

§2. Определители

1. Вспомогательные определения

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. **Факториалом** числа n называют произведение натуральных чисел от 1 до n включительно, т. е.

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n.$$

$$0! = 1.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Расположение n различных чисел в любом порядке называется **перестановкой** этих чисел.

Пусть дана некоторая перестановка n различных чисел

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_i, \dots, \alpha_k, \dots, \alpha_n.$$

Говорят, что два числа α_i и α_k образуют **инверсию** в перестановке, если большее число стоит левее меньшего, т.е. если $\alpha_i > \alpha_k$.

Количество пар, образующих инверсию в перестановке, **и инверсий в перестановке.**
пропустить 5 клеточек

Определение определителя

Пусть $\mathbf{A}=(a_{ij})$ – квадратная матрица порядка n .

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Построим произведения по следующему правилу:

из каждой строки и каждого столбца возьмем по одному элементу

$$a_{1\alpha_1} \cdot a_{2\alpha_2} \cdot a_{3\alpha_3} \cdot \dots \cdot a_{n\alpha_n}$$

Таких произведений можно построить $n!$

ОПР. Сумма $n!$ произведений каждое со своим знаком, зависящим от порядка чередования строк или столбцов, называется **определителем матрицы $\mathbf{A}$ (определителем порядка n)**.

обозначают $|\mathbf{A}|$, $\det \mathbf{A}$ или

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{(\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n)} (-1)^{k(\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n)} a_{1\alpha_1} \cdot a_{2\alpha_2} \cdot a_{3\alpha_3} \cdot \dots \cdot a_{n\alpha_n}$$

Здесь $\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n$ - перестановка

Здесь $\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n$ - перестановка

Вычисление определителя

Определитель второго порядка.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

Определитель третьего порядка равен алгебраической сумме шести произведений.

а) правило *треугольников*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{array}{c} a_{11} \quad a_{12} \quad a_{13} \\ a_{21} \quad a_{22} \quad a_{23} \\ a_{31} \quad a_{32} \quad a_{33} \end{array} - \begin{array}{c} a_{11} \quad a_{12} \quad a_{13} \\ a_{21} \quad a_{22} \quad a_{23} \\ a_{31} \quad a_{32} \quad a_{33} \end{array}$$

$$= a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{21} \cdot a_{32} \cdot a_{13} + a_{31} \cdot a_{12} \cdot a_{23} -$$

$$- a_{31} \cdot a_{22} \cdot a_{13} - a_{11} \cdot a_{32} \cdot a_{23} - a_{21} \cdot a_{12} \cdot a_{33}$$

б) правило *Саррюса*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{21} \cdot a_{32} \cdot a_{13} + a_{31} \cdot a_{12} \cdot a_{23} -$$

$$- a_{31} \cdot a_{22} \cdot a_{13} - a_{11} \cdot a_{32} \cdot a_{23} - a_{21} \cdot a_{12} \cdot a_{33}$$

пропустить 10 клеточек

Свойства определителей

1) При транспонировании матрицы ее определитель не меняется. $|A| = |A^T|$

2) При перестановке любых двух строк (столбцов) определитель меняет знак.

пропустить 10 клеточек

3) Общий множитель элементов любой строки (столбца) можно выносить за знак определителя.

пропустить 10 клеточек

4) Если все элементы k -й строки определителя $|A|$ являются суммами двух элементов, то определитель равен сумме двух определителей $|A_1|$ и $|A_2|$: у первого в k -ой строке первые слагаемые, у второго в k -ой строке - вторые слагаемые.

пропустить 10 клеточек

•
Здесь $\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_r$ - перестановка
 $A = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \dots + \alpha_n a_n$

пропустить 10 клеток

- 6) *Определитель не изменится, если к каждому элементу i -й строки (столбца) прибавить соответствующий элемент k -й строки (столбца), умноженный на число $\alpha \neq 0$.*
- 7) *Если $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ – квадратные матрицы порядка n , то существует $\mathbf{AB}$ и $\mathbf{BA}$, причем $|\mathbf{AB}|=|\mathbf{BA}|=|\mathbf{A}| \cdot |\mathbf{B}|$.*

пропустить 15 клеточек

Теорема Лапласа и ее следствие

Пусть $\mathbf{A} = (a_{ij})$ – матрица размера $m \times n$.

Выберем в $\mathbf{A}$ произвольно k строк: $i_1, i_2, \dots, i_k$
и k столбцов: $j_1, j_2, \dots, j_k$.

Из элементов, стоящих на пересечении выбранных строк и столбцов составим определитель M_k :

$$M_k = \begin{vmatrix} a_{i_1 j_1} & a_{i_1 j_2} & \boxtimes & a_{i_1 j_k} \\ a_{i_2 j_1} & a_{i_2 j_2} & \boxtimes & a_{i_2 j_k} \\ \boxtimes & \boxtimes & \boxtimes & \boxtimes \\ a_{i_k j_1} & a_{i_k j_2} & \boxtimes & a_{i_k j_k} \end{vmatrix}$$

Определитель M_k называют **минором k -го порядка матрицы $\mathbf{A}$** .

Частные случаи:

- а) любой элемент матрицы – минор первого порядка;
- б) определитель квадратной матрицы порядка n – ее минор порядка n .

Определитель M_k^* , составленный из оставшихся элементов матрицы $\mathbf{A}$, называется **дополнительным минором к минору M_k** .

пропустить 10 клеточек

Пусть $\mathbf{A} = (a_{ij})$ – квадратная матрица порядка n .
Выберем в $\mathbf{A}$ минор первого порядка $M_k = |a_{ij}|$
(строка i , столбец j).

Вычеркнем из матрицы $\mathbf{A}$ строку i , столбец j .

Определитель M_k^* , – **дополнительный минор элемента** a_{ij}
(его обозначают M_{ij}).

Число $A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$ называется **алгебраическим дополнением**
элемента a_{ij} .

пропустить 10 клеточек

СЛЕДСТВИЕ 1 (теоремы Лапласа). *Определитель равен сумме произведений всех элементов любой строки (столбца) на их алгебраические дополнения, т.е.*

$$|\mathbf{A}| = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + a_{in}A_{in}$$

*разложение определителя
по строке*

$$|\mathbf{A}| = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \dots + a_{nj}A_{nj}$$

по столбцу

СЛЕДСТВИЕ 2 (теоремы Лапласа). *Сумма произведений элементов i -й строки (столбца) определителя на алгебраические дополнения соответствующих элементов k -й строки (столбца) этого определителя равна нулю. Т.е.*

$$a_{i1}A_{k1} + a_{i2}A_{k2} + \dots + a_{in}A_{kn} = 0$$

$$a_{1j}A_{1k} + a_{2j}A_{2k} + \dots + a_{nj}A_{nk} = 0$$