Ekonometria- wykład 2, 3

Estymacja i weryfikacja modelu

- **Model regresji liniowej**

- W przypadku, gdy funkcja f z powyższej zależności jest funkcją liniową, model przyjmuje postać:

- $$Y = \alpha_0 + \alpha_1 X_1 + \ldots + \alpha_k X_k + \varepsilon$$
- gdzie:
- Y – zmienna objaśniana,
- $X_1, X_2, \ldots X_k$ – zmienne objaśniające,
- ε – składnik losowy,

$\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_k$

parametry funkcji regresji (parametry modelu), parametry strukturalne

parametry strukturalne przy zmiennych -odzwierciedlają siłę i kierunek wpływu zmiennej objaśniającej na zmienną objaśniana (endogeniczną), $i=1,2,\ldots,k$.

k – liczba zmiennych objaśniających w modelu.

ROWNOWAŻNE POJĘCIA EKONOMETRYCZNE

- • Zmienna Y nazywana jest :
- – Zmienną zależną
- – Zmienną objaśnianą
- – Regresantem
- – Zmienną endogeniczną

- • Zmienna X nazywana jest
- – Zmienną niezależną
- – Zmienną objaśniającą
- – Regresorem
- – Zmienną egzogeniczną

- **Interpretacja:** Jeżeli zmienna egzogeniczna x_{t1} wzrośnie o 1 jednostkę, a pozostałe zmienne objaśniające nie ulegną zmianie, to oczekujemy, że zmienna endogeniczna y_t wzrośnie (spadnie) średnio o α jednostek.

- Parametry strukturalne w modelu linowym są przyrostami krańcowymi.

Model regresji można także zapisać w **postaci macierzowej** jako

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\alpha + \varepsilon$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1k} \\ 1 & x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & & \dots \\ 1 & x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \dots \\ \alpha_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \dots \\ \varepsilon_n \end{bmatrix}$$

gdzie wektory $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{\alpha} = \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \dots \\ \alpha_k \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \dots \\ \varepsilon_n \end{bmatrix}$ **, ,** oraz macierz $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1k} \\ 1 & x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & & \dots \\ 1 & x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nk} \end{bmatrix}$ zawierają wartości:

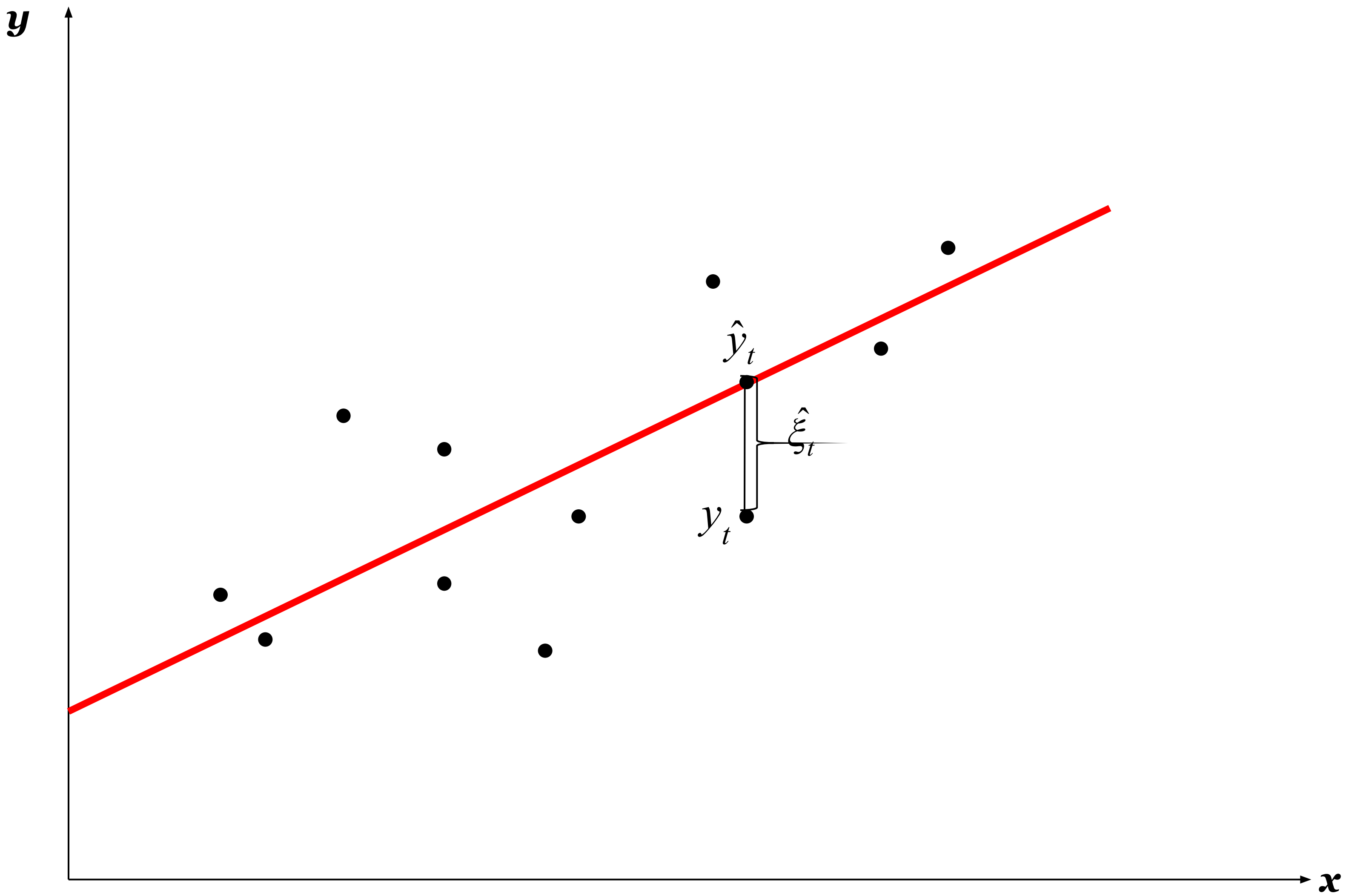
y – zmiennej objaśnianej, **α**– parametrów modelu, **ε** – składnika losowego,**X** – zmiennych objaśniających.

Estymacja modelu - MNK

Oszacować (estymować) model oznacza znaleźć oceny parametrów strukturalnych na podstawie konkretnej próby

- Jeżeli dysponujemy zbiorem (próbą) n obserwacji (x_{1i}, x_{2i}, ... x_{ki}, y_i) – wartości zmiennych objaśniających i objaśnianych, to na jego podstawie możemy próbować znaleźć oszacowania a_0, a_1, ... a_k parametrów funkcji regresji.
- Wielkości $$\hat{y}_i = a_0 + a_1 x_{1i} + \ldots + a_k x_{ki}$$
- będziemy nazywać *wartościami teoretycznymi zmiennej y* odpowiadającymi i-tej obserwacji, i=1, 2, ... , n.
- Natomiast e_i *resztami modelu*

$$y_i - \hat{y}_i = e_i$$



y
$\hat{y}_t$
$\hat{\xi}_t$
y_t
x

Metody szacowania parametrów strukturalnych:

- Metoda Najmniejszych Kwadratów (MNK)
- Metoda Momentów (MM),
- Metoda Największej Wiarygodności (MNW),
- i wiele innych.

Twierdzenie Gaussa-Markowa:

W klasycznym modelu regresji liniowej najlepszym nieobciążonym estymatorem linowym parametrów jest estymator uzyskany MNK

Założenia modelu regresji liniowej (założenia Gaussa-Markowa)

- Postać funkcji regresji jest liniowa i stała, tzn. relacja między zmiennymi jest stabilna,
- Zmienne objaśniające (egzogeniczne) są nielosowe, ich wartości są ustalonymi liczbami rzeczywistymi,
- zmienne objaśniające nie są współliniowe, czyli nie występuje między nimi dokładna zależność liniowa

Przykład współlinowości zmiennych:

X1-liczba pracowników w przedsiębiorstwie,

X2-liczba pracowników na stanowiskach kierowniczych,

X3-liczba pracowników na stanowiskach niekierowniczych.

X1=X2+X3,

- liczba obserwacji przekracza liczbę szacowanych parametrów modelu (n>k)

- Składnik losowy ma rozkład normalny
- o średniej równej 0 i stałym odchyleniu standardowym,
- nie występuje autokorelacja składnika losowego,
- nie występuje korelacja składnika losowego ze zmiennymi objaśniającymi,
- Informacje zawarte w próbie są jedynymi informacjami, na podstawie których dokonuje się szacowania (estymacji) parametrów modelu.
-

Metoda Najmniejszych Kwadratów (MNK)

- Im mniejsza jest odległość wartości rzeczywistych od teoretycznych tym lepszy model
- estymatory parametrów modelu minimalizują sumę odległości *yi od* i yi^

$$\sum_{i=1}^{n}(y_i - \hat{y}_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} e_i^2$$

- Estymatorem metody najmniejszych kwadratów (MNK-estymatorem) wektora **α** jest wektor **a** wyznaczony jako
-

$$\mathbf{a} = \left(\mathbf{X}^{\mathbf{T}}\mathbf{X}\right)^{-1}\mathbf{X}^{\mathbf{T}}\mathbf{y}$$

Własności estymatorów MNK

- \- Nieobciążoność
- \- Efektywność
- \- Zgodność

Weryfikacja jednorównaniowego liniowego modelu ekonometrycznego

- ocena merytoryczna (stwierdzenie, czy otrzymane wyniki estymacji zgodne są z pewnymi założeniami i oczekiwaniami, a także z teorią ekonomii),

- weryfikacja statystyczna

Weryfikacja merytoryczna

- 1. określenie poprawności znaków przy parametrach;
- 2. interpretacja wartości oszacowanych parametrów
- (inaczej interpretuje się parametry w równaniu liniowym niż nieliniowym).

Weryfikacja statystyczna

Ocena stopnia dopasowania modelu – (parametry struktury stochastycznej modelu)

- **współczynnik determinacji R2**.
- Jest to syntetyczna miara opisująca dopasowanie wartości teoretycznych do rzeczywistych.

Przyjmuje wartości z przedziału [0; 1].

- Im blizej 1 (100%) tym lepsze dopasowanie

modelu do danych, a wiec oszacowania są lepszej jakości.

- R2 = 1 wszystkie punkty empiryczne należą do linii regresji (wszystkie reszty są równe 0.

- **Współczynnik determinacji**: określa, jaka część zmienności cechy zależnej jest wyjaśniona zmiennością cech niezależnych.

- Pewna część zmienności zmiennej objaśnianej pozostaje niewyjaśniona:
  - nieuwzględnienie pewnych zmiennych objaśniających
  - losowy charakter czynników wpływających na zmienną objaśnianą

- Czasami wyznacza się także wartość tzw. **skorygowanego współczynnika determinacji:**
- Wartość jest interpretowana tak, jak zwykłego współczynnika determinacji.

- Współczynnik skorygowany ma zastosowanie do porównywania stopnia dopasowania modeli o różnej liczbie

- wariancja resztowa

- Miarą przeciętnej wielkości błędu dopasowania jest **wariancja resztowa**, która jest oceną wariancji składnika losowego:
- $$S_e^2 = \frac{1}{n-(k+1)} \sum_{i=1}^{n} e_i^2$$.

- Pierwiastek z wariancji reszt S_e (reprezentujący odchylenie standardowe reszt) jest **przeciętnym (standardowym) błędem szacunku zmiennej objaśnianej**

przeciętny błąd szacunku parametru $S(a_j)$.

- **Przedział ufności dla parametru**

$$P\left(a_j - t_{alfa} S(a_j) < \alpha_j < a_j + t_{alfa} S(a_j)\right) = 1 - alfa$$

- gdzie 1-alfa jest współczynnikiem ufności, a t_{alfa} jest wartością odczytaną z tablic rozkładu *t*-Studenta dla $n-(k+1)$ stopni swobody.

Ocena istotności

$$H_0 : \alpha_j = 0$$
$$H_1 : \alpha_j \neq 0$$

- Sprawdzianem jest statystyka:

$$t(a_j) = \frac{a_j}{S(a_j)}$$

- Statystyka ma rozkład t-Studenta o *n-k-1 stopniach swobody*.

- 1. Jeżeli $|t(aj)| > t_{kryt}$ wówczas (przy przyjętym z góry poziomie istotności) odrzucamy H0 na korzysc H1.
- Zmienna objaśniająca w istotny sposób wpływa na zmienną objaśnianą.
- 2. Jeżeli $|t(aj)| < t_{kryt}$ wówczas (przy przyjętym z góry poziomie istotności) nie mamy podstaw do odrzucenia hipotezy zerowej,
- uznajemy dany parametr za nieistotny statystycznie.

Zmienna (czynnik)	Wartość oszacowana	Błąd oszacowania	Statystyka t_{obl}	Rzeczywisty poziom istotności P
Wyraz wolny	a_0	$s(a_0)$	$t(a_0)$	$P(a_0)$
Czynnik X_1	a_1	$s(a_1)$	$t(a_1)$	$P(a_1)$
Czynnik X_2	a_2	$s(a_2)$	$t(a_2)$	$P(a_2)$
Czynnik X_3	a_3	$s(a_3)$	$t(a_3)$	$P(a_3)$
Współczynniki: determinacji R^2, zbieżności φ^2, błąd resztowy s(y) i inne				

Modele nieliniowe

Model potęgowy

Ogólny zapis statycznego modelu potęgowego

$$y_t = \alpha_0 x_{i1}^{a_1} x_{i2}^{a_2} \ldots\ x_{ik}^{a_k} e^{\xi_i}$$

Parametry strukturalne w modelu potęgowym są elastycznościami cząstkowymi. Jest to model o stałych elastycznościach.

Interpretacja: Jeżeli zmienna egzogeniczna x_{t1} wzrośnie o 1%, a pozostałe zmienne objaśniające nie ulegną zmianie, to oczekujemy, że zmienna endogeniczna y_t wzrośnie (spadnie) średnio o α %.

- **Linearyzacja modelu potęgowego**

$$\ln y_t = \ln \alpha_0 + \alpha_1 \ln x_{i1} + \alpha_2 \ln x_{i2} + \ldots + \alpha_k \ln x_{ik} + \xi i;$$
$$(i = 1, \ldots, n)$$

$$y = \begin{bmatrix} \ln y_1 \\ \ln y_2 \\ \ln y_3 \\ \vdots \\ \ln y_n \end{bmatrix}_{(n\times 1)}$$

$$X = \begin{bmatrix} 1 & \ln x_{11} & \cdots & \ln x_{1k} \\ 1 & \ln x_{21} & \cdots & \ln x_{2k} \\ 1 & \ln x_{31} & \cdots & \ln x_{3k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \ln x_{n1} & \cdots & \ln x_{nk} \end{bmatrix}_{(n\times (k+1))}$$

- Funkcja potęgowa to często wykorzystywany model:
- -ekonometryczna funkcja produkcji Cobba-Douglasa
- - ekonometryczna funkcja popytu
-

- **Model produkcji**
- Funkcja produkcji wyraża zależność między nakładami czynników produkcji (kapitału i pracy) a wielkością (wartością) wytworzonych produktów.
- Ekonometryczny model produkcji:

$$y = f(K, L, \varepsilon)$$

- gdzie
- *K* – kapitał (wartość maszyn, surowców, nakładów finansowych),
- *L* – nakłady pracy.

Wielkości produkcji, kapitału i pracy mogą być wyrażone w jednostkach ilościowych, wartościowych

Funkcja Cobba-Douglasa

- Jest to potęgowa postać funkcji produkcji. Dla dwóch czynników produkcji K i L mamy model:
- $y = \alpha_0 K^{\alpha_1} L^{\alpha_2} \varepsilon \qquad \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2 > 0$
- Funkcję tę przekształcamy do postaci liniowej przez logarytmowanie:

  $$\ln y = \ln \alpha_0 + \alpha_1 \ln K + \alpha_2 \ln L + \ln \varepsilon$$
- Elastyczność funkcji Cobba-Douglasa względem K i L jest stała i równa odpowiednio:

$$E_{y/K} = \frac{\partial \ln y}{\partial \ln K} = \alpha_1 \qquad E_{y/L} = \frac{\partial \ln y}{\partial \ln L} = \alpha_2$$

- Parametry funkcji - odpowiednie elastyczności.

- Jeśli wielkość kapitału wzrasta o 1%, to wielkość produkcji wzrasta α_1 o %, zaś przy wzroście nakładów pracy o 1% wielkość produkcji wzrasta o α_2%.

Modele popytu

- Funkcja popytu wyraża zależność poziomu popytu od czynników ekonomicznych i pozaekonomicznych.

- Główne czynniki ekonomiczne:

dochody (potencjalnych konsumentów) i ceny (dobra badanego, dóbr substytucyjnych).

- Wśród czynników pozaekonomicznych wymienia się czynniki demograficzne i psychologiczno-socjologiczne.

Elastyczności (E)

- Elastyczność dochodowa popytu jest zwykle dodatnia,
- elastyczność cenowa (względem ceny badanego produktu) jest zazwyczaj ujemna.

- Przyjmuje się, że jeśli $|E|>1$, to popyt jest doskonale elastyczny (charakterystyczne dla dóbr luksusowych).
- Jeśli $|E|=1$, to popyt reaguje proporcjonalnie do czynnika
- $0<|E|<1$ mówi się o popycie mało elastycznym
- przy $E=0$ popyt jest sztywny

makro- i mikroekonomiczne funkcje popytu

- **Makroekonomiczne funkcje popytu**
- mierzą popyt dla ludności na większym obszarze (regionu, kraju) w zależności od:
- dochodu średniego dla grup konsumentów,
- cen i ich wzajemnych relacji oraz
- popytu na inne dobra itp.

Są one wyznaczane w przekroju czasowym lub przestrzennym.

Mikroekonomiczne funkcje popytu

- wyrażają zależność popytu na określony produkt dla pojedynczych konsumentów lub gospodarstw w zależności od (zazwyczaj):
- dochodu na osobę
- składu demograficznego oraz
- profilu zawodowego i społecznego.

Mają one często kształt krzywych potrzeb (krzywych Engla), mierzących zależność między popytem i dochodem.

- Do krzywych Engla należą: **funkcja liniowa, potęgowa, hiperboliczna, wykładnicza z odwrotnością, funkcje Törnquista**.

- **Model liniowy**

$$y = \alpha_0 + \alpha_1 x + \varepsilon$$

- y – popyt (konsumpcja), x – dochód
- **Funkcja potęgowa**

$$y = \alpha_0 x^{\alpha_1}$$

- **Model hiperboliczny**

$$y = \alpha_0 + \alpha_1 \frac{1}{x} + \varepsilon$$

- **Funkcja wykładnicza z odwrotnością**

$$y = \alpha_0 \mathrm{e}^{\alpha_1 \frac{1}{x}}$$

Weryfikacja stochastyczna- Własności składnika losowego

- brak autokorelacji składników losowych.
- stałość wariancji składników losowych.
- normalność rozkładu składnika losowego.

Jeżeli powyższe hipotezy są prawdziwe wówczas:

estymator MNK parametrów strukturalnych liniowego modelu ekonometrycznego jest estymatorem nieobciążonym, zgodnym i najbardziej efektywnym w klasie estymatorów nieobciążonych – BLUE.

Własności składnika losowego

Złamanie założeń o własnościach składnika losowego może mieć postać:

- autokorelacji, czyli korelacji między składnikami losowymi modelu,
- heteroskedastyczności, czyli zmiennej wariancji składnika losowego
- Rozkład skł. Losowego nie jest normalny

Estymatory MNK pozostają wprawdzie nieobciążone, ale są nieefektywne (nie mają najmniejszej wariancji w klasie liniowych estymatorów nieobciążonych).

Autokorelacja

- autokorelacja składnika losowego to korelacja między składnikami losowymi modelu
- autokorelacja między ε_t a ε_{t-k} określana jest mianem autokorelacji rzędu k i oznaczana przez $\rho(k)$

Autokorelacja: przyczyny

- natura procesów gospodarczych: skutki decyzji i zdarzeń ekonomicznych często rozciągają się na wiele miesięcy lub lat; procesy ekonomiczne, zwłaszcza w skali makro, cechują się pewną inercją
- błędy specyfikacji modelu:
  - niepoprawna postać analityczna
  - niepełny zestaw zmiennych objaśniających
  - niewłaściwa struktura dynamiczna

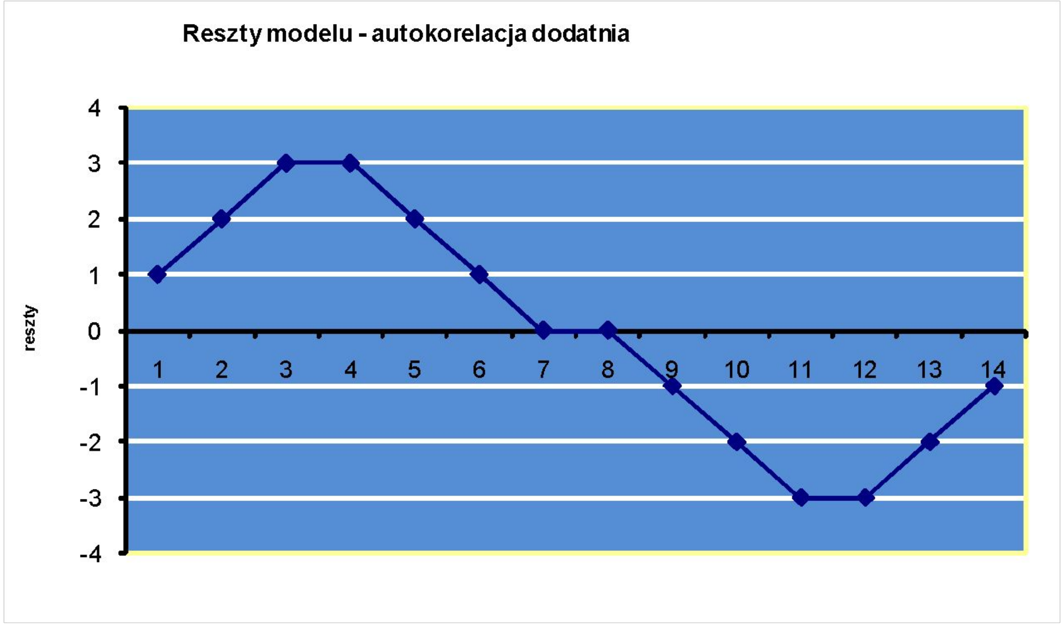
- jeżeli spełnione są założenia KMNK, w szczególności założenie o normalności rozkładu składnika losowego, reszty powinny być niezależne od siebie
- jeżeli reszty są niezależne od siebie, to zachowują się w sposób czysto losowy. Znając wartość reszty z okresu t nie jesteśmy w stanie nic powiedzieć o wartości reszty w okresie $t + 1$. Inaczej zachowują się reszty, które są skorelowane:

A) Autokorelacja składników losowych

Autokorelacja w modelu może być autokorelacją dodatnią:

$$0 < \hat{\rho}_1 < 1$$

Wtedy, gdy obok siebie występować będą seriami składniki losowe takich samych znaków

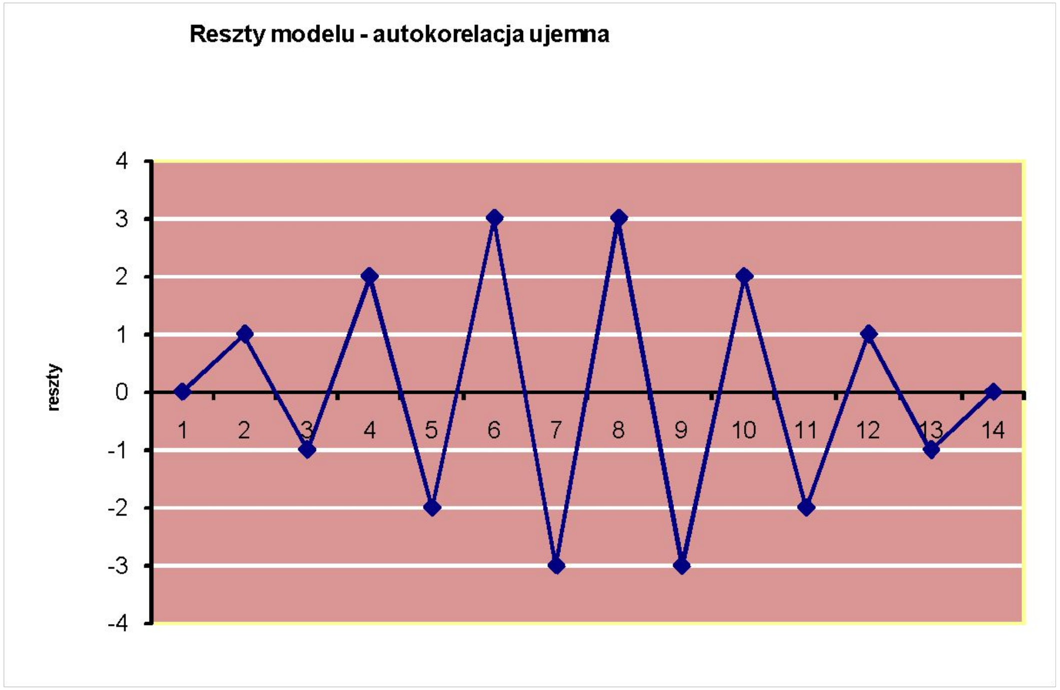


A) Autokorelacja składników losowych

Autokorelacja w modelu może być autokorelacją ujemną:

$$-1 < \hat{\rho}_1 < 0$$

Wtedy, gdy obok siebie występują składniki losowe o różnych znakach.



- dodatnia autokorelacja jest znacznie częściej występującą formą autokorelacji, niż autokorelacja ujemna. Jest ona powszechnym zjawiskiem w przypadku modeli szacowanych na szeregach czasowych

- ujemna autokorelacja składnika losowego powoduje, ze większe jest prawdopodobieństwo zmiany znaku przez składnik losowy. Jeżeli w okresie t jest on dodatni, to w okresie $t + 1$ ze znacznie większym prawdopodobieństwem będzie on ujemny niż dodatni.

Autokorelacja: test Durbina-Watsona (DW)

- bardzo prosty test autokorelacji
- obciążony licznymi wadami:
  - można go zastosować wyłącznie do modeli z wyrazem wolnym, bez opóźnionej zmiennej objaśnianej oraz o normalnym rozkładzie składnika losowego
  - nie pozwala wykryć autokorelacji rzędu wyższego niż 1
  - nie zawsze prowadzi do uzyskania jednoznacznego wyniku

Autokorelacja: test DW – cd.

- H0: $\rho = 0$ H1: $\rho > 0$, lub $\rho < 0$
- statystyka empiryczna:

$$d = \frac{\sum_{t=2}^{T}(e_t - e_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^{T} e_t^2}$$

- z tablic testu DW odczytujemy d_L i d_U
- $d > d_U$ – brak autokorelacji; $d < d_L$ – a. występuje; $d \in (d_L, d_U)$ – obszar niekonkluzywności
- $d > 2$ – a. ujemna; jw. dla 4-d

Autokorelacja: test mnożnika Lagrange'a (LM)

- bardzo ogólny test; nie dotyczą go ograniczenia testu DW
- procedura dwustopniowa; wymaga oszacowania modelu pomocniczego
- ma charakter asymptotyczny, tzn. można go stosować w dużych próbach ($n > 30$)
- statystyka $(T\text{-}1)R^2$ ma rozkład χ^2 z jednym stopniem swobody;
  $(T\text{-}1)R^2 > \chi^2_{kryt}$ – odrzucamy H_0 o braku autokorelacji

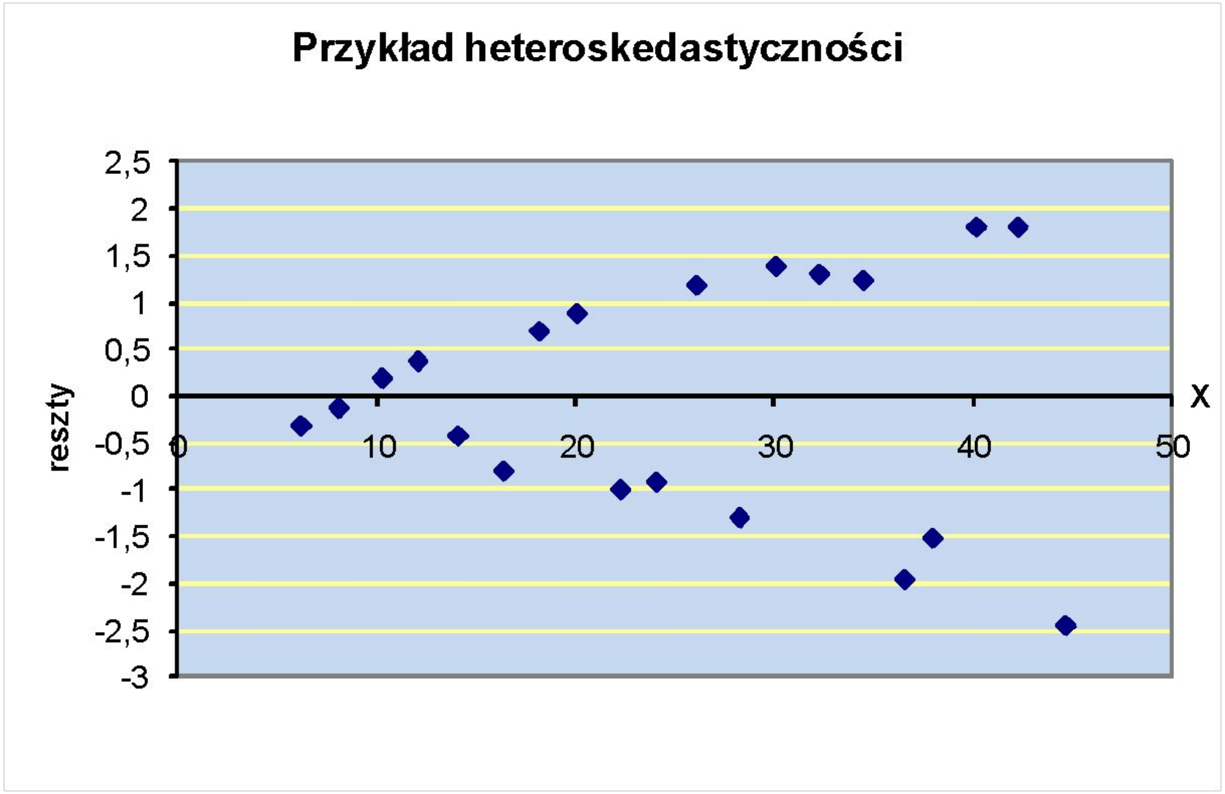
Autokorelacja: co dalej?

- dodanie zmiennych objaśniających
- zmiana postaci analitycznej modelu
- zmiana metody estymacji – Uogólniona Metoda Najmniejszych Kwadratów (UMNK), albo jej równoważniki:
  - metoda Cochrane'a –Orcutta
  - metoda Hildretha –Lu
  - metoda Praisa - Winstena

D) Stałość wariancji składników losowych

Homoskedastyczność – składniki losowe w modelu mają stałą wariancję.

Heteroskedastyczność – składniki losowe w modelu nie mają stałej wariancji.



Heteroskedastyczność

- skutki heteroskedastyczności składnika losowego dla estymatorów MNK:
  - estymatory są nieefektywne
  - statystyki oparte na wariancjach (a więc i odchyleniach standardowych) estymatorów są niewiarygodne

Heteroskedastyczność: przyczyny

- wśród podmiotów zróżnicowanych między sobą można się spodziewać dużej zmienności zachowań, co może znaleźć odzwierciedlenie w kształtowaniu się składnika losowego
- udoskonalanie technik gromadzenia i przetwarzania informacji może spowodować, że wariancja składnika losowego modelu będzie maleć z upływem czasu
- test heteroskedastyczności może „wyłapać” błędną postać funkcyjną lub pominięte zmienne objaśniające

Heteroskedastyczność: test White'a

- procedura dwustopniowa: wymaga oszacowania modelu pomocniczego

- statystyka testowa (postaci $T \cdot R^2$, gdzie R^2 jest współczynnikiem determinacji równania pomocniczego) ma rozkład χ^2 o liczbie stopni swobody równej liczbie zmiennych objaśniających równania pomocniczego
- hipoteza zerowa: homoskedastyczność; $T \cdot R^2 > \chi_{kryt}^2$ to odrzucamy H_0

Heteroskedastyczność: test Goldfelda-Quandta

- test dla modeli z 1 zmienną objaśniającą x
- wymaga arbitralnego podziału zbioru obserwacji na dwie podpróby: jedną odpowiadającą dużym wartościom zmiennej x, a drugą – małym wartościom, a następnie porównania ich wariancji za pomocą testu *F*

- w celu łatwiejszego rozróżnienia pomiędzy wariancjami małymi i dużymi pomija się niekiedy „środkowe" wartości zmiennej

Heteroskedastyczność: co dalej?

- zmiana metody estymacji:
  - Uogólniona Metoda Najmniejszych Kwadratów (UMNK), albo jej równoważnik
  - ważona MNK: wartości każdej zmiennej mnoży się przez tzw. wagi (zależne od postaci heteroskedastyczności)

C) Normalność rozkładu składnika losowego

Stosując wszystkie powyższe testy zakładaliśmy, że badana zmienna, a zatem składnik losowy, ma rozkład normalny.

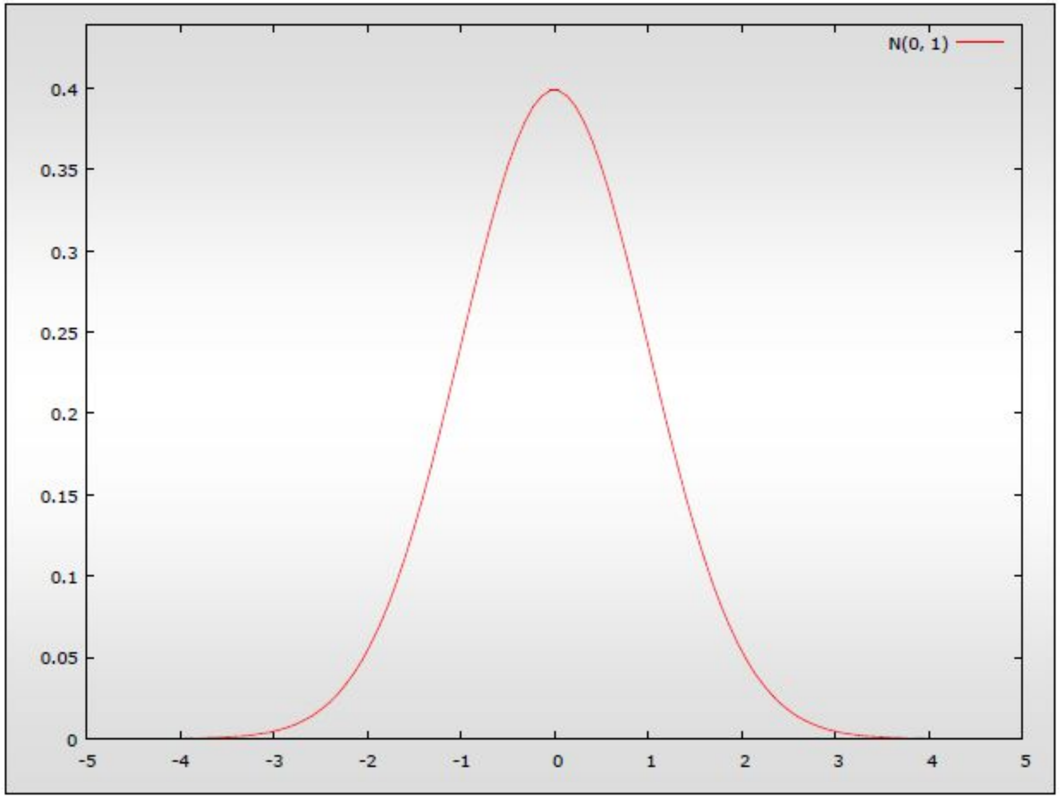
Testowanie normalności rozkładu ξ_t

$$H_0 : \xi_t \sim N$$

$$H_A : \xi_t \; nie \;\; ma \;\; N$$

Test Jarque'a-Bery, test Doornika-Hansena

Wykres standardowego rozkładu normalnego:



Do wszystkich testów statystycznych

Prawdopodobieństwo empiryczne – *p-value, wartość-p*

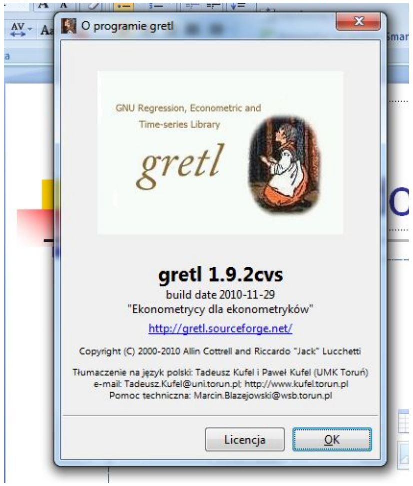
Jest to prawdopodobieństwo przyjęcia przez statystykę wartości nie mniejszej od uzyskanej wartości statystyki z próby, przy założeniu, że hipoteza zerowa jest prawdziwa.

Reguła decyzyjna:

- brak podstaw do odrzucenia H_0.

- odrzucamy H_0.

Inaczej ***p value*** oznacza poziom istotności powyżej którego należy odrzucić hipotezę zerową.



www. kufel.torun.pl

Model tendencji rozwojowej

- Funkcja tendencji rozwojowej (trendu) należy do szczególnej klasy modeli, w których w roli zmiennej objaśniającej występuje czas.

- Zastosowanie tych modeli do analizy szeregów czasowych pozwala często wykryć pewne prawidłowości, które mogą determinować rozwój badanego zjawiska.

Składowe szeregów czasowych

Wyróżnia się cztery składowe mające wpływ na zmienność zjawiska w ujęciu dynamicznym:

- **trend** (tendencja rozwojowa) – ciągłe i regularne zmiany jakim podlega dane zjawisko w długim okresie,
- **wahania okresowe** (często sezonowe) – odchylenia od wartości trendu powtarzające się regularnie co pewien okres, w przybliżeniu stały,
- **wahania koniunkturalne** – zmiany rozwoju gospodarki obserwowane w okresach kilku lub kilkunastoletnich,
- **wahania przypadkowe** – inne uboczne zmiany mające charakter całkowicie nieregularny.

Najczęściej stosowaną metodą wyodrębniania trendów jest metoda analityczna.

funkcja matematyczna, w której zmienną zależną jest poziom obserwowanego w czasie zjawiska a zmienną niezależną – zmienna czasowa.

Model szeregu czasowego ma wówczas postać

$$Y_t = f(t) + u_t \qquad t = 1,2,3,\dots,n$$

Model trendu liniowego

- Najczęściej spotykaną w praktyce funkcją tendencji rozwojowej jest funkcja liniowa.

Model szeregu czasowego ma wówczas postać:

$$Y_t = \alpha_0 + \alpha_1 \cdot t + u_t$$

- Aby wykonac prognoze na podstawie jednorównaniowego modelu opisowego, musi on charakteryzowac
- sie dobrymi własnosciami. Jego jakosc ocenia sie przy pomocy miar takich jak współczynnik
- determinacji czy istotnosc oszacowan. Równie wazna jest weryfikacja merytoryczna, czyli
- znaki a w przypadku modeli nieliniowych wartosci elastycznosci. Same prognozy moga miec
- charakter punktowy (wynikiem jest konkretna wartosc liczbowa) lub przedziałowy (otrzymujemy
- przedział, który z okreslonym prawdopodobienstwem zawiera przyszła realizacje zmiennej
- prognozowanej).
- Dodatkowo zakładamy, ze relacje miedzy zmiennymi pozostana stałe w czasie. Oznacza to,
- ze postac funkcyjna modelu oraz wzajemne oddziaływanie zmiennych sa stałe z okresem prognozy
- włacznie. To załozenie (szczególnie w realiach ekonomicznych) jest bardzo silne. Podobne
- załozenia czynimy w przypadku omawianych ponizej modeli trendu.
- Składnik losowy równiez pozostaje stały w czasie co oznacza, ze nie powinny pojawic sie nowe
- zmienne wpływajace na prognozowane zjawisko przy okazji zmieniajac juz ustalone relacje.
- W okresie prognozowanym musimy znac wartosci zmiennych objasniajacych. Kiedy nie jest
- mozliwe, w sukurs przychodza metody prognozowania szeregów czasowych. Mozna równiez konstruowac
- dodatkowe równania, słuzace otrzymaniu przyszłych wartosci pozadanych zmiennych.
- Zazwyczaj takie postepowanie prowadzi do otrzymania układu powiazanych ze soba równan.
- Niekiedy zas (w analizach okreslonych scenariuszy) zakłada sie z góry wartosci zmiennych egzogenicznych
- co upodabnia postepowanie do analizy mnoznikowej.
- Prognozy na podstawie modeli ekonometrycznych, w których uwzglednia sie fakt sezonowosci
- zmiennych, zakładaja istnienie sezonowosci równiez w okresie prognozy. Sezonowosc ta ma
- zachowany dotychczasowy okres wahan.

- Same prognozy moga miec
- charakter punktowy (wynikiem jest konkretna wartosc liczbowa) lub przedziałowy (otrzymujemy
- przedział, który z okreslonym prawdopodobienstwem zawiera przyszła realizacje zmiennej
- prognozowanej).
- Dodatkowo zakładamy, ze relacje miedzy zmiennymi pozostana stałe w czasie. Oznacza to,
- ze postac funkcyjna modelu oraz wzajemne oddziaływanie zmiennych sa stałe z okresem prognozy
- włacznie. To załozenie (szczególnie w realiach ekonomicznych) jest bardzo silne. Podobne
- załozenia czynimy w przypadku omawianych ponizej modeli trendu.

- Składnik losowy równiez pozostaje stały w czasie co oznacza, ze nie powinny pojawic sie nowe
- zmienne wpływajace na prognozowane zjawisko przy okazji zmieniajac juz ustalone relacje.
- W okresie prognozowanym musimy znac wartosci zmiennych objasniajacych. Kiedy nie jest
- mozliwe, w sukurs przychodza metody prognozowania szeregów czasowych. Mozna równiez konstruowac
- dodatkowe równania, słuzace otrzymaniu przyszłych wartosci pozadanych zmiennych.
- Zazwyczaj takie postepowanie prowadzi do otrzymania układu powiazanych ze soba równan.
- Niekiedy zas (w analizach okreslonych scenariuszy) zakłada sie z góry wartosci zmiennych egzogenicznych
- co upodabnia postepowanie do analizy mnoznikowej.
- Prognozy na podstawie modeli ekonometrycznych, w których uwzglednia sie fakt sezonowosci
- zmiennych, zakładaja istnienie sezonowosci równiez w okresie prognozy. Sezonowosc ta ma
- zachowany dotychczasowy okres wahan.