Олимпиадная математика

Занятие 2. Принцип Дирихле

Важно!

- Принцип Дирихле – частный случай доказательства от противного.

Задача

- В 2 клетках сидит 3 кролика.
Докажите, что в какой-то клетке сидит не менее 2 кроликов.

Задача

- В 2 клетках сидит 3 кролика.
Докажите, что в какой-то клетке сидит не менее 2 кроликов.
- Доказательство. Допустим обратное: нет клетки, в которой сидит не менее 2 кроликов. Тогда во всех клетках сидит менее 2, т. е. не более 1 кролика. Так как клеток 2, то по теореме сложения неравенств получаем, что всего не более $1 * 2 = 2$ кроликов. Противоречие, т.к. по условию в клетках 3 кролика.

Теорема о сложении неравенств

- Если $a > b$ и n – положительное, то $a^n > b^n$.

Принцип Дирихле

- Если в N клетках сидят не менее $N + 1$ кроликов, то в какой-то из клеток сидит не менее двух кроликов.

Принцип Дирихле

- Если в N клетках сидят не менее $N + 1$ кроликов, то в какой-то из клеток сидит не менее двух кроликов.
- Доказательство. Допустим обратное: нет клетки, в которой сидит не менее 2 кроликов. Тогда во всех клетках сидит менее 2, т. е. не более 1 кролика. Так как клеток N , то по теореме сложения неравенств получаем, что всего не более $1 * N = N$ кроликов. Противоречие, т.к. по условию в клетках $N + 1$ кролика.

Другой вариант принципа

- Если в N клетках сидит менее N зайцев, то найдется хотя бы одна пустая клетка.

Обобщенный принцип Дирихле

- Если в N клетках сидят не менее $kN + 1$ кроликов, то в какой-то из клеток сидит не менее $k + 1$ кролик.