

Скалярное произведение в координатах

Подготовила:

учитель математики

МОУ сош №30 имени А.И.Колдунова

Кутоманова Е.М.

2010-2011 учебный год

Теорема

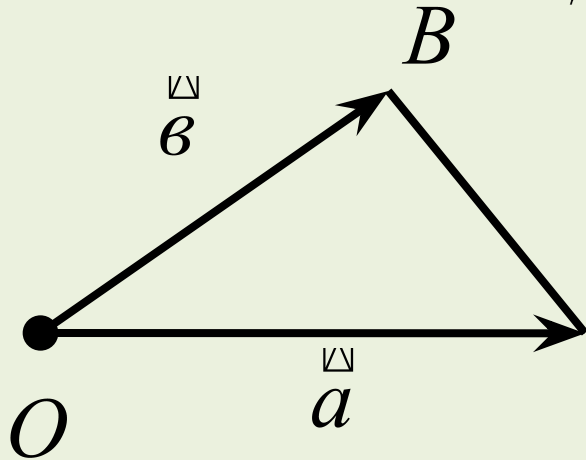
В прямоугольной системе
координат скалярное
произведение векторов

выражается формулой

$$a \cdot b = x_1 x_2 + y_1 y_2.$$

Дано : $\vec{a}\{x_1; y_1\}, \vec{b}\{x_2; y_2\}$

Доказать : $\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2$.



Доказательство.

По теореме косинусов:

$$AB^2 = AO^2 + BO^2 - 2AO \cdot BO \cdot \cos \alpha.$$

$$\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a}$$

$$\overrightarrow{OA} = \vec{a}$$

$$\overrightarrow{OB} = \vec{b}$$

$$|\vec{a} - \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b}, \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2}(|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - |\vec{a} - \vec{b}|^2)$$

$$\begin{aligned}
|\vec{a}|^2 &= x_1^2 + y_1^2, |\vec{b}|^2 = x_2^2 + y_2^2, \\
|\vec{b} - \vec{a}|^2 &= (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = \\
&= x_2^2 - 2x_2x_1 + x_1^2 + y_2^2 - 2y_2y_1 + y_1^2,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\vec{a} \cdot \vec{b} &= \frac{1}{2} (x_1^2 + y_1^2 + x_2^2 + y_2^2 - x_1^2 - 2x_1x_2 - x_2^2 - y_1^2 + 2y_1y_2 - y_2^2) = \\
&= \frac{2x_1x_2 + 2y_1y_2}{2} = x_1x_2 + y_1y_2.
\end{aligned}$$

Теорема доказана.

$$\begin{matrix} \square & \square \\ a \cdot b = x_1 x_2 + y_1 y_2 \end{matrix}$$

№1044(a)

Дано:

Решение.

$$\begin{matrix} \square \\ a \end{matrix} \left\{ \frac{1}{4}; -1 \right\}, \begin{matrix} \square \\ b \end{matrix} \{2; 3\}$$

$$\begin{matrix} \square & \square \\ a \cdot b = x_1 x_2 + y_1 y_2. \end{matrix}$$

Найти:

$$\begin{matrix} \square & \square \\ a \cdot b \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} \square & \square \\ a \cdot b = \frac{1}{4} \cdot 2 - 1 \cdot 3 = 0,5 - 3 = -2,5. \end{matrix}$$

Ответ: -2,5.

Следствие 1.

Ненулевые векторы перпендикулярны тогда и только тогда, когда их скалярное произведение равно нулю.

№1047(а)

Дано : $\vec{a} \perp \vec{b}$
 $\vec{a} \{4;4\}, \vec{b} \{x;-6\}$

Найти : x

Решение.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2,$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 4x - 5 \cdot 6 =$$
$$= 4x - 30,$$

$$4x - 30 = 0,$$

$$x = 7,5.$$

Ответ : 7,5

Следствие 2.

Косинус угла между векторами выражается формулой

$$\cos \alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}.$$

№1. Дано :

$$\vec{a} \{1;1\}, \vec{b} \{3;4\}$$

Найти : α

Решение.

$$\cos \alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}, \vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \cdot 3 + 1 \cdot 4 = 7,$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}, |\vec{b}| = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5,$$

$$\cos \alpha = \frac{7}{5\sqrt{2}}.$$

Свойства скалярного произведения векторов

Для векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ и любого числа k справедливы соотношения:

$$1. \vec{a}^2 \geq 0, \text{ причём } \vec{a}^2 > 0 \text{ при } \vec{a} \neq 0.$$

$$2. \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a} \text{ (переместительный закон).}$$

$$3. (\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c} \text{ (распределительный закон).}$$

$$4. (k\vec{a}) \cdot \vec{b} = k(\vec{a} \cdot \vec{b}) \text{ (сочетательный закон).}$$

№1054

Дано:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{c} = 60^\circ,$$

$$|\vec{a}| = 1, |\vec{b}| = |\vec{c}| = 2,$$

Найти: $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c}$

Решение.

$$(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c},$$

$$\vec{a} \cdot \vec{c} = |\vec{a}| \cdot |\vec{c}| \cdot \cos 60^\circ = 1 \cdot 2 \cdot 0,5 = 1,$$

$$\vec{b} \cdot \vec{c} = |\vec{b}| \cdot |\vec{c}| \cdot \cos 60^\circ = 2 \cdot 2 \cdot 0,5 = 2,$$

$$(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = 1 + 2 = 3.$$