

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Ижевский государственный технический университет
имени М. Т. Калашникова»



Кафедра «Программное обеспечение»

Курс «Дискретная математика»
Элементы теории графов

Автор Макарова О.Л.

- История возникновения
- Терминология
- Виды графов
- Изоморфизм
- Машинное представление графов
- Связность
- Деревья
- Планарность
- Раскраска графа

Теория графов

англ. theory graph

нем. Graphentheorie

греч. γράφω - пишу

Теория графов:

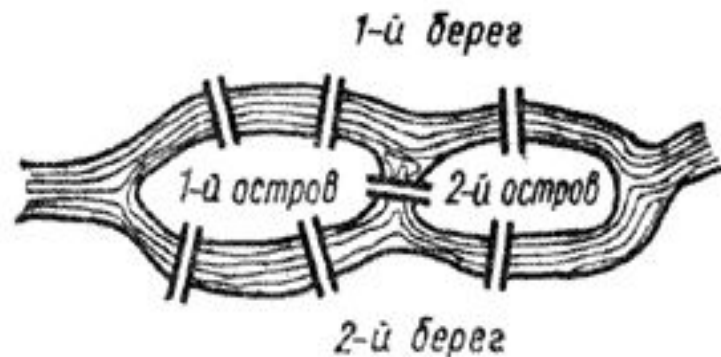
- одна из ветвей дискретной топологии;
- теория сетей;
- наука о топологических формах, сетевых моделях представления любого процесса или системы;
- *совокупность способов топологических представлений каких-либо процессов или структур.*

История возникновения

Родоначальник теории графов - *Леонард Эйлер*.

В 1736 году в одном из своих писем он формулирует и предлагает решение задачи о семи кёнигсбергских мостах, ставшей впоследствии классикой среди задач теории графов.

✓**Задача:** На рисунке представлен схематический план центральной части города Кенигсберг, включающий два берега реки Перголя, два острова в ней и семь соединяющих их мостов. Задача состоит в том чтобы найти маршрут, проходящий по суши по одному разу. При этом через каждый из мостов можно проходить только по одному разу, а конец и начало пути должны совпадать

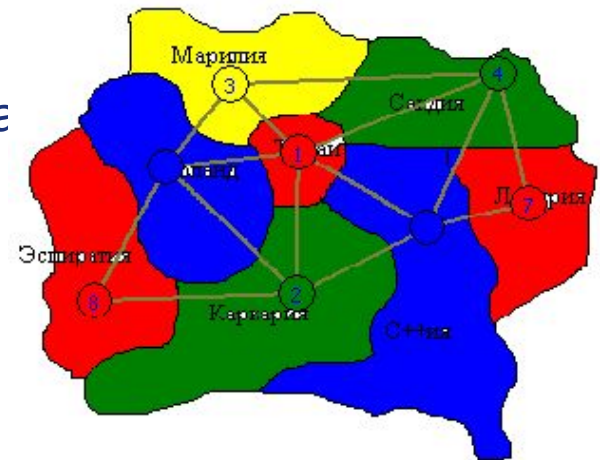


История возникновения

✓ **Задача:** В середине XIX века в одной из британских картографических типографий резонно возник вопрос: «Сколько красок достаточно для правильного раскрашивания всех графств на карте Англии» (любые две области, имеющие общий участок границы, должны быть раскрашены в разные цвета)?

Для представления карты в виде графа, страны будут являться вершинами графа, а границы дуга

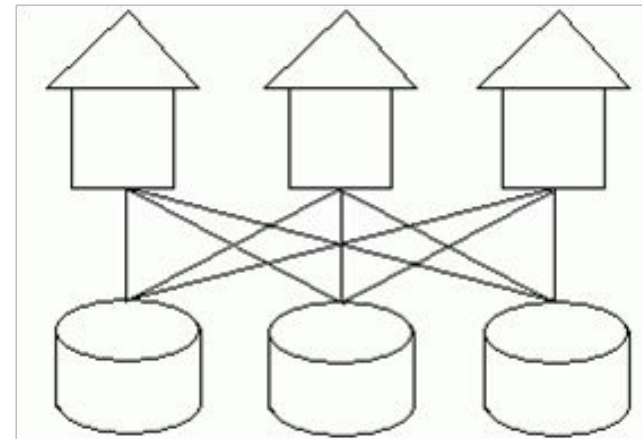
В 1976 году Appel и Хейкен опубликовали решение этой задачи, которое базировалось на переборе вариантов с помощью компьютера.



История возникновения

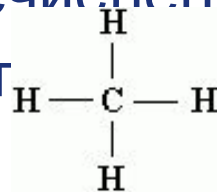
✓ **Задача:** Имеется три дома и три колодца, каким-то образом расположенные на плоскости. Провести от каждого дома к каждому колодцу тропинку так, чтобы тропинки не пересекались.

Эта задача была решена (показано, что решения не существует) Куратовским в 1930 году.

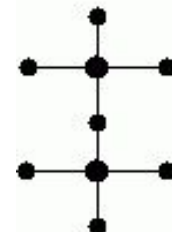
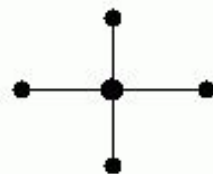


История возникновения

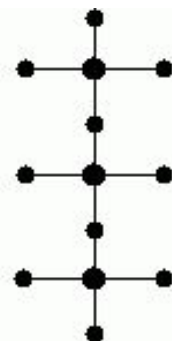
- ✓ В 1847 году Кирхгоф разработал *теорию деревьев* для решения систем линейных алгебраических уравнений.
- ✓ Это позволило ему найти ток в каждом проводнике в каждом контуре.
- ✓ От цепей он перешел к графам. Кирхгоф показал, что не надо рассматривать весь граф, можно рассматривать простые циклы графа, которые образуются остовным графом.
- ✓ В 1957 году ученый Келли разработал теорию перечисления деревьев в попытке найти изомер углеводорода.



метан



бутан



пропан

Применения теории графов

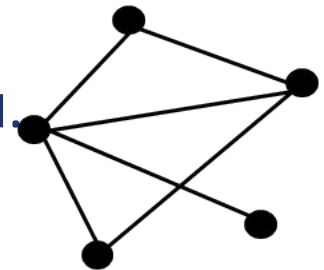
- **Химия** (для описания структур, путей сложных реакций, правило фаз также может быть интерпретировано как задача теории графов);
- **Компьютерная химия** — сравнительно молодая область химии, основанная на применении теории графов;
- **Информатика и программирование** (граф-схема алгоритма);
- **Коммуникационные и транспортные системы** (маршрутизация данных в Интернете и т.п.).
- **Схемотехника** (топология межсоединений элементов на печатной плате или микросхеме представляет собой граф или гиперграф).
- **И т.д.**

Терминология

- *Графом* $G(V, E)$ называется структура, построенная на непустом множестве V (множество вершин) с заданным на нем отношением E (множество ребер).

Обозначение: $G(V, E) = \langle V; E \rangle$, $V \neq \emptyset$, $|V| < \infty$
 $E = \{ e = (a, b) \mid a, b \in V \text{ и } aEb \} \subset V \times V = V^2$

- Граф называется *неориентированным*, если отношение E является симметричным.
- Граф называется *ориентированным*, если отношение E не является симметричным.



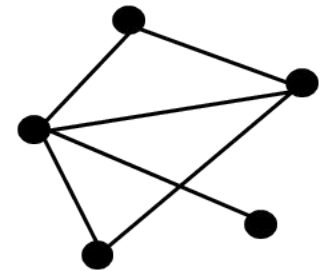
Обозначения:

$V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, $|V| = n$ – множество вершин

$E = \{e_1, e_2, \dots, e_p\}$, $|E| = p$ – множество ребер

• *Порядок* графа - это число вершин в графе $|V|$,
 $n = n(G) = |V|$

• *Размер* графа - это число его рёбер $|E|$,
 $p = p(G) = |E|$



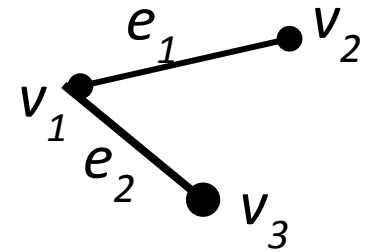
Говорят: (n, p) -граф

$(5, 6)$ -граф

Терминология

$$G(V, E) = \langle V; E \rangle, |V| = n, |E| = p$$

- **Концевые** вершины - это вершины v_1 и v_2 , соединяющие ребро графа $e = (v_1, v_2)$.
- Вершина v_1 и ребро e **инцидентны**.
- Ребро e и вершина v_2 также **инцидентны**.
- Две концевые вершины одного и того же ребра называются **смежными**.
- Два ребра e_1 и e_2 называются **смежными**, если они имеют общую концевую вершину v_1 .
- Ребро вида $e = (v, v)$ называется **петлей**.



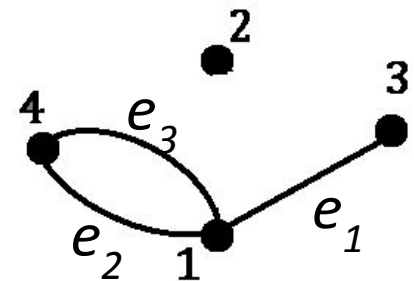
Терминология

- Два ребра называются *кратными*, если их обе концевые вершины общие.
- *Степенью* вершины v называют количество инцидентных ей рёбер.
Обозначение: $\rho(v)$
- Вершина называется *изолированной*, если она не является концом ни для одного ребра, т.е. $\rho(v) = 0$.
- Вершина называется *висячей* (листом), если она является концом ровно одного ребра, т.е. $\rho(v) = 1$.

Вершина **2** – *изолированная*;

Вершина **3** – *висячая*;

Ребра e_2 и e_3 – *кратные*.



- Множество вершин, смежных с вершиной v , называется **множеством смежности** вершины v .

Обозначение: $\Gamma^+(v) : \Gamma^+(v) = \{ u \in V \mid (u, v) \in E \},$
 $\Gamma^*(v) = \Gamma^+(v) + \{ v \}.$

Если не оговорено противное, то подразумевается Γ^+ и обозначается просто Γ .

- Очевидно, что $u \in \Gamma(v) \Leftrightarrow v \in \Gamma(u).$
- Если $A \subset V$ (A - некоторое подмножество вершин графа), то $\Gamma(A)$ - множество всех вершин, смежных с вершинами из множества A : $\Gamma(A) = \{ u \in V \mid \exists v \in A \text{ и } u \in \Gamma(v) \} = \Gamma(v).$

Пример: Граф представляют диаграммой

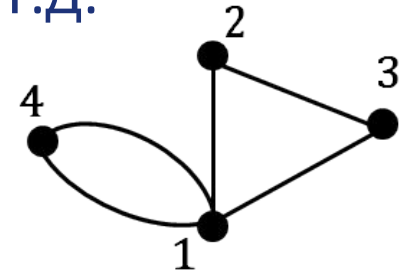
Множество вершин: $V = \{ 1, 2, 3, 4 \}$, $|V| = 4$

Множество ребер: $E = \{ (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 4), (2, 3) \}$, $|E| = 5$

Смежные вершины: 1 и 2 , 2 и 3 , 1 и 4 , и т.д.

Смежные ребра: $(1, 2)$ и $(1, 3)$, $(1, 3)$ и $(2, 3)$, и т.д.

Несмежные ребра: $(1, 4)$ и $(2, 3)$.



Множества смежности вершины 2 :

$$\Gamma^+(2) = \{ 1, 3 \}$$

$$\Gamma^*(2) = \{ 1, 2, 3 \}$$

Множество смежности множества вершин $A = \{ 2, 3 \}$:

$$\Gamma(A) = \{ 1, 2, 3 \}$$

Терминология

- Обозначим:

минимальная степень вершины графа G – $\delta(G)$

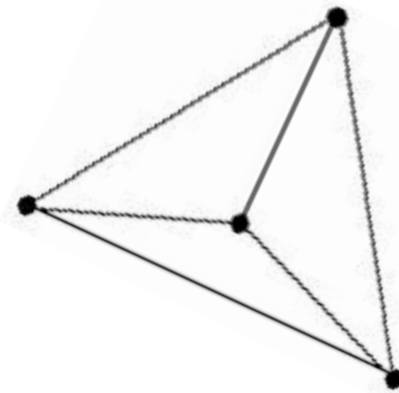
максимальная степень вершины графа G – $\Delta(G)$

$$\delta(G(V, E)) = \min \rho(v), \quad \Delta(G(V, E)) = \max \rho(v).$$

- Если степени всех вершин графа равны k , то граф называется *регулярным* степени r : $\delta(G) = \Delta(G) = r$.

Степень регулярности –
инвариант графа
Обозначение: $r(G)$

$$r(G) = 3$$



Для нерегулярных графов $r(G)$ не определено.

- ❑ **Теорема(Эйлера).** Сумма степеней вершин графа равна удвоенному количеству ребер: $\sum \rho(v) = 2p$.

Доказательство:

При подсчете суммы степеней вершин каждое ребро учитывается два раза: для одного конца ребра и для другого.

- ❑ **Следствие1.** Число вершин нечетной степени четно.

Доказательство:

По теореме Эйлера сумма степеней всех вершин - четное число. Сумма степеней вершин четной степени четна, значит, сумма степеней вершин нечетной степени также четна, следовательно, их четной число.

- ❑ **Следствие2.** Сумма полустепеней узлов орграфа равна удвоенному количеству дуг: $\sum d^+(v) + \sum d^-(v) = 2q$.

Доказательство:

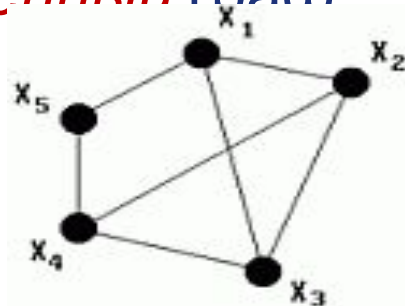
Сумма полустепеней узлов орграфа равна сумме степеней вершин графа, полученного из орграфа забыванием ориентации дуг.

Виды графов

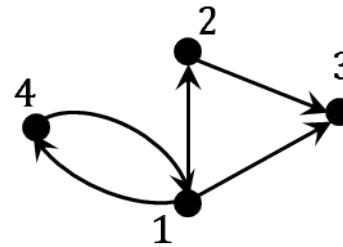
- Если задана функция $f : V \rightarrow M$ и/или $f : E \rightarrow M$, то множество M называется множеством *меток*, а граф, называется *помеченным* (нагруженным).

Множество меток: используются *буквы* или *целые числа*.

- Если функция f инъективна, а метки – целые числа, то граф называют *нумерованным*.
- Если у графа помечены ребра - это *реберно-помеченный* граф



Помеченный граф



Нумерованный граф

Виды графов

- **Тривиальный** граф - граф, состоящий из одной вершины.

- **Нуль-граф** — это граф, состоящий только из изолированных вершин, т.е. $|E| = 0$.

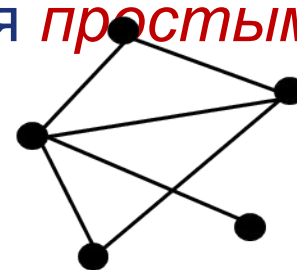
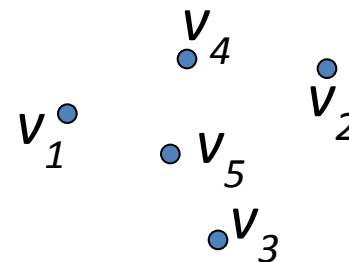
Обозначение: G_0 .

- **Пустой** граф — это граф, не содержащий ни вершин, ни рёбер, т.е. $|V| = 0$, $|E| = 0$.

Обозначение: $G_\emptyset$.

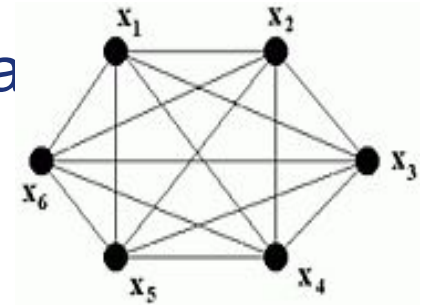
- Неориентированный граф называется **простым**, если у него нет петель и кратных ребер.

- Говоря **граф** часто подразумевают **простой граф**.



Виды графов

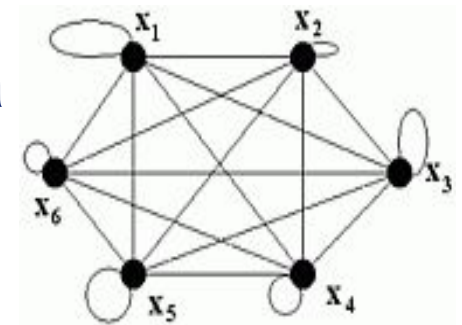
- Граф с петлями называется *псевдографом*.
- *Мультиграфом* называется граф с *кратными ребрами*.
- Неориентированный граф, в котором каждая пара вершин смежна, называется *полным*.
Обозначение: K_n



□ **Теорема:** Число ребер полного графа с n вершинами равно:

$$p(K_n) = n(n - 1) / 2.$$

- Полный граф, в котором каждая вершина имеет петлю, называется *плотным*.
Обозначение: K'_n

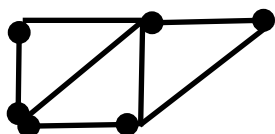


Подграфы

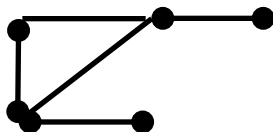
- *Подграфом* графа $G(V, E)$ называется граф $G'(V', E')$, если $V' \subset V, E' \subset E$.

Обозначение: $G' \subset G$

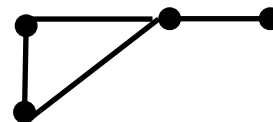
- Подграф $G'(V', E')$ называется *остовным* подграфом графа $G(V, E)$, если $V' = V$.
- Граф $G'(V', E')$ называется *собственным* подграфом графа G , если $V' \subset V, E' \subset E$ и $V' \neq V$ и $E' \neq E$.
- Подграф $G'(V', E')$ называется *правильным* подграфом графа $G(V, E)$, если G' содержит все ребра G , определенные на множестве вершин V' .



Граф G



Остовный подграф
 G'



Собственный правильный подграф
 G''

Изоморфизм графов

- Говорят, что два графа $G_1(V_1, E_1)$ и $G_2(V_2, E_2)$ изоморфны (обозначается $G_1 \sim G_2$), если существует биекция $h: V_1 \rightarrow V_2$, сохраняющая смежность, т.е.
$$e_1 = (u, v) \in E_1 \iff e_2 = (h(u), h(v)) \in E_2$$

□ **Теорема:** Изоморфизм графов есть отношение эквивалентности.

Доказательство:

Действительно:

[Рефлексивность.] $G \sim G$, биекция суть тождественная функция;

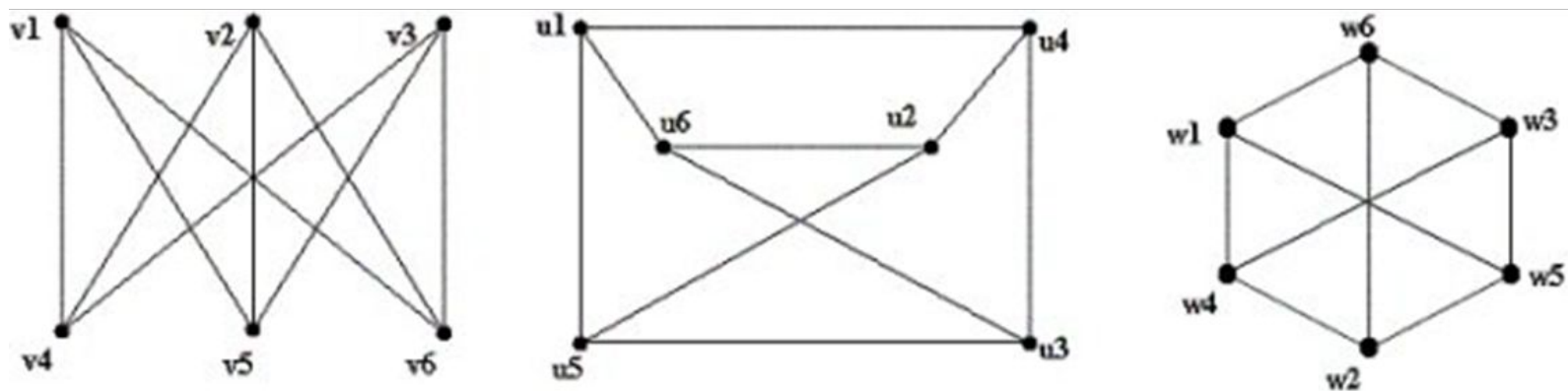
[Симметричность.] если $G_1 \sim G_2$ с биекцией h , то

$G_2 \sim G_1$ с биекцией h^{-1} ;

[Транзитивность.] если $G_1 \sim G_2$ с биекцией h и $G_2 \sim G_3$ с биекцией g , то $G_1 \sim G_3$ с биекцией $g \circ h$.

Изоморфизм графов

Пример: С виду различные диаграммы являются диаграммами одного и того же графа $K_{3,3}$.



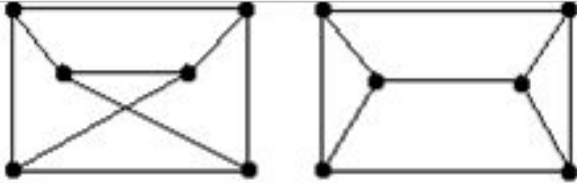
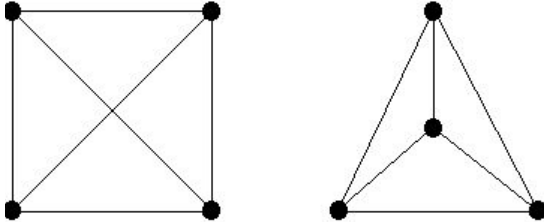
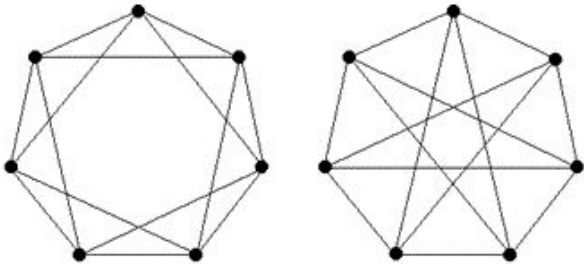
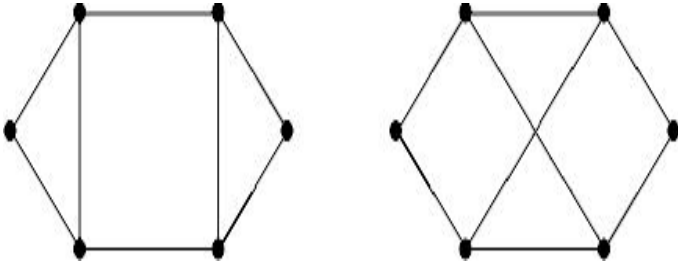
Первая диаграмма является иллюстрацией к задаче о колодах.

- **Инвариант** – неизменяющаяся числовая характеристика объекта.

Инварианты графа - $n(G)$ и $p(G)$, смежность и инцидентность.

Изоморфизм графов

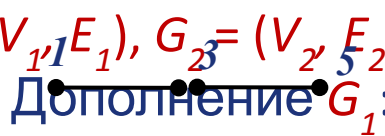
✓ **Задача:** Изоморфны ли следующие пары графов?

1		3	
2		4	

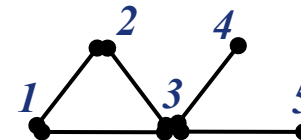
Операции над графами

- **Дополнение** $\overline{G}$ графа $G = (V, E)$ - это граф, имеющий в качестве множества вершин множество V , а две вершины в графе G смежны тогда и только тогда, когда они не смежны в графе $\overline{G}$, т.е. $E(\overline{G}) = \{e \in E(G) \mid e \notin E(G)\}$

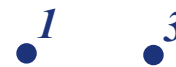
Рассмотрим графы $G_1 = (V_1, E_1)$, $G_2 = (V_2, E_2)$.



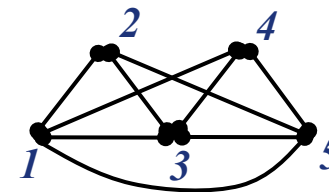
- **Объединением** графов G_1 и G_2 ($G_1 \cup G_2$), называется граф $G = (V_1 \cup V_2, E_1 \cup E_2)$.



- **Пересечением** графов G_1 и G_2 ($G_1 \cap G_2$), называется граф $G = (V_1 \cap V_2, E_1 \cap E_2)$.

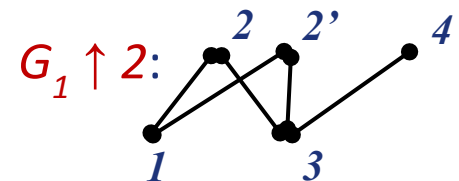
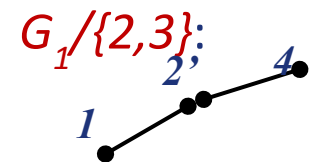
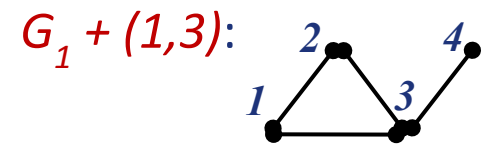
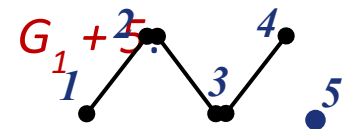
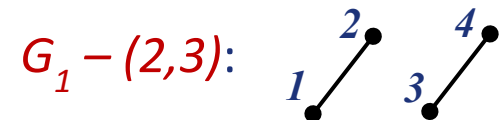


- **Соединением** графов G_1 и G_2 ($G_1 + G_2$), называется граф $G = (V_1 \cup V_2, E_1 \cup E_2 \cup \{e = (u, v) \mid u \in G_1, v \in G_2\})$.



Операции над графами

- **Удаление вершины v** из графа $G = (V, E)$ ($G - v$)
дает граф $G' = (V \setminus \{v\}, E \setminus \{e = (a, b) \mid v \in \{a, b\}\})$.
- **Удаление ребра e** из графа $G = (V, E)$ ($G - e$)
дает граф $G' = (V, E \setminus \{e\})$.
- **Добавление вершины v** в граф $G = (V, E)$ ($G + v$)
дает граф $G' = (V \cup \{v\}, E)$.
- **Добавление ребра e** в граф $G = (V, E)$ ($G + e$)
дает граф $G' = (V, E \cup \{e\})$.
- **Стягивание подграфа $F(A, B)$ к вершине v** (G/A)
дает граф
 $G' = (V \setminus A \cup \{v\}, E \setminus B \cup \{e = (u, v) \mid u \in \Gamma(A) \setminus A\})$.
- **Размножение вершины v** в графе $G = (V, E)$ ($G \uparrow v$)
дает граф $G' = (V \cup \{v'\}, E \cup \{e = (u, v') \mid u \in \Gamma(v)\})$.



Представления графов

Требования к представлению структур данных:

- минимальный объем занимаемой памяти;
- максимальная скорость обработки.

Существует четыре часто используемых представления

Представление графа	Объем памяти
матрица смежности	$n(p, q) = O(p^2)$
матрица инцидентий	$n(p, q) = O(p \cdot q)$
списки смежности	$n(p, q) = O(p + 2q)$ [$n(p, q) = O(p + q)$]
массив ребер (или дуг),	$n(p, q) = O(2q)$.

Представление выбирается, исходя из потребностей конкретной задачи.

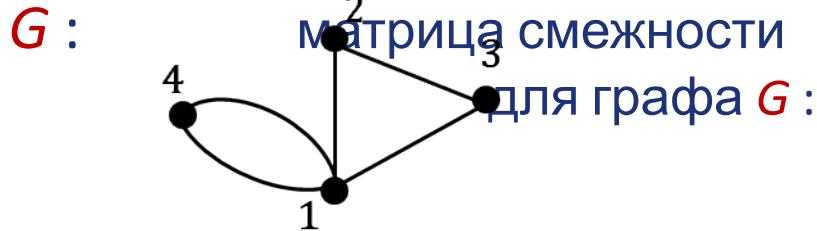
Представления графов

Матрица смежности

Пусть есть граф $G(V, E) = \langle V; E \rangle$, $|V| = n$, $|E| = p$.

- **Матрица смежности** графа – это квадратная матрица $S_{n \times n} = (S_{ij})$ $i, j = 1..n$, у которой строки и столбцы соответствуют вершинам графа, а элемент $S_{ij} = \rho(v_i, v_j)$, $i = 1..n$.

Пример: Есть два графа неорграф G и орграф F .



	1	2	3	4
1	0	1	1	2
2	1	0	1	0
3	1	1	0	0
4	2	0	0	0



	1	2	3	4
1	0	1	1	1
2	0	0	1	0
3	0	0	0	0
4	1	0	0	0

Представления графов

Матрица смежности

Очевидно, что матрица смежностей неориентированного графа *симметрична относительно главной диагонали* $\Rightarrow$ достаточно хранить только верхнюю треугольную матрицы.

Программно матрицу смежностей можно описать в виде массива:

```
Var  
  S: array [1..n, 1..n] of 0..m;
```

Матрица смежностей графа без петель и кратных ребер состоит только из нулей и единиц $\Rightarrow$ можно рассматривать
:

как *булев*.

```
Var  
  S: array [1..n, 1..n] of 0..1;  
  S: array [1..n, 1..n] of boolean;
```

Представления графов

Матрица инциденций

- **Матрица инциденций** графа – это прямоугольная матрица

$I_{n \times p} = (I_{ij})$, $i = 1..n$, $j = 1..p$ (n – число вершин, p – число ребер графа).

Для неориентированного графа значение элемента

матрицы $I_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если вершина с номером } i \text{ инцидентна ребру } j, \\ 0, & \text{если вершина с номером } i \text{ не инцидентна ребру } j. \end{cases}$

Для с $I_{ij} = \begin{cases} -1, & \text{если вершина с номером } i \text{ является началом ребра } j, \\ 1, & \text{если вершина с номером } i \text{ является концом ребра } j, \\ 0, & \text{если вершина с номером } i \text{ не инцидентна ребру } j. \end{cases}$

Представления графов

Матрица инциденций

Нумеровать ребра графа - занятие неблагоприятное. Чаще их запоминают исходя из понятия отношения смежности.

матрица инциденций для G : матрица инциденций для F :

Матрица ребер					
	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,4)	(2,3)
1	1	1	1	1	0
2	1	0	0	0	1
3	0	1	0	0	1
4	0	0	1	1	0

Матрица дуг					
	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(2,3)	(4,1)
1	-1	-1	-1	0	1
2	1	0	0	-1	0
3	0	1	0	1	0
4	0	0	1	0	-1

Программно матрицу инциденций описывают массивами

```
Var
  I: array [1..n, 1..m] of 0..1;           {для неоргафа}
  I: array [1..n, 1..m] of -1..1;         {для оргафа}
```

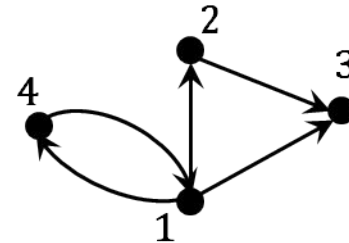
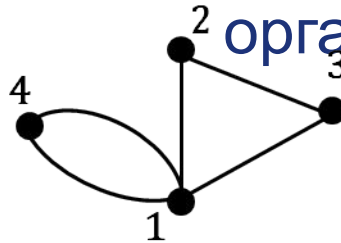
Представления графов

Списки смежностей

- *Списки смежностей* графа – списки $Sp(i)$ смежных вершин для каждой вершины графа.

Пример:

Неорграф G : орграф F :



списки смежностей для G :

$$Sp(1) = \langle 2, 3, 4, 4 \rangle$$

$$Sp(2) = \langle 1, 3 \rangle$$

$$Sp(3) = \langle 1, 2 \rangle$$

$$Sp(4) = \langle 1, 1 \rangle$$

списки смежностей для F :

$$Sp(1) = \langle 2, 3, 4 \rangle$$

$$Sp(2) = \langle 3 \rangle$$

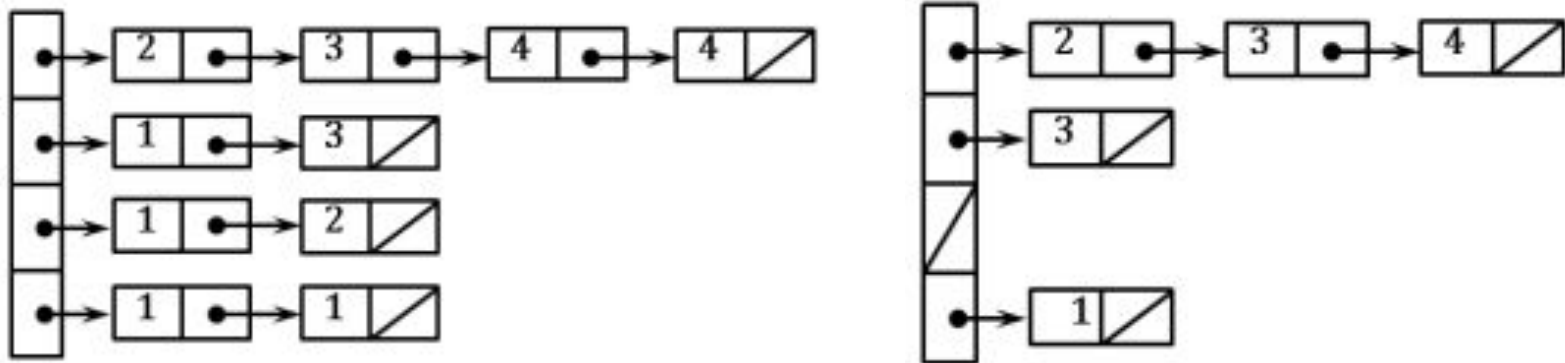
$$Sp(3) = \emptyset$$

$$Sp(4) = \langle 1 \rangle$$

Представления графов

Списки смежностей

Списки смежностей – это списочная структура, состоящая из массива указателей на списки смежных вершин.



Программно списки смежности описываются:

```
Type
  N = record
    v : 1..n;
    n : ↑N
  end;

Var
  Sp : array[1..n] of ↑N;
```

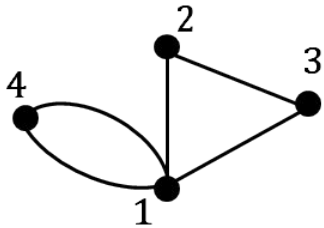
Представления графов

Массив дуг

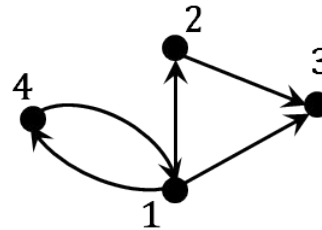
Массив дуг графа – это списочная структура, состоящая из массива указателей на списки смежных вершин.

массив ребер для G :

массив дуг для F :



$E(1) = (1,2)$
 $E(2) = (1,3)$
 $E(3) = (1,4)$
 $E(4) = (1,4)$
 $E(5) = (2,3)$



$E(1) = (1,2)$
 $E(2) = (1,3)$
 $E(3) = (1,4)$
 $E(4) = (2,3)$
 $E(5) = (4,1)$

Программно массивы дуг описываются:

```
Var  
  E : array[1..m] of record  
    u : 1..n;  
    v : 1..n;  
  end;
```

Связность

Маршруты, цепи, циклы

- *Маршрутом* в графе называется чередующаяся последовательность вершин и ребер $v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \dots, e_k, v_k$, в которой любые два соседних элемента инцидентны.
- Если $v_0 = v_k$, то маршрут называется *замкнутым*.
- Если все ребра различны, то маршрут называется *цепью*.
- Если все вершины различны, то маршрут называется *простой цепью*.
- В цепи $v_0, e_1, \dots, e_k, v_k$ вершины v_0 и v_k называют *концами* цепи. Говорят, что цепь с концами u, v *соединяет* вершины u и v . Обозначение: $\langle u, v \rangle$.
- *Длина маршрута* – количество ребер, участвующих в маршруте.

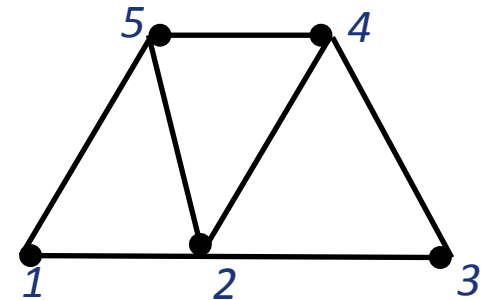
Связность

Маршруты, цепи, циклы

- Замкнутая цепь называется **циклом**.
- Число циклов в графе G обозначается $z(G)$.
- Замкнутая простая цепь называется **простым циклом**.

Пример:

маршрут, но не цепь;	1, 2, 5, 2, 4
цепь, но не простая цепь:	1, 2, 4, 5, 2, 3
простая цепь:	5, 4, 2, 3
цикл, но не простой цикл:	2, 5, 1, 2, 3, 4, 2
простой цикл:	1, 2, 5, 1



Связность

Маршруты, цепи, циклы

- *Ациклический* граф - граф без циклов.

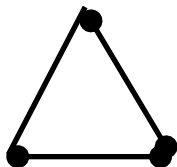
Если граф ориентированный, то:

цепь называется *путем*,

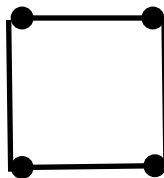
цикл называется *контуром*.

- Граф, состоящий из *простого цикла* с *k* вершинами, обозначается C_k .

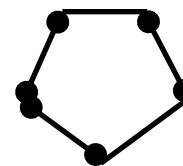
Пример:



C_3 – треугольник



C_4 – квадрат



C_5 – пятиугольник

Маршруты, цепи, циклы

- Две вершины в графе **связаны**, если существует соединяющая их простая цепь.
- **Расстоянием** между вершинами u и v называется длина кратчайшей простой цепи, соединяющей u и v .

Обозначение: $d(u, v)$

Свойства:

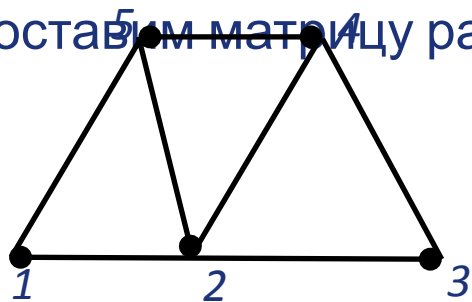
1. $d(u, v) \geq 0$;
 2. $d(u, v) = d(v, u)$;
 3. Если u и v не связаны, то $d(u, v) = \infty$;
 4. $d(u, v) = 0 \Leftrightarrow u = v$;
 5. $d(u, v) + d(v, t) \geq d(u, t)$.
- Самая кратчайшая цепь называется **геодезической**.

Маршруты, цепи, циклы

- **Обхват** графа - это длина кратчайшего простого цикла.
Обозначение: $g(G)$
- **Окружение** графа - длина максимального простого цикла.
Обозначение: $c(G)$
- **Диаметр** графа - длина самой длинной геодезической.
Обозначение: $d(G)$

Пример:

Составим матрицу расстояний графа:



	1	2	3	4	5
1	0	1	2	2	1
2	1	0	1	1	1
3	2	1	0	1	2
4	2	1	1	0	1
5	1	1	2	1	0

$d(G) = 2$

$g(G) = 3$

$c(G) = 5$

СВЯЗНОСТЬ

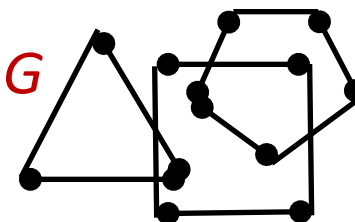
- Граф, в котором все вершины связаны, называется СВЯЗНЫМ.
- Компонента графа G (компонента связности графа) – максимальный связный подграф графа G .

$k(G)$ – число компонент связности графа G

Граф G – связен $\Leftrightarrow k(G) = 1$

- Если $k(G) > 1$, то граф называется *НЕСВЯЗНЫМ*.

$$k(G) = 3$$



□ **Теорема:** Если граф G имеет n вершин и k компонент связности, то максимально возможное количество ребер в нем $p(n, k) = \frac{1}{2}(n - k + 1)(n - k)$

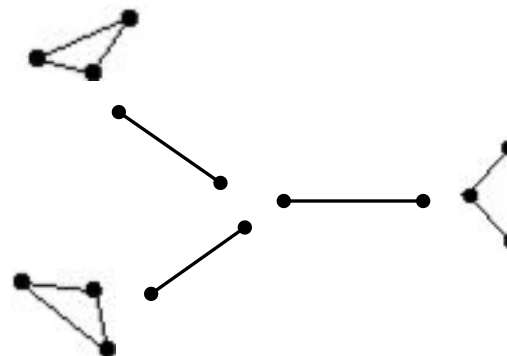
Связность

- **Точка сочленения** – это вершина, удаление которой приводит к увеличению числа компонент связности графа.
- **Мост** – это ребро, удаление которого приводит к увеличению числа компонент связности графа.
- **Блок** – связный граф, не имеющий точек сочленения.

Пример:



Граф G



Блоки графа G

Характеристики связности:

1. Числом вершинной связности (числом связности) - наименьшее количество вершин, удаление которых увеличивает число компонент графа.

Обозначение: $\kappa(G)$

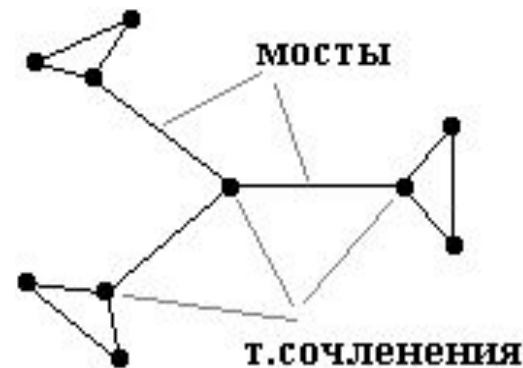
Пример: $\kappa(K_1) = 0$; $\kappa(K_p) = p - 1$; $\kappa(C_p) = 2$.

2. Числом реберной связности – минимальным количеством ребер, удаление которых увеличивает число компонент графа.

Обозначение: $\lambda(G)$

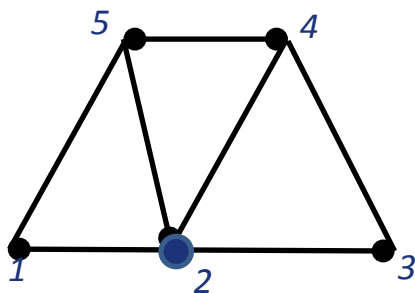
$\lambda(G) = 3$

$\kappa(G) = 1$



СВЯЗНОСТЬ

- **Эксцентриситетом** $e(v)$ вершины v в связном графе $G(V, E)$ называется максимальное расстояние от вершины v до других вершин графа G : $e(v) = \max d(v, u)$.
- **Радиусом** $R(G)$ графа G называется наименьший из эксцентриситетов вершин: $R(G) = \min e(v)$.
- Вершина v называется **центральной**, если ее эксцентриситет совпадает с радиусом графа, $e(v) = R(G)$.
- Множество центральных вершин называется **центром** и обозначается $C(G)$: $C(G) = \{v \in V \mid e(v) = R(G)\}$.



	1	2	3	4	5	e
1	0	1	2	2	1	2
2	1	0	1	1	1	1
3	2	1	0	1	2	2
4	2	1	1	0	1	2
5	1	1	2	1	0	2

$R(G) = 1$
 $C_1(G) = \{2\}$

- **Двудольный** граф (*биграф, четный граф*) - это граф $G(V, E)$, множество вершин V которого можно разбить на два подмножества V_1 и V_2 таким образом, что каждое ребро графа G соединяет вершины из разных множеств.

Говорят: ребра графа G соединяют множества V_1 и V_2 .

- Множества V_1 и V_2 - доли графа G .

□ **Теорема:** Граф является двудольным тогда и только тогда, когда все его простые циклы имеют четную длину.

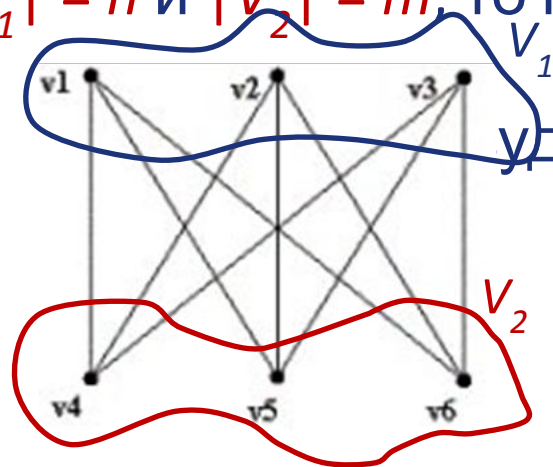
Связность

- **Полный двудольный** граф - это двудольный граф $G(V, E)$, содержащий все ребра, соединяющие подмножества V_1 и V_2 .

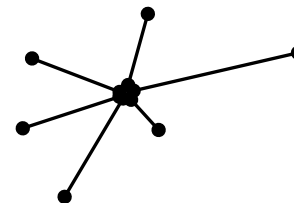
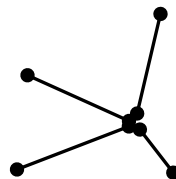
Обозначение:

если $|V_1| = n$ и $|V_2| = m$, то полный двудольный граф – $K_{n,m}$

Пример:



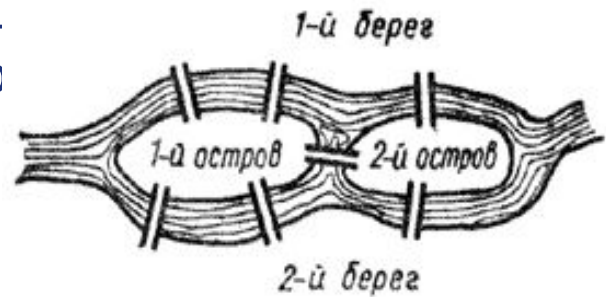
двудольный граф $K_{3,3}$



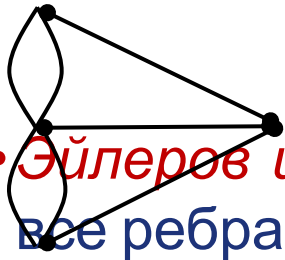
- **Звезда** - граф типа $K_{1,n}$.
 $K_{1,4}$ $K_{1,6}$

Эйлеровы графы

✓ **Задача Эйлера:** Найти маршрут, проходящий по всем четырем участкам суши по одному разу. При этом через каждый из мостов можно проходить только по одному разу, а конец и начало пути должны совпадать.



✓ **Задача теории графов:** Найти в данном графе G цикл, содержащий все вершины и все ребра.



- **Эйлеров цикл** – замкнутая цепь, содержащая все вершины и все ребра графа.
- Граф называется **Эйлеровым**, если он содержит эйлеров цикл.
- Если граф содержит непростую цепь, содержащую все ребра графа, то цепь называется **эйлеровой**, а граф - **полуэйлеровым**.

Эйлеровы графы

❑ **Лемма:** Если степень каждой вершины графа не меньше 2, то он содержит цикл.

Доказательство:

очевидно, так как построение такого маршрута возможно, если нет висячих вершин.

❑ **Теорема:** Для связного графа G следующие утверждения эквивалентны:

1. G - эйлеров граф;
2. каждая вершина графа G имеет четную степень;
3. множество ребер графа можно разбить на простые циклы.

Эйлеровы графы

Доказательство:

1 $\Rightarrow$ 2 Очевидно, что эйлеров граф G содержит эйлеров цикл T .

Прохождение этого цикла вносит в степень каждой вершину 2.

Значит, степени всех вершин – четны.

2 $\Rightarrow$ 3 Т.к. граф G - связен, нетривиален и степени всех вершин четны, то

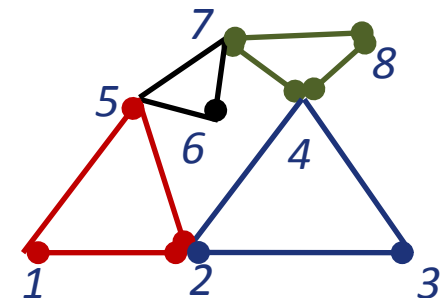
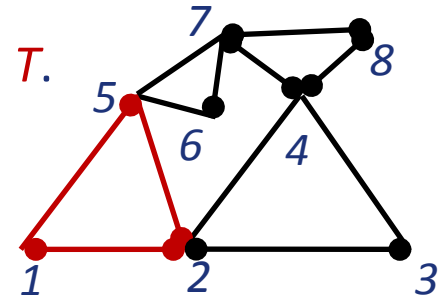
$\exists$ T - простой цикл. Удалим из графа G ребра цикла T .

Получим граф G_1 - остовный подграф графа G с четными вершинами.

Если G_1 – нуль-граф, то все доказано, иначе повторим процедуру снова:

работаем с графом G_1 и получаем граф G_2 , в котором все вершины четны и т.д.

В итоге, с пустым графом G_n получаем разбиение множества ребер графа G на n простых циклов.



Эйлеровы графы

Доказательство:

$3 \Rightarrow 1$ Допустим T_1 - некоторый цикл из разбиения.

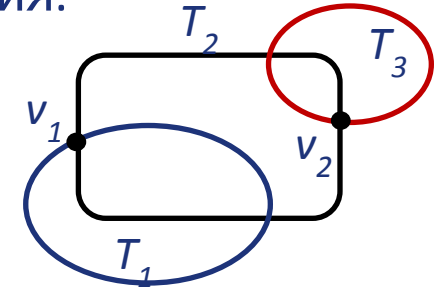
Если G состоит только из T_1 , все доказано.

Иначе, есть еще T_2 , имеющий с T_1 общую вершину v_1 и не имеющий общих ребер.

Если $G = T_1 \cup T_2$, все доказано.

Иначе, есть еще T_3 , имеющий общую вершину v_2 с $T_1 \cup T_2$ и не имеющий общих ребер с $T_1 \cup T_2$. И.т.д.

Будем наращивать эйлеров цикл до тех пор, пока не исчерпаем все разбиения.



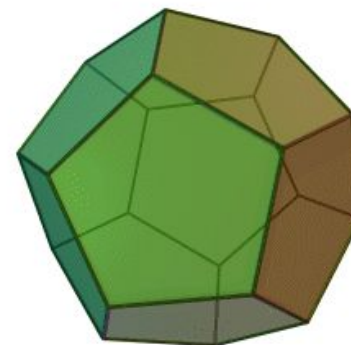
❑ **Следствие 1:** Если связный граф имеет $2n$ нечетных вершин ($n \geq 1$), то множество его ребер можно разбить на n открытых цепей.

❑ **Следствие 2:** Связный граф с двумя нечетными вершинами является полуэйлеровым.

Гамильтоновы графы

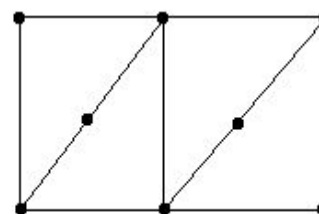
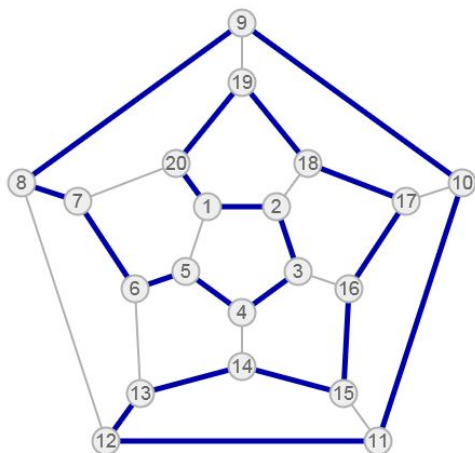
✓ Игра «Вокруг света» (В. Гамильтон, 1859г.):

Каждой вершине додекаэдра приписано название известного города. Необходимо обойти «вокруг света» по ребрам многогранника, побывав в каждом городе ровно один раз и вернуться домой.

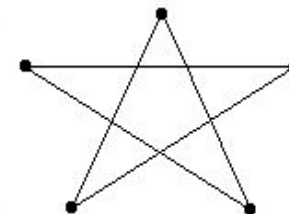


✓ Задача теории графов: Найти остовный цикл в графе додекаэдра.

- Простой цикл, содержащий все вершины графа, называется **гамильтоновым**.
- **Гамильтонов** граф – граф, в котором имеется гамильтонов цикл.



не гамильтонов граф



гамильтонов граф

Гамильтоновы графы

Достаточные условия наличия в графе гамильтонова цикла:

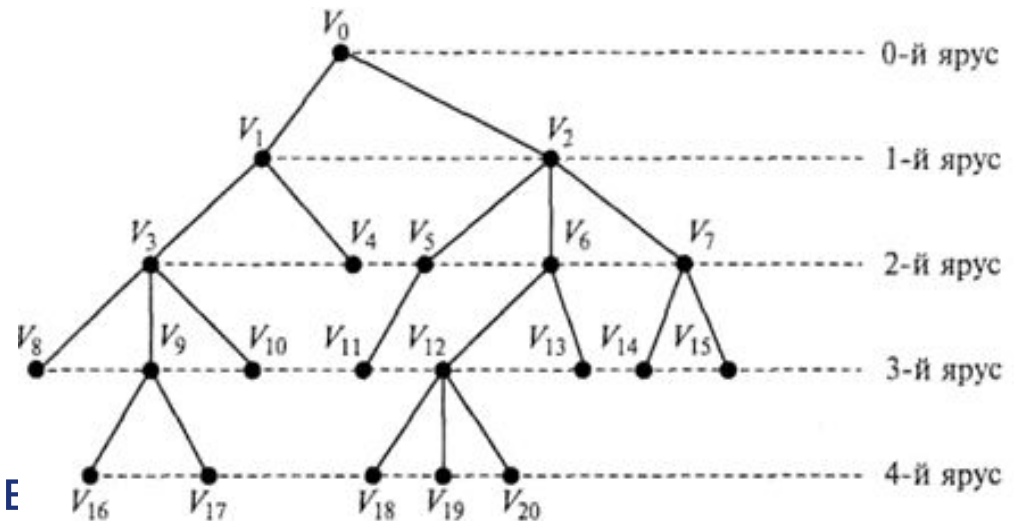
1. Граф со степенной последовательностью $d_1 \leq d_2 \leq \dots \leq d_n$ является гамильтоновым, если для всякого k , удовлетворяющего неравенствам $1 \leq k < n/2$, выполняется условие $(d_k \leq k) \Rightarrow (d_{n-k} \geq n - k)$;
2. Если в G с $n > 3$ для любой вершины степень не меньше $n/2$, то граф гамильтонов;
3. Если для любой пары несмежных вершин сумма их степеней больше либо равна n , то это гамильтонов граф.

Гамильтоновы графы

- ✓ **Задача коммивояжера:** Имеется n городов, расстояния между которыми известны. Коммивояжер должен выйти из первого города, посетить по разу в неизвестном порядке города $2, 3, \dots, n$ и вернуться в первый город. Расстояния между городами известны. В каком порядке следует обходить города, чтобы замкнутый путь коммивояжера был кратчайшим?
- ✓ **Задача теории графов:** имеется полный ориентированный граф $G = (V, E)$, каждой дуге e которого сопоставлен вес $c(e)$. Требуется найти в этом графе гамильтонов контур наименьшей стоимости.

Деревья

- *Лес* (ациклический граф) - граф без циклов.
- *Дерево* (свободное) - это связный ациклический граф.
- *Корневое* дерево – дерево с *корнем* (выделенной вершиной).
- v_0 – корень дерева
- $v_8, v_{16}, \dots$ - листья дерева
- *Крона* – множество листьев дерева.
- *Уровень* вершины - расстояние до корневой вершины v_0 .
- *Ярус* – множество вершин одного уровня.



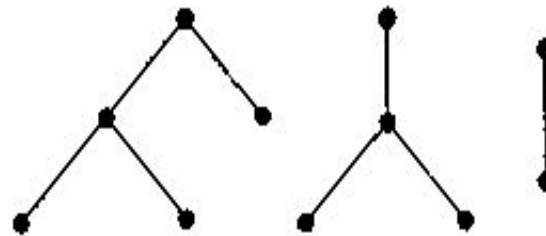
Деревья

□ **Теорема:** Для графа G следующие утверждения эквивалентны:

- 1) G – дерево;
- 2) любые две вершины в графе G соединены единственной простой цепью;
- 3) G – связный (n, p) -граф и $p = n - 1$;
- 4) G – ациклический граф и (n, p) -граф и $n = p + 1$;
- 5) G – ациклический граф и если между несмежными вершинами добавить ребро, то в полученном графе будет ровно один простой цикл;
- 6) G – связен, отличен от K_n ($n \geq 3$), и если между несмежными вершинами добавить ребро, то в полученном графе будет ровно один простой цикл;
- 7) G – граф, отличный от $K_3 \cup K_1$ и $K_3 \cup K_2$, $n = p + 1$ и если между несмежными вершинами добавить ребро, то в полученном графе будет ровно один простой цикл.

Деревья

- ❑ **Следствие 1:** В любом нетривиальном дереве существует по крайней мере две висячие вершины.
- ❑ **Следствие 2:** Каждая невисячая вершина свободного дерева является точкой сочленения.
- ❑ **Следствие 3:** Если в связном графе нет висячих вершин, то в нем есть цикл.



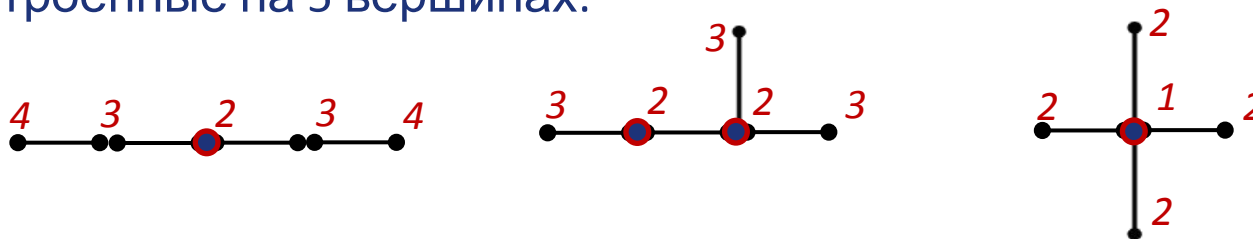
Деревья

□ **Теорема:** Центр свободного дерева состоит из одной вершины или из двух смежных вершин:

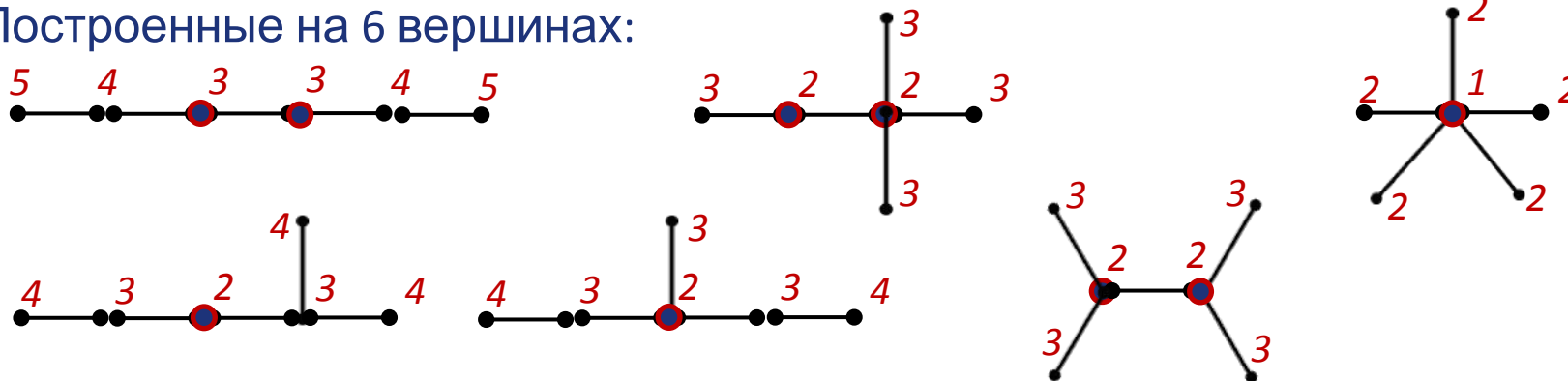
$$(z(G) = 0 \text{ и } k(G) = 1) \Rightarrow (C(G) = K_1 \text{ или } C(G) = K_2).$$

Пример:

Свободные деревья с эксцентриситетами вершин и центрами, построенные на 5 вершинах:



Построенные на 6 вершинах:

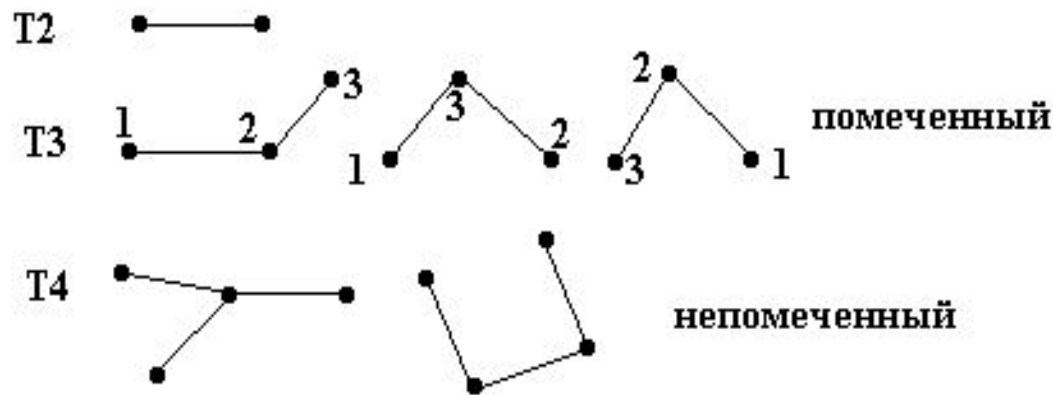


Деревья

✓ Задачи теории перечисления деревьев:

- 1) подсчитать число неизоморфных деревьев, построенных на n вершинах и обладающих заданными свойствами;
- 2) перечислить все возможные деревья.

□ **Теорема Келли:** всего может быть построено на n вершинах n^{n-2} помеченных неизоморфных деревьев.

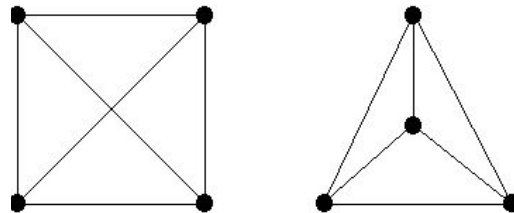


Деревья

- ✓ **Задача:** Имеется n городов, которые нужно соединить сетью железных дорог таким образом, чтобы из каждого города можно было попасть в любой другой. Для каждой пары городов известна стоимость строительства дороги. Требуется найти самый дешевый вариант строительства.
- ✓ **Задача теории графов:** имеется полный граф $G = (V, E)$. Найти на взвешенном полном графе из n вершин остовное дерево наименьшей длины.

Плоские графы

- Граф *укладывается на некоторой поверхности*, если его можно нарисовать на этой поверхности так, чтобы его ребра не пересекались.
- *Плоский* граф – граф, уложенный на плоскости.
- *Планарным* называется граф, который изоморфен плоскому.



Планарный граф и его укладка

- *Грань* графа - максимальное по включению множество точек плоскости, каждая пара которых может быть соединена кривой, не пересекающей ребра графа.
- *Граница грани* - множество вершин и ребер, принадлежащих этой грани (или цикл, ее образующий).

Плоские графы

❑ **Теорема Эйлера:** Если G - связный плоский (n, p) -граф, имеющий f -граней, тогда $n + f - p = 2$.

❑ **Следствие 1:** Пусть G планарен и у него n вершин, p ребер, f граней и k компонент связности, тогда

$$n + f - p - k = 1.$$

❑ **Следствие 2:** Если G - связный планарный граф, имеющий хотя бы один цикл нечетной длины, то $p \leq 3n - 6$.

❑ **Следствие 3:** Число граней любой плоской укладки связного планарного (n, p) -графа постоянно и равно

$$p - n + 2.$$

Т.е. число граней планарного графа не зависит от способа его укладки на плоскости.

Раскраска графа

- *Раскраска* графа – это приписывание цветов вершинам графа так, чтобы смежные вершины были разных цветов.
- *Одноцветный класс* - множество всех вершин одного цвета.
- *Хроматическое число* – наименьшее возможное количество цветов в раскраске графа.

Обозначение: $\chi(G)$

- Граф называется *n*-раскрашиваемым, если в раскраске графа использовано *n* цветов.

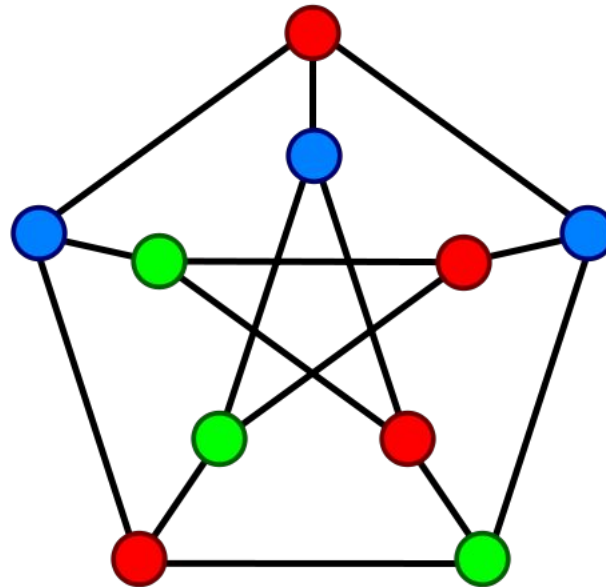
□ **Теорема:** Граф двуцветен тогда и только тогда, когда в нем нет нечетных простых циклов.

□ **Теорема:** $\chi(G) \leq 1 + \Delta(G)$

Раскраска графа

□ **Теорема (о пяти красках):** Всякий планарный граф можно раскрасить пятью красками.

Пример: граф Петерсона



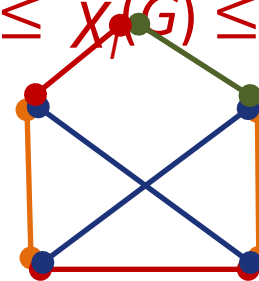
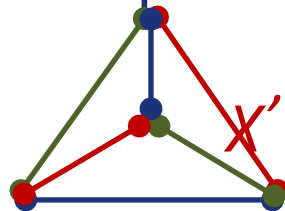
Раскраска графа

- Говорят, что граф G - *n -реберно раскрашиваем*, если необходимо n красок, чтобы раскрасить ребра графа таким образом, чтобы любые смежные ребра были разных цветов.
- *Хроматический класс* – число красок, необходимых для реберной раскраски графа.

Обозначение: $\chi'(G)$

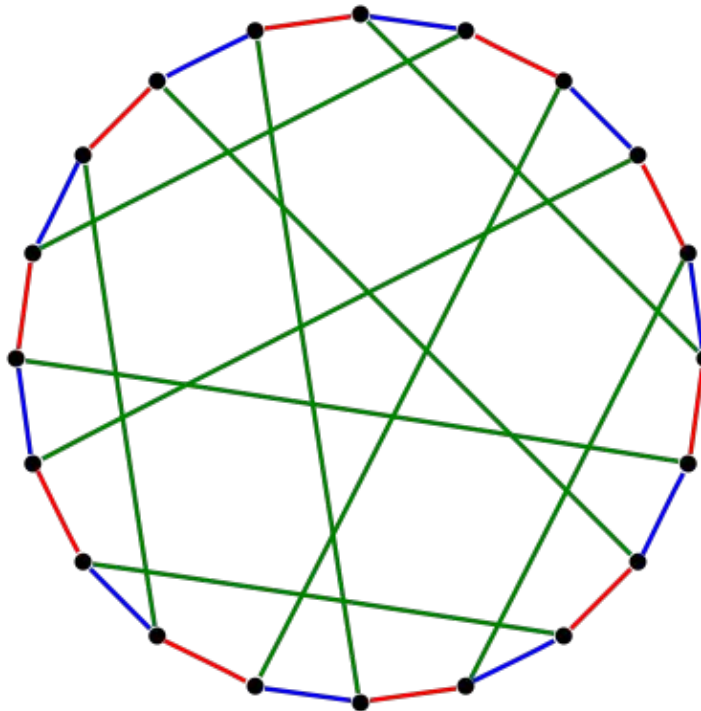
□ **Теорема:** Для каждого графа G хроматический класс удовлетворяет неравенствам $\Delta(G) \leq \chi'(G) \leq \Delta(G) + 1$.

Пример: $\chi' = \Delta$ $\chi' = \Delta + 1$



Раскраска графа

Пример: рёберной раскраски



СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ

© ФГБОУ ВПО ИжГТУ имени М.Т. Калашникова, 2013

© Макарова Ольга Леонидовна, 2013