Глава 5

Аналитические функции и конформные отображения

5.1 Аналитические функции

Определение 1. Функция $W = f(z)$ называется аналитической в т. z_0, если она дифференцируема в каждой точке некоторой окрестности т. z_0.

Замечание 1. Из определения следует, что функция, аналитическая в т. z_0 обязательно окажется аналитической в каждой точке некоторой окрестности т. z_0. Поэтому множество точек аналитичности функции - открытое множество.

Определение 2. Функция называется аналитичной на множестве D, если она аналитична в каждой точке этого множества.

Примеры.

1. Функция $W = z^2$ имеет производную в каждой точке $z \in C$, следовательно она аналитична на всей комплексной плоскости.

Определение 3. Функция, аналитичная на всей комплексной плоскости, называется целой.

2. Сумма f степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ аналитична в круге сходимости $K_R = |z - z_0| < R$.

Замечание 2. Дифференцируемость функции в точке и аналитичность – разные понятия. Если функция f аналитична в некоторой т. z_0, то она дифференцируема в этой точке. Обратное может быть не верным.

Пример. Функция $w = x^3 + 3x^2yi$ определена на C.

Проверим является ли она дифференцируемой.

Здесь $U(x,y) = x^3$, $V(x,y) = 3x^2y$

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 3x^2,\ \frac{\partial U}{\partial y} = 0,\ \frac{\partial V}{\partial x} = 6xy,\ \frac{\partial V}{\partial y} = 3x^2.$$

Частные производные непрерывны на С. Однако условия ДЭКР выполнимые при $6xy = 0$, те. при $x = 0 \vee y = 0$, т.е. на осях координат. Но в любой окрестности точки, лежащей на оси $0x$ или $0y$ найдется точка, в которой функция не является дифференцируемой. Итак, данная функция дифференцируема на осях координат, но не является аналитичной.

Замечание 3. Нередко используется понятие аналитической функции в т. $z=\infty$.

Определение 4. Функция $W=f(z)$, определенная в некоторой окрестности т. $z=\infty$ называется аналитической в т. $z=\infty$, если функция $g(\xi)=f\left(\frac{1}{\xi}\right)$ аналитична в т. $\xi=0$.

Пример

$f(z)=\frac{1}{z}$ определена в окрестности т. $z=\infty$. Рассмотрим функцию $g(\xi)=f\left(\frac{1}{\xi}\right)=\frac{1}{\frac{1}{\xi}}=\xi$. Эта функция аналитична в т. $\xi=0$. Следовательно, $f(z)=\frac{1}{z}$ аналитична в т. $z=\infty$.

Отметим некоторые свойства аналитических функций, вытекающие из определения аналитической функции и свойств дифференцируемых функций.

1. Если f_1 и f_2 – аналитические функции в области G, то их сумма, разность, произведение есть функции аналитические в области G. Частное $\frac{f_1}{f_2}$ является аналитической функцией всюду в G, где $f_2 \neq 0$.

2. Множество значений функции $w = f(z) \neq const$, аналитической в области G плоскости (z) является областью в плоскости (w).

3. Если $w = f(z)$ является аналитической в области D комплексной плоскости (z), причем в области ее значений E комплексной области (w) определена аналитическая функция $\xi = \varphi(w)$, то функция $\xi = \varphi(f(z))$ является аналитической функцией в области D.

4. Если $w = f(z)$ является аналитической в области D, причем $|f'(z)| \neq 0$, то в области ее значений E определена обратная функция $z = \varphi(w)$, являющаяся аналитической функцией в E. При этом, если $w_0 = f(z_0)$, то имеет место равенство $\varphi'(w_0) = \dfrac{1}{f'(z_0)}$.

Задание. Уметь обосновывать любое из указанных свойств.

5.2 Сопряженные гармонические функции

В дальнейшем мы убедимся, что функция, аналитическая в области G, имеет производную любого порядка.
В частности для аналитической функции f ее действительная и мнимая части имеют непрерывные частные производные второго порядка в области G. Каждая из производных аналитической функции является аналитической функцией и тем самым непрерывной в G.

Пользуясь тем, что $f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}-i\frac{\partial u}{\partial y}$, найдем $f''(z)$ двумя способами:

$$f''(z)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)+i\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+i\frac{\partial^2 v}{\partial x^2};$$

$$f''(z)=\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial u}{\partial y}\right)-i\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)=-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-i\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$$

Отсюда $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\ldots?-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\ldots?-\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$

Поставьте вместо точек необходимый знак!

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{-\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{-\partial^2 v}{\partial y^2} \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0.$$

Уравнение такого вида носит название уравнение Лапласа.

Определение 1. Функции, обладающие в некоторой области непрерывными частными производными второго порядка, удовлетворяющими уравнению Лапласа, называются гармоническими функциями. Какое утверждение можно сделать относительно действительной и мнимой частей аналитической функции $w = f(z)$?

Действительная и мнимая части аналитической функции являются гармоническими функциями.

Если же $\varphi(x, y)$ и $\psi(x, y)$ – произвольные гармонические функции в области G, то функция $F(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$ не обязательно будет аналитической в G.

Определение 2. Две гармонические функции $\varphi(x, y)$ и $\psi(x, y)$, удовлетворяющие условиям ДЭКРа называются сопряженными гармоническими функциями.

Итак, действительная и мнимая части аналитической функции в области G являются сопряженными гармоническими функциями.

Покажем, как по одной из сопряженных гармонических функций можно найти другую с точностью до постоянного слагаемого и тем самым найти аналитическую функцию, если известна ее действительная или мнимая часть.

Пусть $\varphi(x, y)$ – функция гармоническая в области G.

Покажем как найти аналитическую функцию

$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, действительная часть которой

$u(x, y) = \varphi(x, y)$.

Для отыскания мнимой части имеем два уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = Q(x, y) \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{-\partial u}{\partial y} = P(x, y).$$

Функции $P(x, y) = \frac{-\partial u}{\partial y}$ и $Q(x, y) = \frac{\partial u}{\partial x}$ непрерывны в G и обладают в G непрерывными частными производными

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{-\partial \varphi}{\partial y}\right) = \frac{-\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

В силу чего?

В силу уравнения Лапласа (гармоническая функция φ удовлетворяет уравнению Лапласа).

Поэтому $\int\limits_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} \left(P(x, y)dx + Q(x, y)dy\right)$ не зависит от пути интегрирования, соединяющего т. (x_0, y_0) и т. (x, y) в области G, следовательно представляет функцию от переменных x, y.

Положим $\psi(x, y) = \int\limits_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} \left(P(x, y)dx + Q(x, y)dy\right)$.

Тогда $\psi(x, y)$ имеет те же частные производные, что и искомая функция $v(x, y)$. Действительно

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} = P(x, y) = \frac{\partial v}{\partial x}.$$

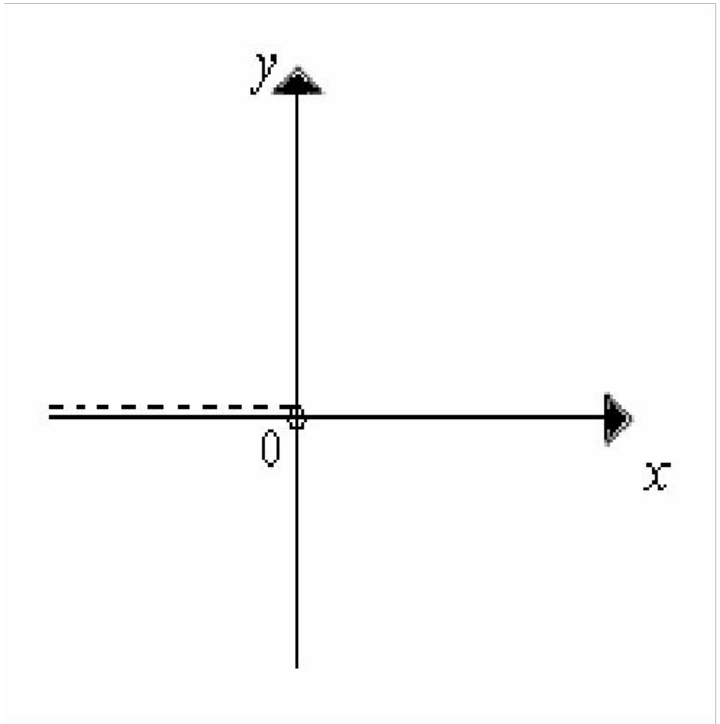
$$\frac{\partial\psi}{\partial y} = Q(x, y) = \frac{\partial v}{\partial y}.$$

Поэтому $v(x, y)$ может отличаться от $\psi(x, y)$ на постоянное слагаемое c:

$$v(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} (P\,dx + Q\,dy) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} \left(\frac{-\partial\varphi}{\partial y} dx + \frac{\partial\varphi}{\partial x} dy \right) + C$$

Вычисляя $v(x, y)$ по этой формуле, имеем две дифференцируемые функциии $u(x, y) = \varphi(x, y)$, $v(x, y) = \psi(x, y) + C$, связанные условиями ДЭКР. Отсюда следует, что $f(z) = u(x, y) + iv(x, y) = u(x, y) + i(\psi(x, y) + C)$ – аналитическая функция в D.

Замечание. По мнимой части аналитической функции можно восстановить ее действительную часть с точностью до действительного постоянного слагаемого.



Пример. Пусть область G получается из комплексной области исключением полуоси .$y=0,\ x\le 0$. Легко проверить, что функция $v(x,y)=2e^{x}\cos y+2x-3y$ гармоническая в G. Действительно,

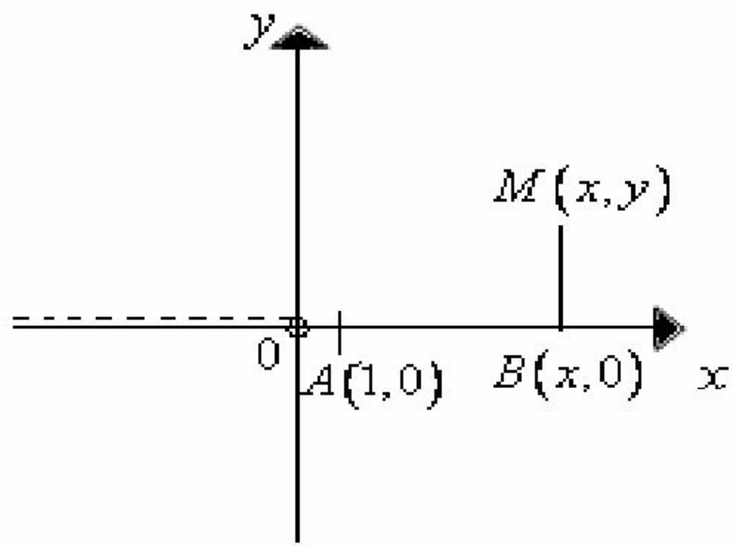
$$\frac{\partial v}{\partial x}=2e^{x}\cos y+2;\ \frac{\partial v}{\partial y}=-2e^{x}\sin y-3;$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}=2e^{x}\cos y;\ \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=-2e^{x}\cos y;$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=2e^{x}\cos y+\left(-2e^{x}\cos y\right)=0;$$

Функция $u(x, y)$ сопряженная с $v(x, y)$, удовлетворяет условиям ДЭКР:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = -2e^{x}\sin y - 3; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{-\partial v}{\partial x} = -2e^{x}\cos y - 2.$$



$[AB]: y = 0, dy = 0$

$[BM]: x = const, dx = 0$

Тогда

$$u(x,y)=\int\limits_{(1,0)}^{(x,y)}\left(-2e^{x}\sin y-3\right)dx+\left(-2e^{x}\cos y-2\right)dy+C$$

$$u(x,y)=-\int\limits_{1}^{x}3\,dx+\int\limits_{0}^{y}\left(-2e^{x}\cos y-2\right)dy+C$$

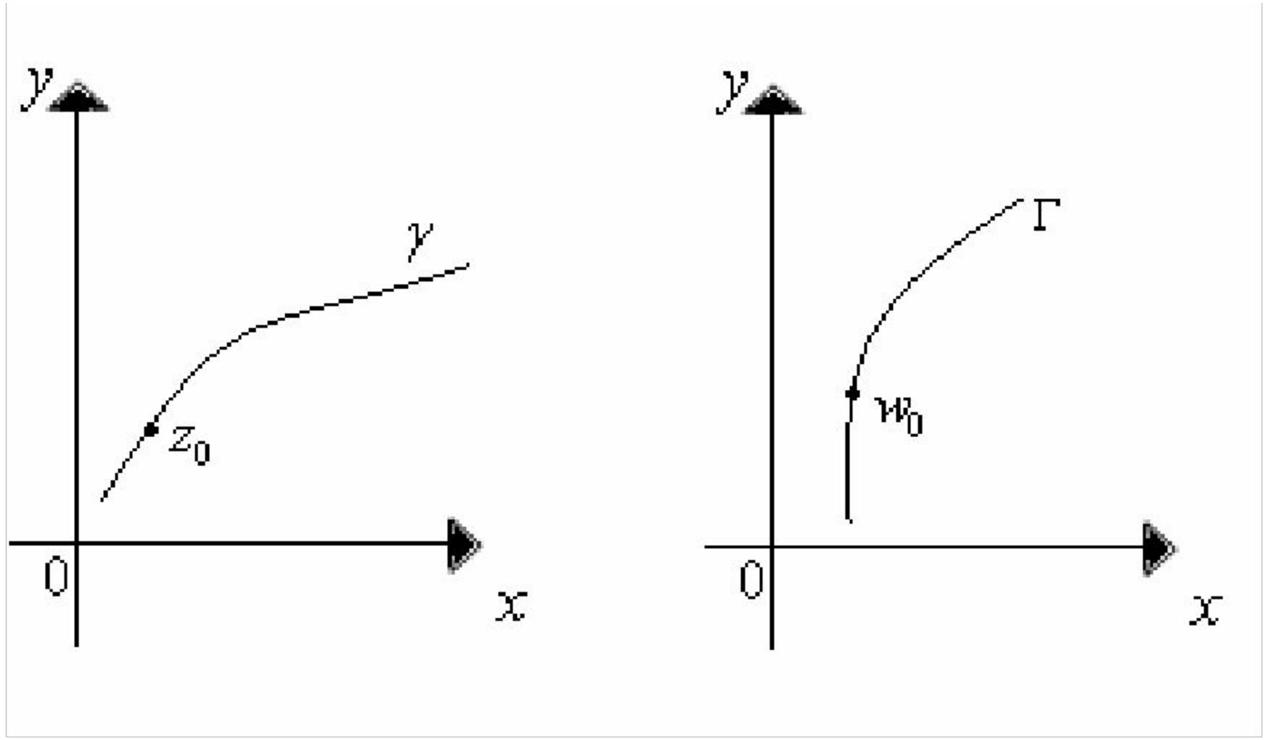
$$u(x,y)=-3x\Big|_{1}^{x}-2e^{x}\sin y\Big|_{0}^{y}-2y\Big|_{0}^{y}+C$$

$$u(x,y)=-3x-2e^{y}\sin y-2y+C$$

5.3 Геометрический смысл аргумента и модуля производной

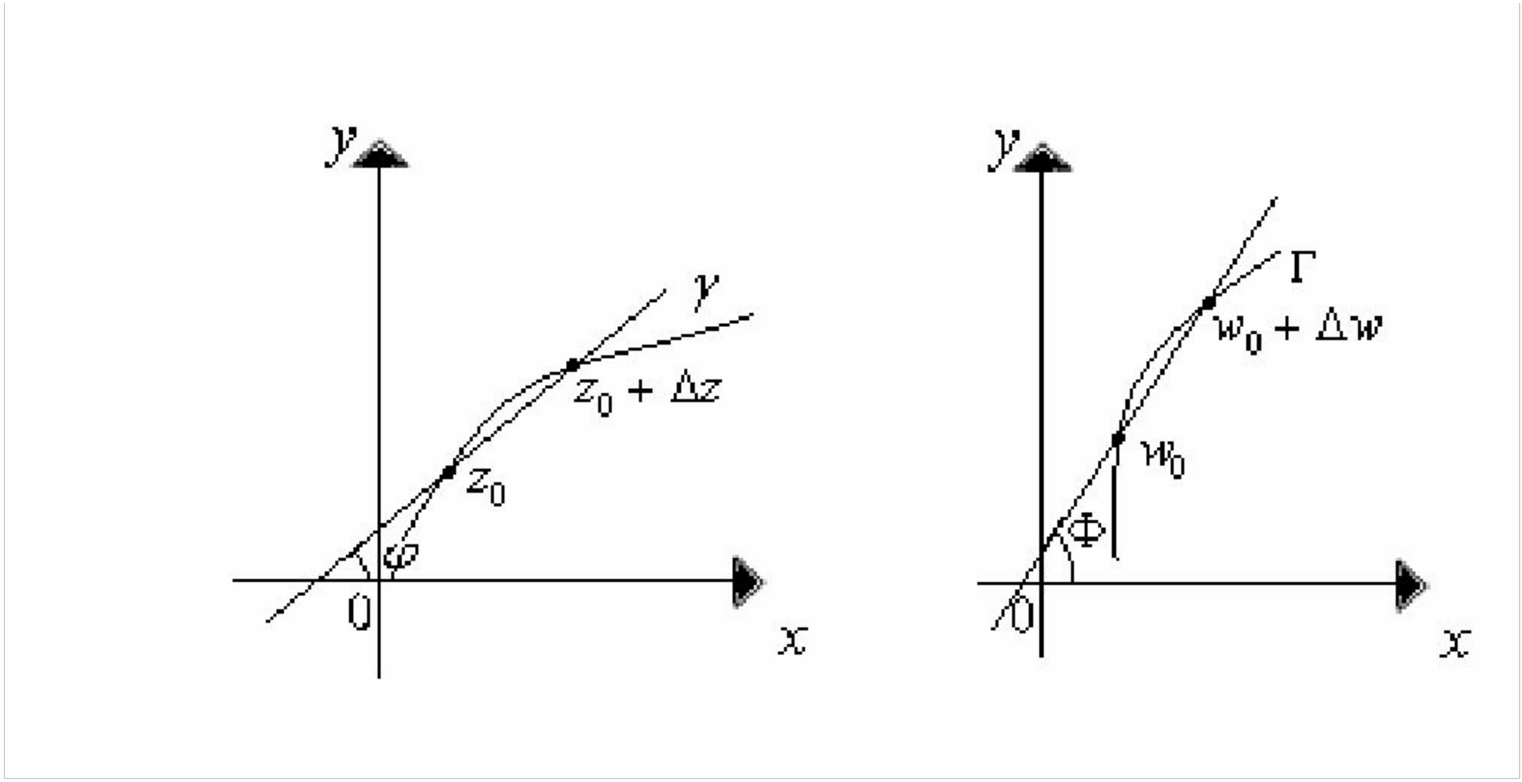
Пусть $w = f(z)$ – аналитическая функция в области G комплексной плоскости (z). Значения функции f будем изображать в плоскости (w). Каждой т. $z = x + iy \in G$ будем ставить в соответствие единственную точку $w = u + iv$ в плоскости (w).

Пусть z_0 – произвольная точка области $G \subset (z)$ и γ – проходящая через т. z_0 кривая, заданная со своим направлением и имеющая определенную касательную в т. z_0. Предположим, что $f'(z_0) \neq 0$. В плоскости (w) образом кривой γ будет кривая Г, проходящая через т. $w_0 = f(z_0)$.



Чтобы выяснить геометрический смысл производной $f'(z_0)$ представим $f'(z_0)$ в показательной форме:

$$f'(z_0) = \left| f'(z_0) \right| e^{Arg f'(z_0)}.$$



Возьмем произвольную т. $z_0+\Delta z$ на линии γ и обозначим образ этой точки $f\left(z_0+\Delta z\right)=w_0+\Delta w$. Эта точка лежит на линии Г. При стремлении т. $z_0+\Delta z$ к z_0 по линии γ соответствующая ей т. $w_0+\Delta w$ движется по линии Г к т. w_0, причем Δz и Δw стремятся к нулю одновременно.

Из равенства $f'(z_0) = \lim\limits_{\Delta z \to 0} \left(\dfrac{\Delta w}{\Delta z} \right) = k e^{i\alpha}$ находим

$(1)\ \lim\limits_{\Delta z \to 0} \left| \left(\dfrac{\Delta w}{\Delta z} \right) \right| = k,\ (2)\ \lim\limits_{\Delta z \to 0} Arg \dfrac{\Delta w}{\Delta z} = \alpha$

(с точностью до кратных 2π).

Сюда также входит требование: $f'(z_0) \neq 0$, т.к. в противном случае α не имел бы определенного значения

Рассмотрим равенство (2). Так как $Arg\dfrac{\Delta w}{\Delta z} = Arg\,\Delta w - Arg\,\Delta z$, то равенство (2) примет вид $\lim\limits_{\Delta z \to 0} Arg\,\Delta w - \lim\limits_{\Delta z \to 0} Arg\,\Delta z = \alpha\,(\mathbf{3})$.

Выясним геометрический смысл равенства (3), очевидно $\Delta z = (z_0 + \Delta z) - z_0$ изображается вектором соединяющим т. z_0 u $z_0 + \Delta z$. Так же Δw – есть вектор, соединяющий точки w_0 и $w_0 + \Delta w$.

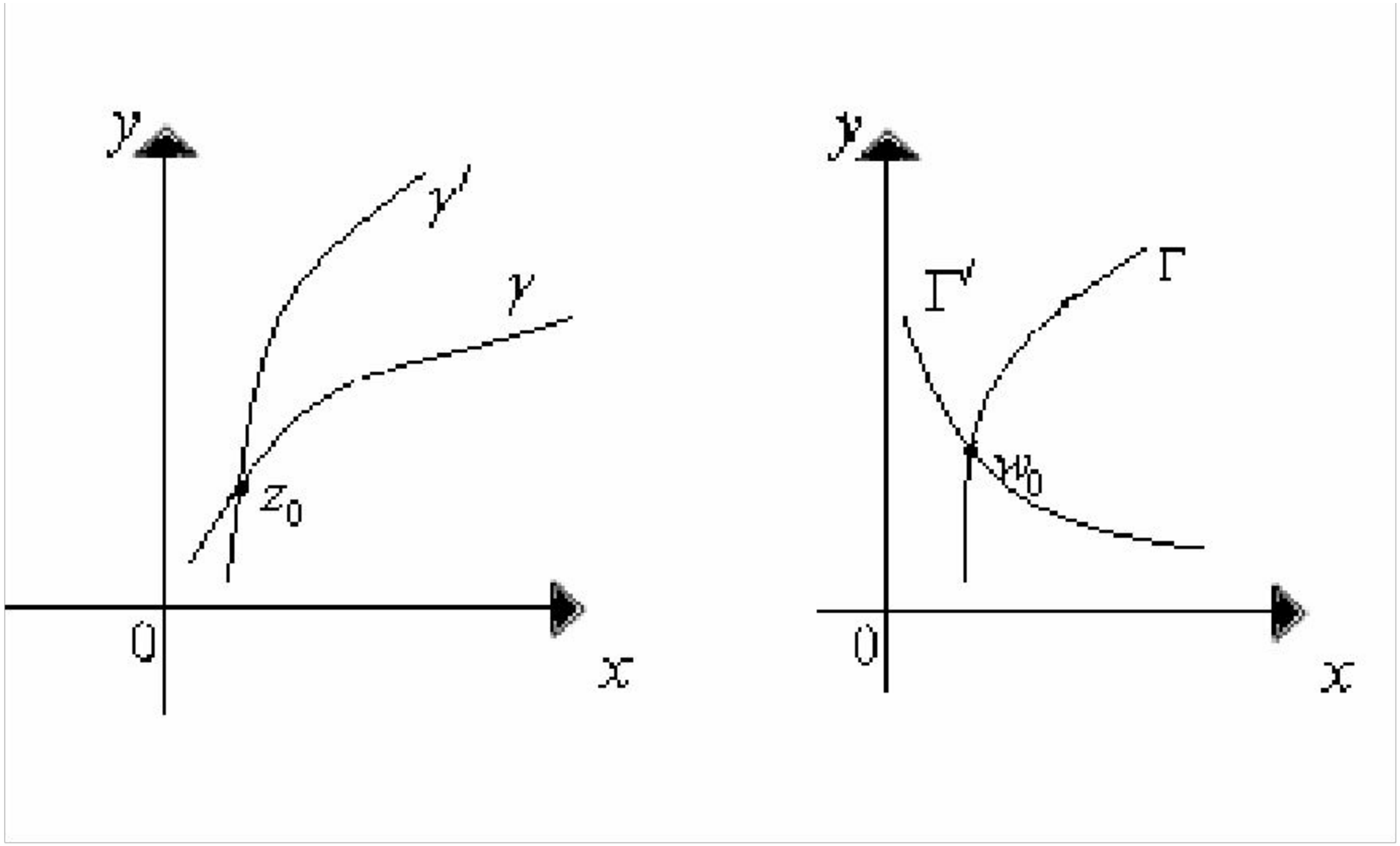
Следовательно $Arg\,\Delta z$ есть угол φ между положительным направлением Ox и вектором Δz, а $Arg\,\Delta w$ – угол Φ между положительным направлением оси Ou и вектором Δw. Таким образом, равенство (3) будет иметь вид $\lim\limits_{\Delta z \to 0} \Phi - \lim\limits_{\Delta z \to 0} \varphi = \alpha \ (4)$.

Что представляют собой $\lim\limits_{\Delta z \to 0} \Phi$ и $\lim\limits_{\Delta z \to 0} \varphi$?

В пределе направление вектора Δz совпадает с направлением касательной к линии γ в т. z_0, а направление Δw – с направлением касательной к линии в т. w_0, которая существует?! Обозначая через ψ и Ψ углы, образованные касательными к линиям γ и Γ соответственно в точках z_0 и w_0 с осями Ox и Ou перепишем (4) в виде: $\Psi - \psi = \alpha$ или $\Psi = \psi + \alpha.$ (5)

Определение: Будем считать положительные направления осей Ox и Ou совпадающими между собой. Угол Ψ-ψ называется углом поворота касательной к кривой γ в т. z_0 при отображении f.

Таким образом, α – угол поворота касательной к линии γ в т. z_0 при отображении f или иначе α – угол между первоначальным и отображенным направлениями.



Пусть теперь через т. z_0 проходит еще линия γ' и ее образом при отображении f является Γ', проходящая через т. w_0.

Повторяя проведенные рассуждения, получаем $(6)\ \Psi' - \psi' = \alpha$,

где ψ' и Ψ' есть предельные значения φ' и Φ' для линий γ' и Γ'.

Из равенств $(5)\ \Psi-\psi=\alpha$ и $(6)\ \Psi'-\psi'=\alpha$ получим

$(7)\ \Psi'-\psi'=\Psi-\psi$ или $\Psi'-\Psi=\psi'-\psi$.

Заметив, что $\psi'-\psi$ и $\Psi'-\Psi$ – соответственно углы между касательными к линиям γ и γ' в т. z_0 и Γ и Γ' в т. w_0, усматриваем из равенства (7) следующее:...?...

две произвольные линии, выходящие из т. z_0, отображаются в две соответствующие линии, выходящие из т. $w_0 = f(z_0)$, так что угол между касательными к данным линиям и их образами будет один и тот же как по величине, так и по направлению.

Это означает,что если положительное направление линии γ в т. z_0 переходит в положительное направление линии $\gamma^/$ путем поворота на некоторый уголв определенном направлении, то соответствующее направление линии Г переходит в направление $Г^/$ путем поворота на тот же угол и в том же направлении.

Итак, отображение с помощью аналитической функции обладает свойством сохранения (консерватизма) углов в тех точках, где производная $f'(z) \neq 0$.

Выясним теперь геометрический смысл модуля производной.

Равенство (1) может быть переписано так $\lim\limits_{\Delta z \to 0} \dfrac{|\Delta w|}{|\Delta z|} = k \ (8)$.

Геометрически $|\Delta z|$ означает длину вектора Δz, т.е. расстояние между точками z_0 и $z_0 + \Delta z$ аналогично $|\Delta w|$ – расстояние между точками w_0 и $w_0 + \Delta w$. Что показывает равенство (8)?

Равенство (8) показывает, что отношение бесконечно малого расстояния между отображенными точками к бесконечно малому расстоянию между первоначальными точками, равное в пределе $k = \left| f'(z_0) \right|$ не зависит от направления линии γ.

Из этого ясно, что $k = \left| f'(z_0) \right|$ можно рассматривать как величину масштаба в т. z_0 при отображении посредством функции $w = f(z)$.

Если $k > 1$ расстояние увеличивается, т.е. происходит растяжение; если $k < 1$,то наоборот происходит сжатие при $k = 1$ расстояние остается неизменным, т.е. бесконечно малый элемент, выходящий из т. z_0, заменяется эквивалентным ему бесконечно-малым элементом, выходящим из т. w_0.

Итак, модуль производной $\left|f'(z_0)\right|$ можно рассматривать как коэффициент растяжения в т. z_0 при отображении посредством функции $w = f(z)$.

Пример. Функция $w = 1 + i2z$ имеет производную $w' = 2i$ и является аналитической во всей плоскости (z), $w' \neq 0$ во всей плоскости. Модуль производной $|w'| = |2i| = 2$. Отображение производит растяжение в каждой точке плоскости с коэффициентом 2.

$\arg w' = \arg 2i = \frac{\pi}{2}$. Следовательно в каждойточке происходит вращение на угол $\frac{\pi}{2}$.

5.4. Конформные отображения

Определение 1. Отображение, которое в т. z_0 сохраняет углы и обладает постоянством растяжений, называется конформным в т. z_0.

Определение 2. Отображение называется конформным в области, если оно конформно в каждой точке области.

Замечание. Из полученных результатов в пункте 5.3. вытекает, что отображение, осуществляемое с помощью аналитической функции $w = f(z)$ в точке z_0, где $f'(z_0) \neq 0$ обладает свойствами сохранения углов и постоянством растяжений, следовательно оно является конформным.

Примеры.

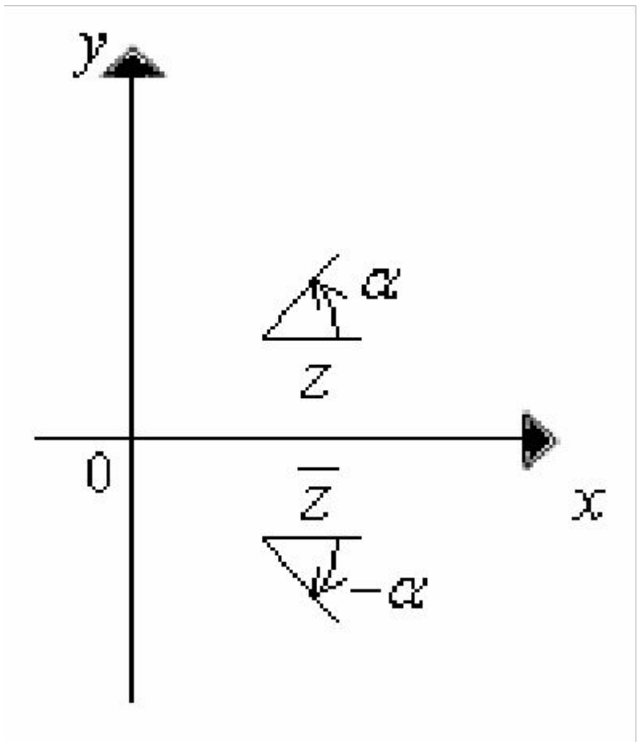
1) $w = 2z^2 - 4z + 1$ конформно в т. $z_0 = \dfrac{1-i}{2}$.

2) $w = 1 + i2z$ конформно на всей плоскости.

Как было доказано, свойство сохранения углов означает, что сохраняется не только абсолютная величина углов между кривыми, пересекающимися в т. z_0, но и их направления.

Определение 3. Отображения, при которых сохраняются абсолютные величины углов между кривыми и их образами, но направления углов меняются на противоположные, называются конформными отображениями II рода.

Рассмотренные ранее отображения, называются отображениями I рода.



Пример. Пусть дано отображение $w=\bar{z}$. Будем изображать переменную w в той же плоскости, что и $\bar{z}$. Видим, что при рассматриваемом отображении всякая т. z переходит в т. $\bar{z}$, симметричную т. z относительно действительной оси. Ясно, что при таком отображении всякие два направления, выходящие из т. z и образующие между собой угол α перейдут в два соответствующих направления, симметричные с первыми, угол между которыми $-\alpha$.

Таким образом, величина углов сохраняется, направление отсчета меняется как обратное. Далее это отображение обладает свойством постоянства растяжений, т.к. при нем не происходит изменение масштаба $\left(|\bar{z}| = |z|\right)$. Следовательно, рассматриваемое отображение есть конформное отображение II рода.

Если $w = f(z)$ – аналитическая в области G и в этой области $f'(z) \neq 0$, то отображение, осуществляемое ею есть конформное I рода.

Предположим, что $w = f(z)$ аналитична в области G, и в этой области $f'(z) \neq 0$. Покажем, что отображение $\xi = \overline{f(z)}$ является конформным II рода.

В самом деле, это отображение может быть рассмотрено как композиция двух отображений $w = f(z)$ и $\xi = \overline{w}$.

При первом углы сохраняются как по величине, так и по направлению, при втором направление отсчета углов меняется на противоположное. Кроме того, данное отображение обладает свойством постоянства растяжений, т.к. это свойство присуще обоим составляющим отображениям.

Итак, всякое отображение, устанавливаемое при помощи функции, значения которой являются сопряженными со значениями аналитической функции, есть конформное отображение 2-го рода.

Обратно, пусть конформное отображение II рода осуществляется при помощи функции $w = F(z)$. Тогда $F(z)$ является комплексно сопряженной аналитической функции $\overline{F(z)}$.

Доказать самостоятельно.

5.5 Однолистные функции. Области однолистности аналитической функции.

Определение. Функция $w = f(z)$ называется однолистной в области G, если в различных точках этой области она принимает различные значения.

Замечание. Из этого определения следует, что всякая однолистная функция имеет обратную.

Примеры.

1) $w = az + b$ однолистна на всей плоскости C. Пусть $z_1 \neq z_2 \Rightarrow$
$\Rightarrow w_2 - w_1 = (az_2 + b) - (az_1 + b) = a(z_2 - z_1) \neq 0$, т.е. $w_1 \neq w_2$.

2) $w = \dfrac{1}{z}$ определена на $D = C - \{0\}$ и однолистна.

Пусть $z_1 \neq z_2$, $w_2 - w_1 = \dfrac{1}{z_2} - \dfrac{1}{z_1} = \dfrac{z_1 - z_2}{z_1 * z_2} \neq 0$, т.е. $w_1 \neq w_2$.

3) $w = e^z$, область определения $D = \mathbf{C}$.

Если $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$, mo $\left|e^{z_1}\right| = e^{x_1}$, $\left|e^{z_2}\right| = e^{x_2}$.

Положим теперь $x_1 = x_2 = x$ и $y_1 \neq y_2$.

Тогда $e^{z_1} - e^{z_2} = e^x\left(e^{y_1} - e^{y_2}\right) = e^x\left(\left(\cos y_1 + i\sin y_1\right) - \left(\cos y_2 + i\sin y_2\right)\right) =$

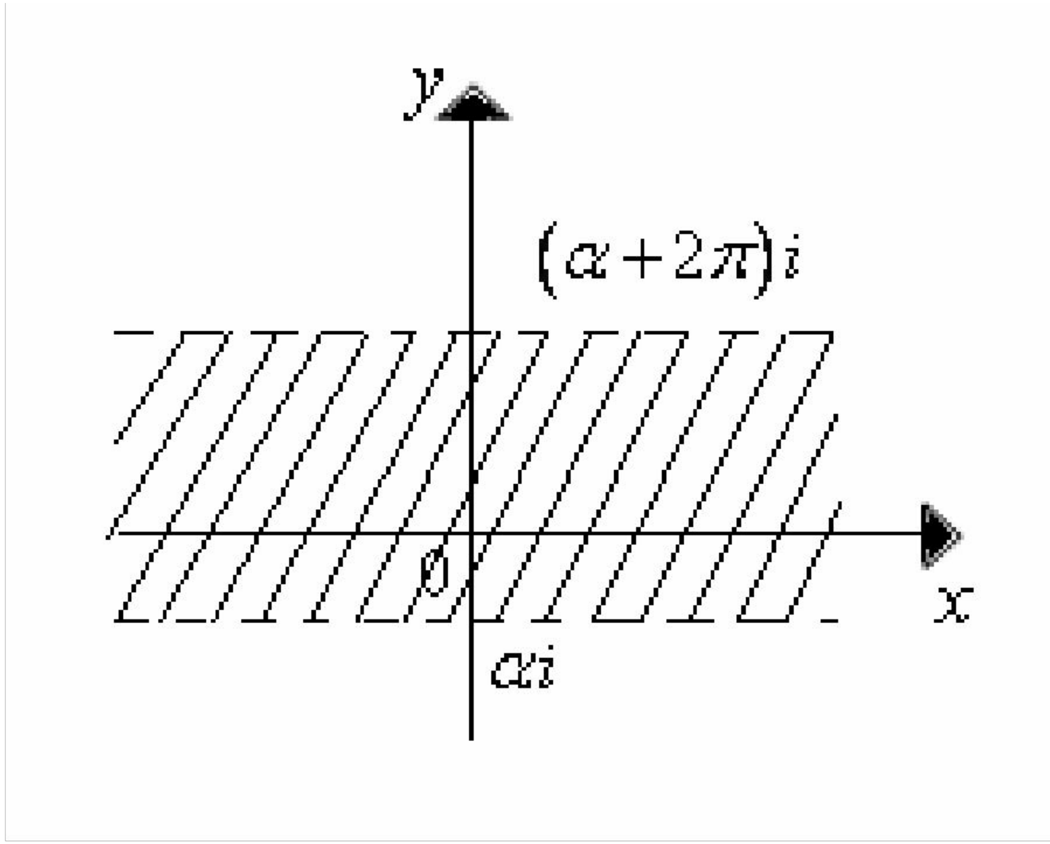
$$= e^x\left(-2\sin\frac{y_1 + y_2}{2}\sin\frac{y_1 - y_2}{2} + 2i\cos\frac{y_1 + y_2}{2}\sin\frac{y_1 - y_2}{2}\right) =$$

$$= 2ie^x\sin\frac{y_1 - y_2}{2}\left(\cos\frac{y_1 + y_2}{2} + i\sin\frac{y_1 + y_2}{2}\right) = 2ie^x\sin\frac{y_1 - y_2}{2}e^{i\frac{y_1 + y_2}{2}}.$$

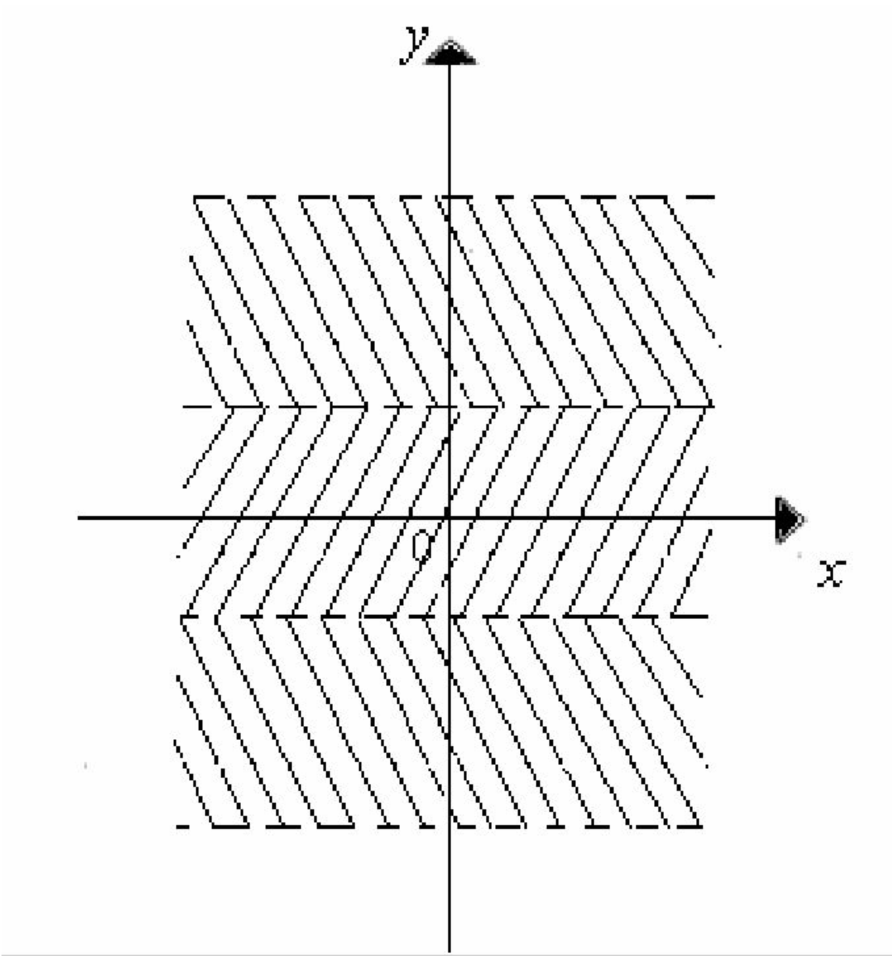
Это выражение обращается в нуль только в тех точках, где $\sin\frac{y_1 - y_2}{2} = 0$, т.е. при $y_1 - y_2 = 2\pi K$, $K \in Z$.

Итак, эта функция не является однолистной, однако для нее можно указать так называемую область однолистности, те. такую область, в различных точках которой функция принимает различные значения.

Мы показали, что $e^{z_1} = e^{z_2}$ тогда и только тогда, когда $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2 + 2\pi K$, $K \in Z$. Поэтому, если выберем область в виде полосы шириной 2π со сторонами параллельными действительной оси, то внутри нее в двух различных точках $z_1 \neq z_2$ функция $w = e^z$ будет принимать различные значения.



В заштрихованной области $w = e^z$ однолистна.



Любая полоса шириной 2π со сторонами параллельными действительной оси является областью однолистности функции $w = e^z$. И в каждой такой области для функции $w = e^z$ существует обратная функция.

Задание. Докажите, что функция $w = z^n$ не является однолистной и покажите, что область однолистности для нее есть угол с вершиной в начале координат раствором $\frac{2\pi}{n}$.