«Математическая индукция»

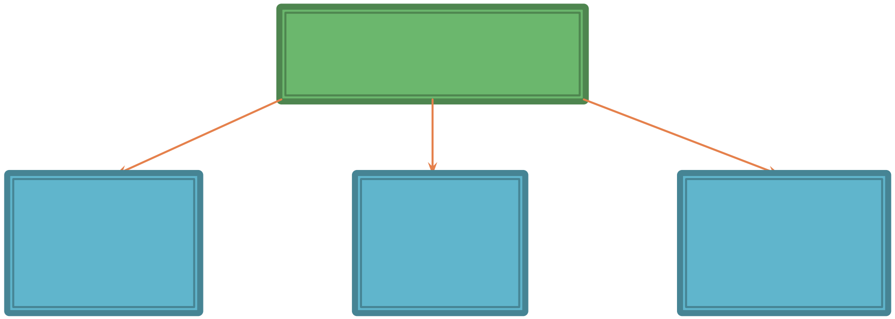
В основе математического исследования лежит

Дедуктивный метод

Индуктивный метод

Дедуктивный метод

- Дедуктивный метод – это рассуждение, исходным моментом которого является общее утверждение, а заключительным – частный результат.



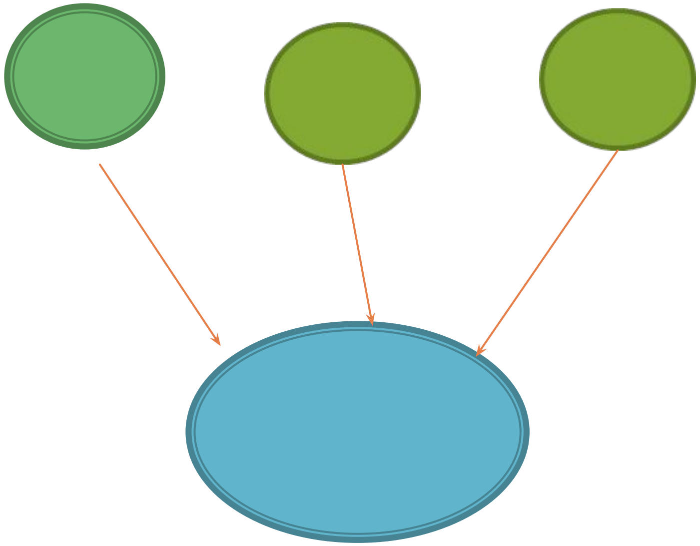
Дедуктивный метод рассуждения

- В математике мы применяем дедуктивный метод, проводя рассуждения такого типа:

Данная фигура – прямоугольник, а у каждого прямоугольника диагонали равны, следовательно, и у данного прямоугольника диагонали равны.

Индуктивный метод

- Индуктивный метод – рассуждение, при котором, опираясь на ряд частных результатов приходят к одному общему выводу.



Пример рассуждения по индукции

- Требуется установить, что каждое четное число в пределах от 4 до 100 можно представить в виде суммы двух простых чисел. Для этого переберем все интересующие нас числа и выпишем соответствующие суммы:

- 4=2+2; 6=3+3; 8=3+5; 10=5+5; …;

92=3+89; 94=5+89; 96=7+89; 98=9+89;

100=3+97.

Эти 49 равенств (мы выписали только 9 из них) показывают, что утверждение о том, что любое четное число от 4 до 100 можно представить в виде суммы двух простых чисел, верно и было доказано путем перебора всех частных случаев.

- Это был пример **полной индукции,** когда общее утверждение доказывается для конечного множества элементов при рассмотрении каждого из этих элементов.
- Но чаще общее утверждение относится не к конечному, а к бесконечному множеству.

Неполная индукция

- Иногда общий результат удается предугадать после рассмотрения не всех, а только нескольких случаев. Однако, без строгого доказательства такой результат остается только гипотезой.

Пример 1

- Выдвинем гипотезу, что сумма первых n нечетных чисел равна n^2.
- Рассмотрим на примерах:

  $1=1^2$; $1+3=4=2^2$; …; $1+3+5+7+9+11=36=6^2$
- Гипотеза подтвердилась, однако она останется гипотезой, пока не будет доказана.

Пример 2

- Рассмотрим последовательность $y_n = n^2 + \mathrm{n} + 17$.
- Выпишем первые четыре члена: $y_1 = 19$; $y_2 = 23$; $y_3 = 29$; $y_4 = 37$. Возникает гипотеза, что вся последовательность состоит из простых чисел. Однако это не так:

$у_{16} = 16^2 + 16 + 17 = 16(16+1) + 17 = 17(16+1) = 17 \times 17$. Это составное число.

- Итак, неполная индукция не считается в математике методом строгого доказательства, т.к. может привести к ошибке. Во многих случаях, когда доказательство найти трудно, обращаются к особому методу рассуждений, который называется *методом математической индукции.*

Составляющие метода математической индукции

- Пусть нужно доказать справедливость A(n), где n – любое натуральное число.
- Для этого сначала проверим справедливость A(n) для n=1 (*база математической индукции).*
- Затем предположим, что для любого натурального числа k справедливо A(k) (*индукционная гипотеза).*
- На основании того, что для натурального числа k справедливо A(k), доказываем справедливость A (k+1) (*индукционный переход).*
- Делаем вывод, что A(n) справедливо для любого n.

Вернемся к Примеру 1

- Доказать, что сумма первых n нечетных чисел равна n^2.
- 1) База: $n=1$, то $1=1^2$.
- 2) Гипотеза: пусть сумма $1+3+5+7+\ldots+(2k-1)$ равна k^2.
- 3) Докажем, что $1+3+5+7+\ldots+$
  $+(2k-1)+(2k+1)=(k+1)^2$

$1+3+5+7+\ldots+(2k-1)+(2k+1)=k^2+(2k+1)=$
$=(k+1)^2$

Доказательство завершино.

Пример 3.
$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2$ =n(n+1)(2n+1)/6

- Решение: 1. Пусть n=1, значит: 1=1(1+1)(2+1)/6=1 Из этого следует, что при n=1 утверждение правильно.
- 2. При допущении, что *n=k*, получается равенство: $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + k^2$ =*k(k+1)(2k+1)*/6.
- 3. При допущении, что n=k+1, получается: $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + (\mathrm{k}+1)^2$ =(k+1)(k+2)(2k+3)/6.
- Докажем: $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + (k+1)^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + k^2 + (k+1)^2$= *k(k+1)(2k+1)/6*+ $(k+1)^2$= *(k+1)(2*k^2*+k+6k+6)/6* =(k+1)(k+2)(2k+3)/6. Таким образом, справедливость равенства при *n=k+1* доказана, поэтому утверждение верно для любого натурального числа.

Пример 4.
$7^n - 1$ делится на **6** без остатка

- 1. Проверим для n=1: 7-1=6 делится на 6.
- 2. Предположим, что
  $7^k - 1$ делится на **6** без остатка.
- 3. Докажем, что
  $7^{k+1} - 1$ делится на **6** без остатка.
  $7^{k+1} - 1$=$7^{k+1} - 7^k + 7^k - 1 = 7^k$ ·(7-1)+$7^k - 1$= $7^k \cdot$ 6+($7^k - 1$), оба слагаемых делятся на 6 без остатка, значит и сумма делится на 6.

Задачи для самостоятельного решения:

- 1. Число $5\cdot 2^{3n-2}+3^{3n-1}$ кратно 19
- 2. Доказать, что $1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$
- 3. Доказать, что сумма n первых чисел натурального ряда равна $\frac{n(n+1)}{2}$.
- 4. Доказать, что $1\cdot 2+2\cdot 3+\ldots+(n-1)n=\frac{(n-1)n(n+1)}{3}$
- 5. Доказать, что сумма кубов трех последовательных натуральных чисел делится на 9

Задачи для самостоятельного решения:

- 6. Доказать, что $(11^{n+2}+12^{2n+1})$ делится на 133 без остатка.
- 7. Доказать, что $3^{3n-1}+2^{4n-3}$ при произвольном натуральном n делится на 11.
- 8. Доказать, что для любого натурального n значение выражения $4^n+15n-1$ кратно 9.
- 9. Докажите, что $1+x+x^2+x^3+\ldots+x^n =$

$$=(x^{n+1}-1)/(x-1)$$