит через ось Ox.

- $B = D = 0 \Rightarrow Ax + Cz = 0$

  плоскость параллельна оси Oy.

- $C = D = 0 \Rightarrow Ax + By = 0$

  плоскость параллельна оси Oz.

Уравнения координатных плоскостей

$x = 0$, плоскость Oyz

$y = 0$, плоскость Oxz

$z = 0$, плоскость Oxy

Две плоскости в пространстве:

$\alpha: A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$

$\beta: A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$

- совпадают, если существует такое число k, что

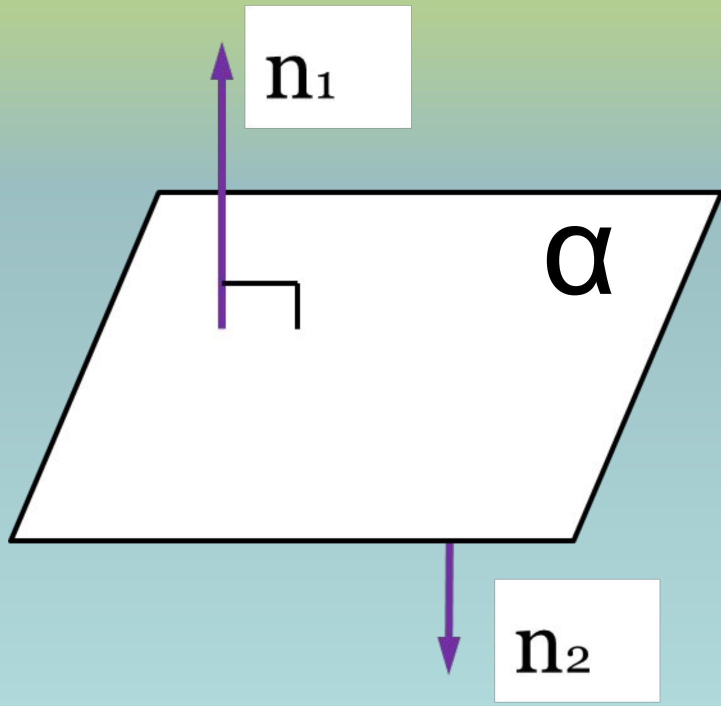
$$\begin{cases} A_1 = kA_2 \\ B_1 = kB_2 \\ C_1 = kC_2 \\ D_1 = kD_2 \end{cases}$$

- параллельны, если существует такое число k, что

$$\begin{cases} A_1 = kA_2 \\ B_1 = kB_2 \\ C_1 = kC_2 \\ D_1 \neq kD_2 \end{cases}$$

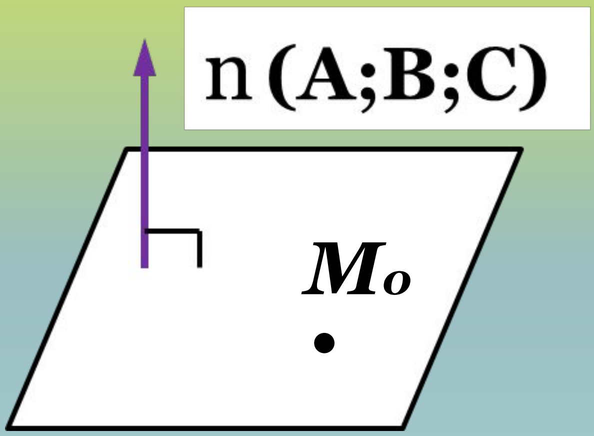
- В остальных случаях плоскости пересекаются.

Алгоритм составления уравнения плоскости, проходящей через точку перпендикулярно данному вектору



Итак, пусть α произвольная плоскость в пространстве. Всякий перпендикулярный ей ненулевой вектор называется ***вектором нормали*** к этой плоскости.

Алгоритм составления уравнения плоскости, проходящей через точку перпендикулярно данному вектору



$M_0\ (x_0; y_0; z_0)$

Если известна какая-нибудь точка плоскости *Mo* и какой-нибудь вектор нормали к ней, то через заданную точку можно провести единственную плоскость, перпендикулярную данному вектору. Общее уравнение плоскости будет иметь вид:

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$$

Чтобы получить **уравнение плоскости**, имеющее приведённый вид, возьмём на плоскости произвольную **точку** ***M(x;y;z)***. Эта точка принадлежит плоскости только в том случае, когда **вектор перпендикулярен вектору** для этого, необходимо и достаточно, чтобы скалярное произведение этих векторов было равно нулю, т.е.

$$\boxed{\vec{n} \cdot \overrightarrow{M_0M} = 0}$$

Вектор задан по условию. Координаты вектора найдём по формуле :

$$\boxed{\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0; y - y_0; z - z_0)}$$

Теперь, используя формулу скалярного произведения векторов , выразим скалярное произведение в координатной форме:

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$$

Уравнение прямой в пространстве

Поскольку прямую в пространстве можно рассматривать как линию пересечения двух плоскостей, то одним из способов аналитического задания прямой в пространстве является задание с помощью системы из двух уравнений задающих пару пересекающихся плоскостей.

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0, \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0, \end{cases}$$

Уравнение прямой в пространстве

Прямую, проходящую через точку $A_0(x_0,y_0,z_0)$ с направляющим вектором $\vec{e}$ (a,b,c) можно задавать параметрическими уравнениями.

$$\begin{cases} x = at + x_0, \\ y = bt + y_0, \\ z = ct + z_0. \end{cases}$$

В случае, если прямая в пространстве задается двумя точками $A_1(x_1,y_1,z_1)$, $A_2(x_2,y_2,z_2)$, то, выбирая в качестве направляющего вектора вектор $(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1)$ и в качестве точки A_0 точку A_1, получим следующие уравнения

$$\begin{cases} x = (x_2 - x_1)t + x_1, \\ y = (y_2 - y_1)t + y_1, \\ z = (z_2 - z_1)t + z_1. \end{cases}$$