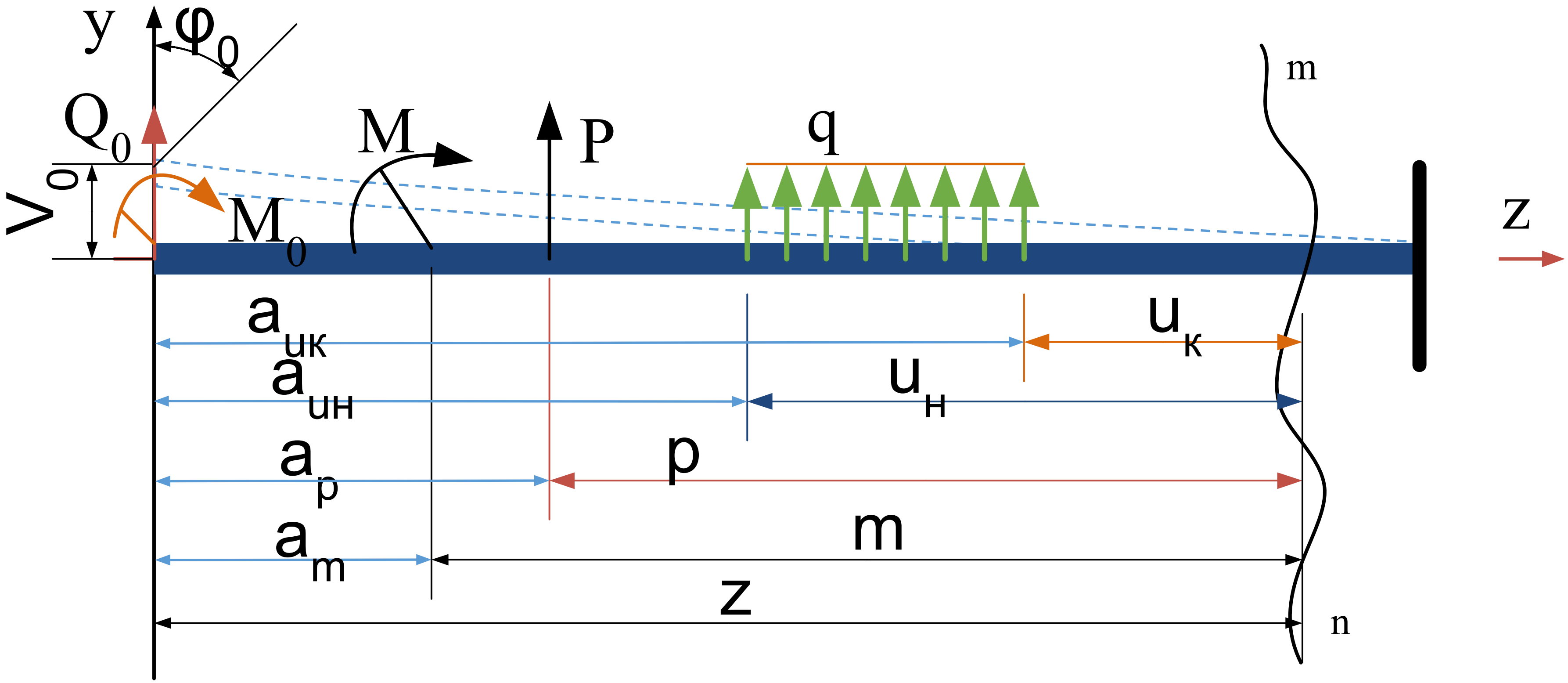
Уравнения для определения перемещений

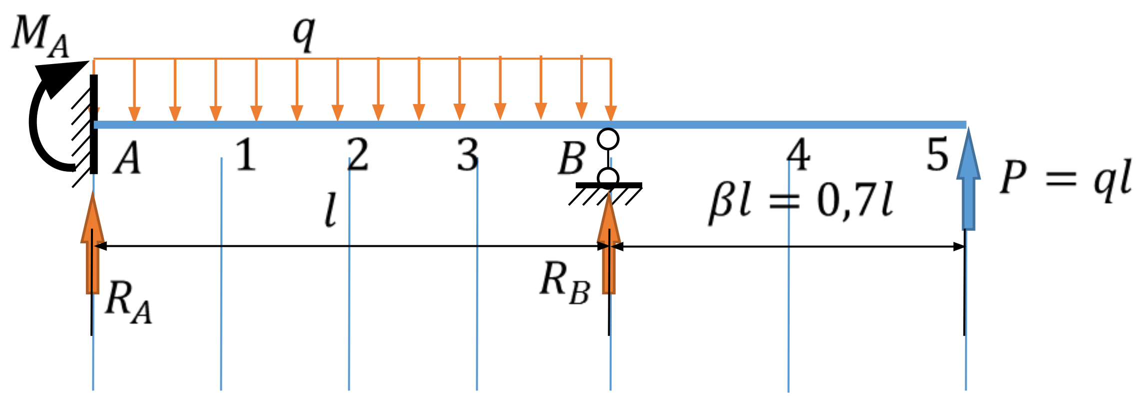
$$\mathrm{EIV_z = EIV_0 + EI\varphi_0 z + \frac{M_0 \cdot z^2}{2!} + \frac{Q_0 \cdot z^3}{3!} + \sum_1^n \frac{M \cdot m^2}{2!} + \sum_1^n \frac{P \cdot p^3}{3!} + \sum_1^n \frac{q}{4!}\left(u_H^4 - u_K^4\right);}$$

$$\mathrm{EI\varphi_z = EI\varphi_0 + M_0 z + \frac{Q_0 z^2}{2!} + \sum_1^n M \cdot m + \sum_1^n \frac{P \cdot p^2}{2!} + \sum_1^n \frac{q}{3!}\left(u_H^3 - u_K^3\right)}$$

- Начальные параметры V_0 и ϕ_0 определяются из кинематических условий (закрепление балки на опорах), M_0 и Q_0 из статических условий (реакции в опорных точках).



- Для балки требуется:
- 1)Найти изгибающий момент на левой опоре (в долях ql^2);
- 2)построить эпюры Q и M ;
- 3) построить эпюру прогибов, вычислив три ординаты в пролете и две на консоли.



1. Запишем уравнение статики для определения опорной реакции на правой опоре

$$\Sigma M_B = 0:$$

$$M_a + R_a \cdot l - \frac{ql^2}{2} - P \cdot 0.7l = 0$$
$$M_a + R_a \cdot l - 0.5ql^2 - 0{,}7ql^2 = 0$$
$$M_a + R_a \cdot l - 1.2ql^2 = 0 \ (1)$$

2. Запишем кинематические условия для опор.

$$z = 0: V_0 = V_a = 0; \varphi_0 = \varphi_a = 0; M_0 = M_a; Q_0 = R_A$$

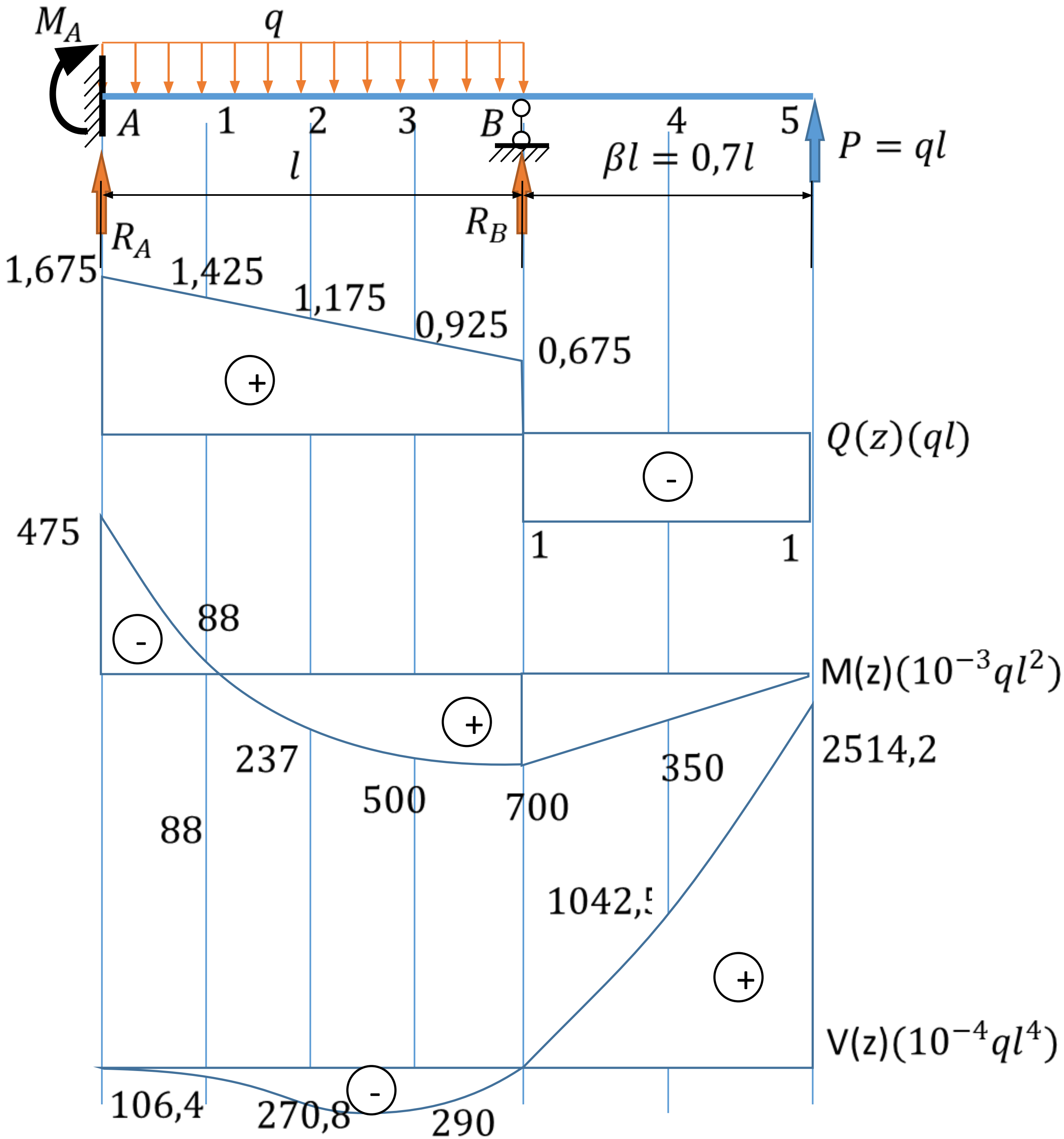
$$z = l: V_b = 0$$

$$EJV_b = M_a \cdot \frac{l^2}{2} + R_a \cdot \frac{l^3}{6} - q \cdot \frac{l^4}{24} = 0$$

- Домножим уравнение прогиба на 24 и получим
- $12M_a l^2 + 4R_a l^3 = ql^4$ *(2)*
- Решаем совместно уравнения (1) и (2)
- $\begin{cases} M_a + R_a \cdot l = 1.2ql^2 \\ 12M_a + 4R_a l = ql^2 \end{cases}$
- $M_a = -0.475ql^2; R_a = 1.675ql$
- $R_b = -R_a + ql - ql = -1.675ql$

- 1й участок: $0 \le z_i \le l$
- $Q_i = R_a - q \cdot z_i; M_i = M_a + R_a \cdot z_i - q \cdot \frac{z_i^2}{2}$
- $EIV_i = M_a \cdot \frac{z_i^2}{2} + R_a \cdot \frac{z_i^3}{6} - q \cdot \frac{z_i^4}{24};$
- 2й участок: $l \le z_i \le 1.7l$
- $Q_i = R_a + R_b - ql = -ql;$
- $M_i = M_a + R_a \cdot z_i + R_b \cdot (z_i - l) - ql \cdot \left(z_i - \frac{l}{2}\right) ==$
  $-0.475ql^2 + 1.675ql \cdot z_i - 1.675ql \cdot (z_i - l) - ql \cdot \left(z_i - \frac{l}{2}\right) =$
- $= 1.7ql^2 + ql \cdot z_i;$
- $EIV_i = M_a \cdot \frac{z_i^2}{2} + R_a \cdot \frac{z_i^3}{6} + R_b \cdot \frac{(z_i - l)^3}{6} - q \cdot \frac{z_i^4 - (z_i - l)^4}{24}$

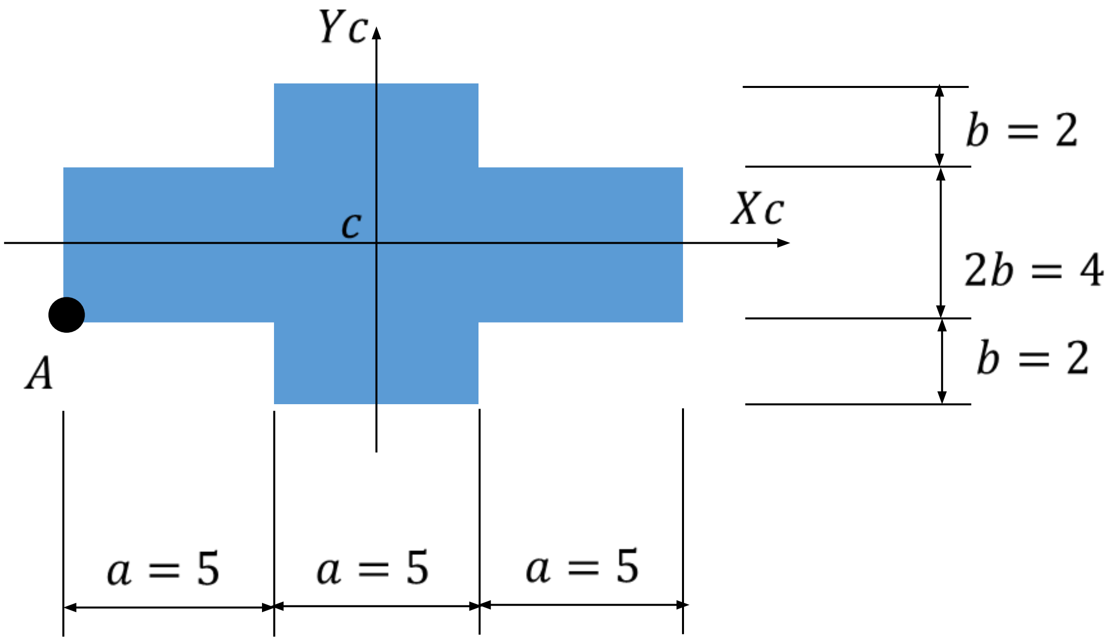
0	1,675	-475	0
0,25	1,425	-88	106,4
0,5	1,175	237	270,8
0,5	1,175	238	270,8
0,75	0,925	500	290
1	0,675	700	0,2
1	-1	700	0
1,35	-1	350	1042,7
1.7	-1	0	2514,2



M_A
q
A
1
2
3
B
4
5
$P = ql$
l
$\beta l = 0{,}7l$
R_A
R_B
1,675
1,425
1,175
0,925
0,675
+
$Q(z)(ql)$
-
1
1
475
88
-
+
$M(z)(10^{-3}ql^2)$
237
500
700
350
88
2514,2
1042,5
+
$V(z)(10^{-4}ql^4)$
106,4
270,8
-
290

- Чугунный короткий стержень, поперечное сечение которого изображено на рисунке, сжимается продольной силой Р, приложенной в точке А.
- Требуется:
- 1) вычислить наибольшее растягивающее и наибольшее сжимающее напряжения, выразив эти напряжения через Р и размеры поперечного сечения;
- 2) найти допускаемую нагрузку при заданных размерах поперечного сечения и допускаемых напряжениях для чугуна на сжатиеR_c и на растяжение R_p .

- Дано: a=5 см, b=2см, R_c=100 МПа, R_p=27 МПа.



1. Определим геометрические характеристики заданного сечения:

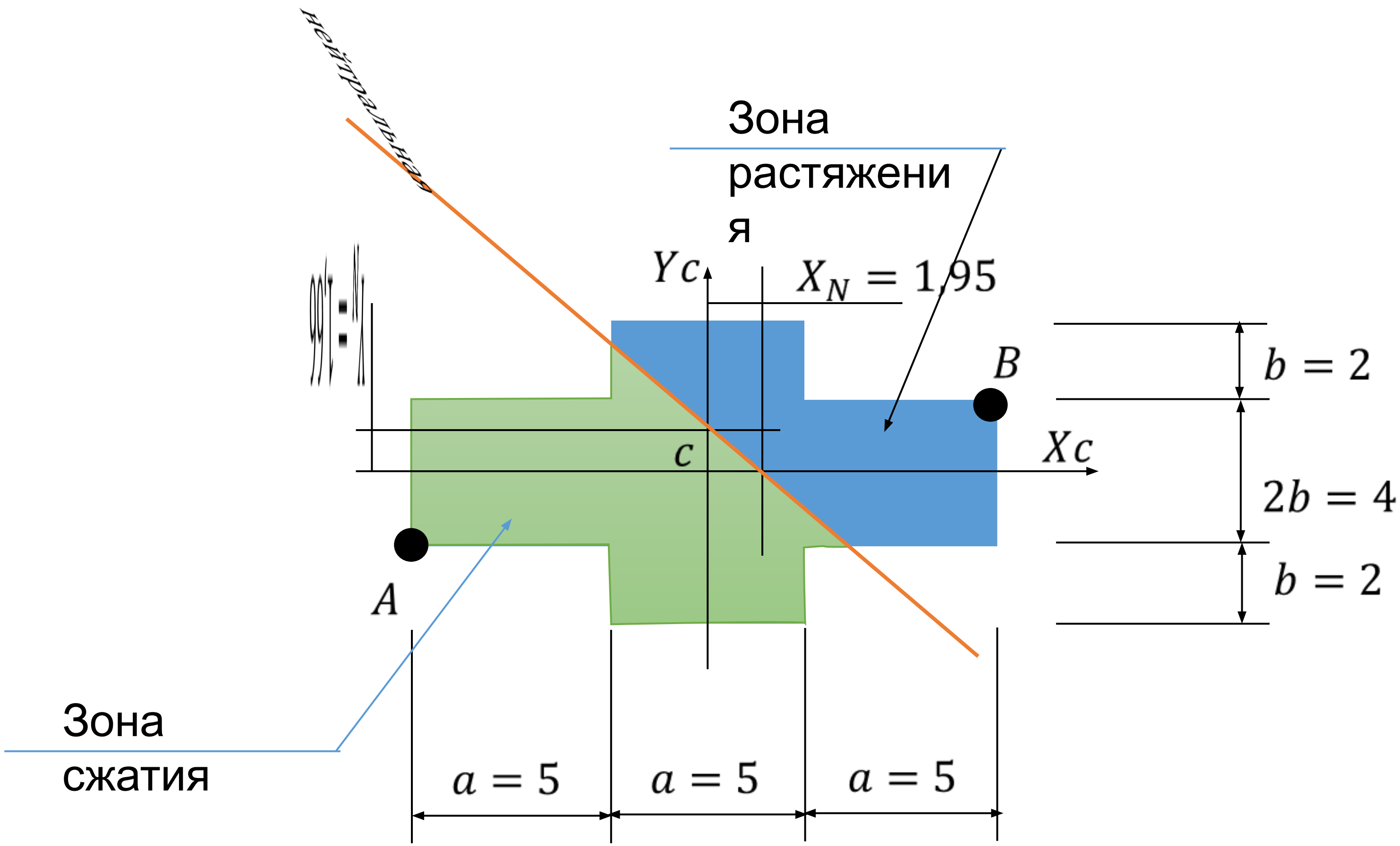
площадь сечения:

$$F = 3a \cdot 4b - 4 \cdot ab = 8ab = 8 \cdot 5 \cdot 2 = 80 \text{ см}^2$$

- Момент инерции сечения:
- $J_x = \frac{3a(4b)^3}{12} - 4 \cdot \left(\frac{a \cdot b^3}{12} + (1.5b)^2 ab\right) = 6.6667ab^3 =$ $= 6.6667 \cdot 5 \cdot 2^3 = 266.8\ (\text{см}^4)$
- $J_y = \frac{4b(3a)^3}{12} - 4 \cdot \left(\frac{ba^3}{12} + a^2 \cdot ab\right) = 4.6667ba^3 =$ $4.667 \cdot 5 \cdot 2^3 = 1167.5(\text{см}^4)$
- Квадраты радиусов инерции:
- $i_x^2 = \frac{J_x}{F} = \frac{6.6667ab^3}{8ab} = 0.8333b^2 = 0.8333 \cdot 2^2 =$ 3.335см^2;
- $i_y^2 = \frac{J_y}{F} = \frac{4.6667ba^3}{8ab} = 0.583333a^2 = 0.583333 \cdot$ $5^2 = 14.594\text{см}^2$.

-
- $\sigma_i = -\frac{P}{F}\left(1 + \frac{x_i \cdot x_p}{i_y^2} + \frac{y_i \cdot y_p}{i_x^2}\right)$
- $1 + \frac{x_i \cdot x_p}{i_y^2} + \frac{y_i \cdot y_p}{i_x^2} = 0$
- y_i=0: $x_N = -\frac{i_y^2}{x_p}$
- x_i=0: $y_N = -\frac{i_x^2}{y_p}$

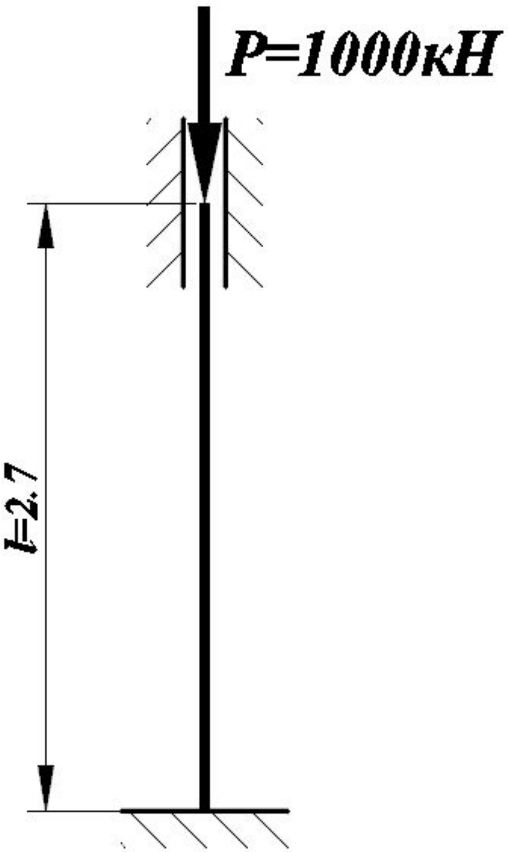
- Положение нейтральной линии: $x_p = -1.5a = -1.5 \cdot 5 = -7.5$ см; $y_p = -b = -2$см
- $x_N = -\frac{i_y^2}{x_p} = -\frac{0.58333a^2}{-1,5a} = 0.38999a = 0.38999 \cdot 5 = 1.9459$ см
- $y_N = -\frac{i_x^2}{y_p} = -\frac{0.8333b^2}{-b} = 0.8333b = 0.8333 \cdot 2 = 1.6675$ см
- Проведем нейтральную линию на рисунке.

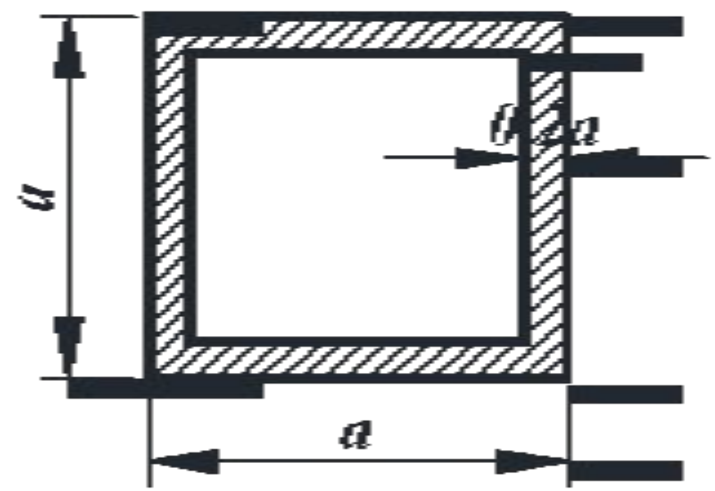

нейтральная
Зона растяжения
Yc
$X_N = 1,95$
B
$b = 2$
$2b = 4$
$b = 2$
Xc
c
A
Зона сжатия
$a = 5$
$a = 5$
$a = 5$

- Вычисление максимальных нормальных напряжений в поперечном сечении бруса.
- Напряжения определяются по формуле:
- $\sigma_i = -\frac{P}{F}(1 + \frac{x_i \cdot x_p}{i_y^2} + \frac{y_i \cdot y_p}{i_x^2})$
- Наибольшие сжимающие напряжения в точке ***A*** с координатами $x_A = x_p = -1.5a = -1.5 \cdot 2 = -3$см;
- $y_A = y_p = -b = -4$см
- $\sigma_A = -\frac{P}{F}\left(1 + \frac{x_A \cdot x_p}{i_y^2} + \frac{y_A \cdot y_p}{i_x^2}\right) =$
- $-\frac{P}{8ab}\left(1 + \frac{(-1.5a)^2}{0.58333a^2} + \frac{(-b)^2}{0.8333b^2}\right) = \frac{-0.75714P}{ab} = \frac{-0.75714P}{5 \cdot 2 \cdot 10^{-4}} =$
- $= -132.15P$
- *Сжимающая сила* $-132.15P = R_c = 100$ Мпа,
- $P = \frac{-100 \cdot 10^3}{132.15} = -756.715$кН

- Наибольшие растягивающие напряжения в точке ***B*** с координатами $x_B = 1.5a = 1.5 \cdot 5 = 7.5$см;
- $y_B = b = 2$см
- $\sigma_B = -\frac{P}{F}\left(1 + \frac{x_B \cdot x_p}{i_y^2} + \frac{y_B \cdot y_p}{i_x^2}\right) =$
- $= \frac{-P}{8ab}\left(1 + \frac{(1.5a)(-1.5a)}{0.8833a^2} + \frac{b \cdot (-b)}{1.5333b^2}\right) = \frac{0.05071428P}{ab} =$
- $= \frac{0.05071428P}{5 \cdot 2 \cdot 10^{-4}} =$
- $= 53.284P$
- Растягивающая сила $53.284 = R_p = 27$ МПа,
- $P = 297 \cdot 10^3 / 53.284 = 506.715$ кН.
- В качестве допускаемой принимаем наименьшее значение силы P=506.715 кН.1

- Для стального стержня длиной *l*, cсжимаемого силой *P*, требуется:
- 1) подобрать размеры поперечного сечения стержня из условия его устойчивости при допускаемом напряжении на сжатие R = 200 МПа;
- 2) найти величину критической силы и коэффициент запаса устойчивости.
- Дано: P=1000 кН, *l*=2.7 м





$\mu = 0.5$

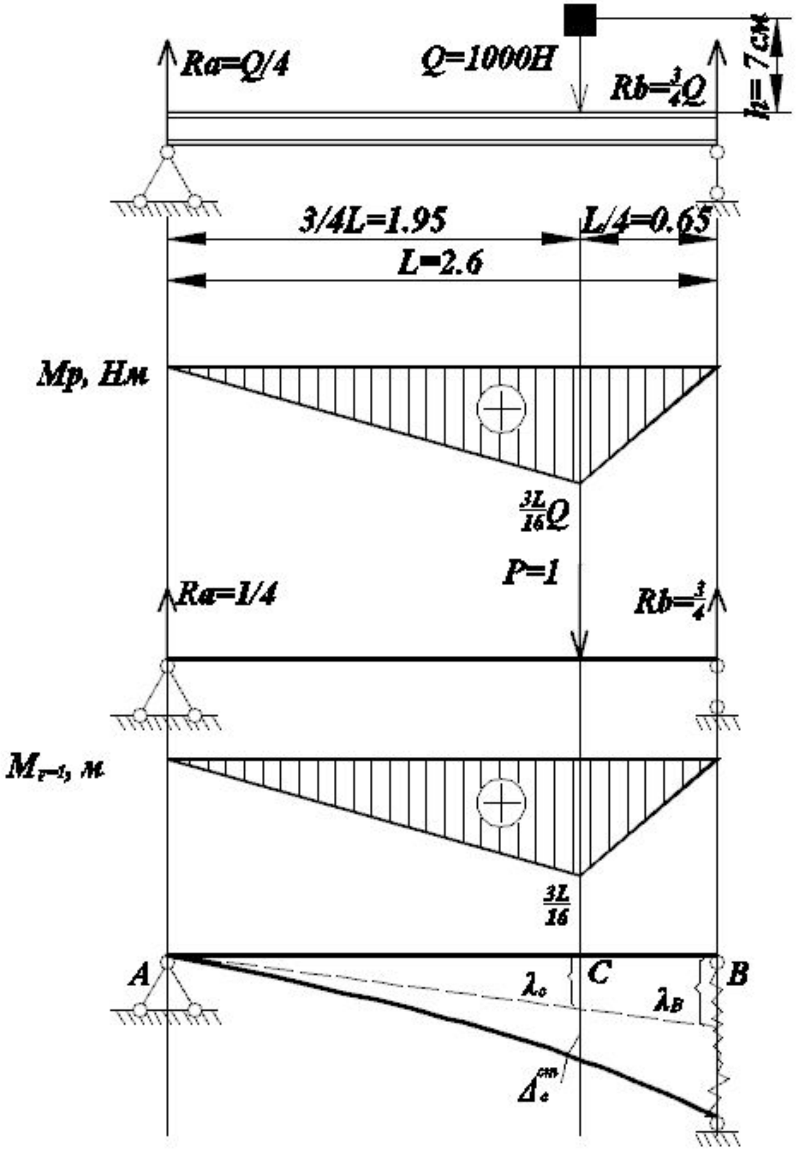
- **1. Определение геометрических характеристик сечения стержня через искомый размер сечения a:**
- площадь сечения $F = a^2 - (0.6\,a)^2 = 0.64a^2$
- размер а: $a = \sqrt{\frac{F}{0.64}}$
- Главные центральные моменты инерции:
- $J_x = J_y = \frac{a^4}{12} - \frac{0.6^4 a^4}{12} = 0.0725a^4$
- Минимальный момент инерции:
- $J_{min} = J_x = J_y = 0.0725a^4$
- Минимальный радиус инерции:
- $i_{min} = \sqrt{\frac{J_x}{F}} = \sqrt{\frac{0.0725}{0.64}}\ a = 0.3366a$
- Для заданного варианта закрепления выбирается коэффициент приведения длины μ= 0,5.
- Гибкость стержня: $\boldsymbol{\lambda = \frac{\mu l}{i_{min}}} = \frac{0.5 \cdot 270}{0.3366a} = 401.07/a$

- **2.Подбор поперечного сечения стержня.**
- Из условия устойчивости площадь поперечного сечения:
- $F \geq \frac{P}{\varphi R} = \frac{1000}{\varphi 200 \cdot 10^{-1}} = 50/\varphi$
- $a = \sqrt{\frac{F}{0.64}} = \sqrt{\frac{50}{\varphi 0.64}} = 8.838/\sqrt{\varphi}$
- $\lambda = \frac{\mu l}{i_{min}} = \frac{401.07}{a} = \frac{401.07}{8.838}\sqrt{\varphi} = 45.38\sqrt{\varphi}$

- Для первого приближения примем коэффициент продольного изгиба $\varphi_1 = 0.9$
- $\lambda_1 = 45.38\sqrt{\varphi_1} = 45.38\sqrt{0.9} = 42.96$
- $\varphi'_1 = 0.8928$
- Второе приближение: $\varphi_2 = \frac{1}{2} \cdot \left(\varphi_1 + \varphi'_1\right) = \frac{1}{2} \cdot (0.9 + 0.8928) = 0.8964$
- $\lambda_2 = 45.38\sqrt{\varphi_2} = 45.38\sqrt{0.8964} = 42.93; \varphi'_2 = 0.8931$
- Третье приближение: $\varphi_3 = 0.5(\varphi_2 + \varphi'_2) = 0.5(0.8964 + 0.8931) = 0.8948$
- $\lambda_3 = 45.38\sqrt{\varphi_3} = 45.38\sqrt{0.8948} = 42.91; \varphi'_3 = 0.8933$
- Четвертое приближение: $\varphi_4 = 0.5(\varphi_3 + \varphi'_3) = 0.5(0.8948 + 0.8933) = 0.894$
- $\lambda_4 = 45.38\sqrt{\varphi_4} = 45.38\sqrt{0.894} = 42.9; \varphi'_4 = 0.8934$

- $a = \frac{8.838}{\sqrt{\varphi}} = \frac{8.838}{\sqrt{0.8934}} = 9.352\text{см}$
- $F = 0.64a^2 = 0.64 \cdot 9.352^2 = 55.96 \text{ см}^2$
- $J_{min} = J_x = 0.0725a^4 = 0.0725 \cdot 9.352^4 = 554.5 \text{ см}^4$
- ***3. Проверка прочности***
- $\sigma = \frac{P}{\varphi F} = \frac{1000 \cdot 10^{-3}}{0.8934 \cdot 55.96} = 200 < R = 200 \text{ МПа}$
- *недонапряжение составит* $\Delta\sigma = \frac{\sigma - R}{R} \cdot 100\% = \frac{200-200}{200} \cdot 100\% = 0\%$
- *что допустимо.*
- ***4. Находим значение критической силы:***
- *Т.к.* $\lambda_4 = 42.9 < [\lambda] = 100$
- Критическую силу определим по формуле:
- $P_{\text{кр}} = R \cdot F = 200 \cdot 10^3 \cdot 55.96 \cdot 10^{-4} = 1119.2\text{кН}$
- ***5. Запас устойчивости сжатого стержня***
- $k_{\text{з}} = \frac{P_{\text{кр}}}{P} = \frac{1119.2}{1000} = 1.19$

- На двутавровую балку, свободнолежащую на двух жестких опорах, с высоты h падает груз Q. Требуется:
- 1) найти наибольшее нормальное напряжение в балке;
- 2) решить аналогичную задачу при условии, что правая опора заменена пружиной податливость которой равна α;
- 3) сравнить полученные результаты.



- Определим опорные реакции
- $R_b = \left(\frac{3}{4}\right) Q = \frac{3}{4} 1000 =$ 750Н
- $R_a = \frac{Q}{4} = \frac{1000}{4} =$ 250Н
- Строим эпюру Мр, $M_{max} = \frac{R_a 3l}{4} = \frac{3L}{16} Q =$
- $= 3 \cdot \frac{2.6}{16} \cdot 1000 = 487.5$ Н

- Наибольшее напряжение
- $\sigma_{max} = \frac{M_{max}}{W_x} = \frac{487.5}{184 \cdot 10^{-6}} = 2.65$ МПа
- Определим перемещение точки *C* по методу Верещагина
- $\Delta_{\text{ст}} = \frac{w_1 \cdot y_1 + w_2 \cdot y_2}{EJ} =$
- $= \frac{475.31 \cdot \frac{2}{3} \cdot 0.4875 + 158.4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 0.4875}{3.28 \cdot 10^6} =$
- $= \frac{205.9}{3.28 \cdot 10^6} = 62.79 \cdot 10^{-6}\ \text{м} = 0.06279\ c\text{м}$
- $w_1 = 1/2 \cdot 1.95 \cdot 487.5 = 475.31\ \text{Нм}^2$
- $w_2 = 487.5 \cdot \frac{0.65}{2} = 158.4 \text{Нм}^2$

- Коэффициент динамичности балки
- $\boldsymbol{k_{\text{д}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\Delta_{\text{с}}^{\text{ст}}}}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot 7}{0.06279}} = 15.97$
- Динамическое напряжение в балке
- $\sigma_{\text{д}} = k_{\text{д}} \cdot \sigma_{max} = 15.97 \cdot 2.65 = 42.3\text{МПа}$

- Определим перемещение точки С при замене опоры пружиной
- $\lambda_B = R_B \cdot \alpha = 750 \cdot 26 \cdot 10^{-3} \cdot \frac{10^2}{\cdot 10^3} = 1.95\text{см}$
- $\lambda_\text{С} = 0.75\lambda_B = 0.75 \cdot 1.95 = 1.4625 \text{ см};$
- $\Delta_\text{С} = \lambda_\text{С} + \Delta_\text{ст} = 1.4625 + 0.06279 = 1.5253 \ с\text{м}$
- Коэффициент динамичности балки с пружиной:
- $k_\text{д}^\text{пр} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\Delta_\text{с}}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2\cdot 7}{1.5253}} = 4.19$
- Динамические напряжения балки с пружиной $\sigma_\text{д}^\text{пр} = k_\text{д}^\text{пр} \cdot \sigma_{max} = 4.19 \cdot 2.65 = 11.1\text{МПа}$
- Сравним динамические напряжения
- $\frac{\sigma_\text{д}}{\sigma_\text{д}^\text{пр}} = \frac{42.3}{11.1} = 3.8$ раз больше без пружины.