



Понятие предела функции в точке

Основные вопросы:

- *Определение предела функции в точке, бесконечно малой и бесконечно большой функции в точке. Связь между б/малыми и б/большими функциями в точке.*
- *Основные теоремы о пределах функций (суммы, произведения и частного).*



Предел функции

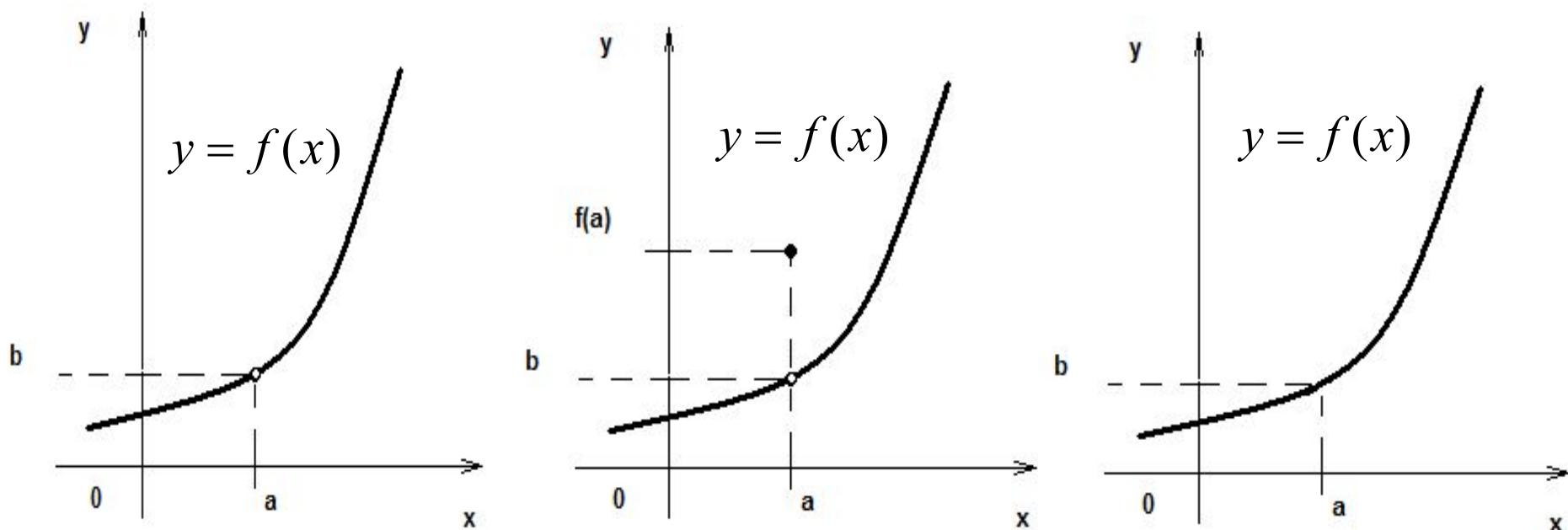
Предел – одно из основных понятий математического анализа. Понятие предела использовалось еще Ньютоном во второй половине XVII века и математиками XVIII века, такими как Эйлер и Лагранж, однако они понимали предел интуитивно. Первые строгие определения предела дали Больцано в 1816 году и Коши в 1821 году.



РАЗЛИЧАЮТ – предел функции
в точке **И** предел функции на
бесконечности.

● ● ●

**Рассмотрим функции, графики
которых изображены на следующих
рисунках:**



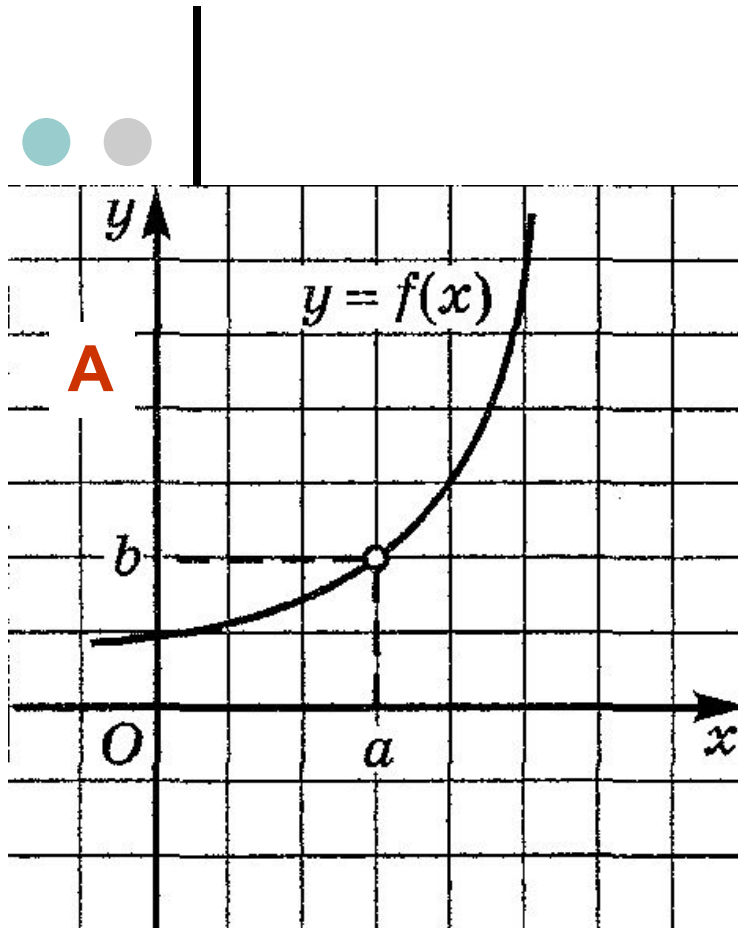
Во всех трех случаях изображена одна и та же кривая, но все же изображают они три разные функции, отличающиеся друг от друга своим поведением в точке $x = a$.

Рассмотрим каждый из этих графиков подробнее:

Случай 1.

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$$

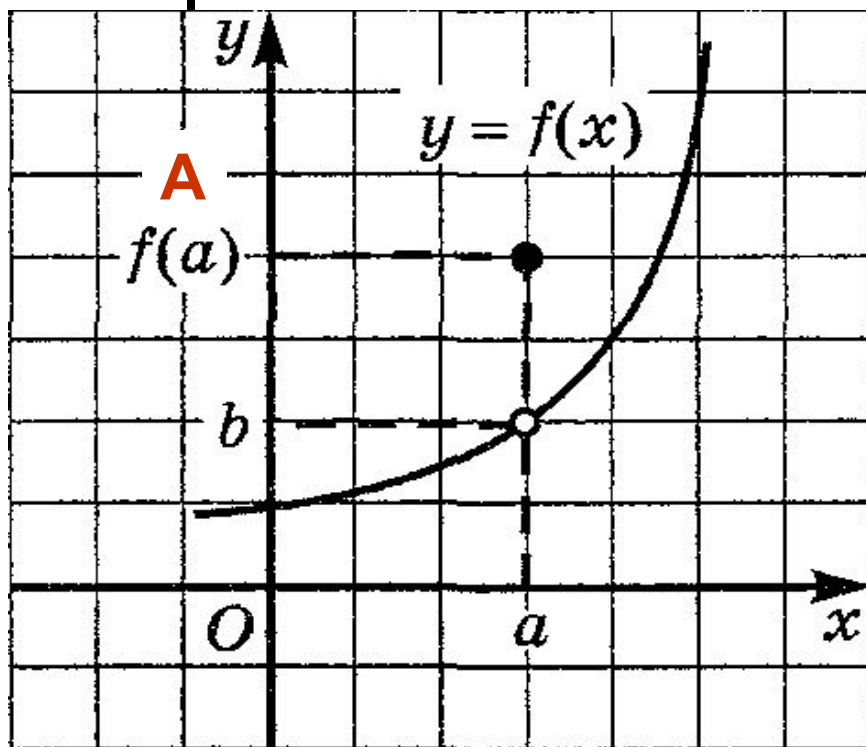
$f(a)$ – не существует

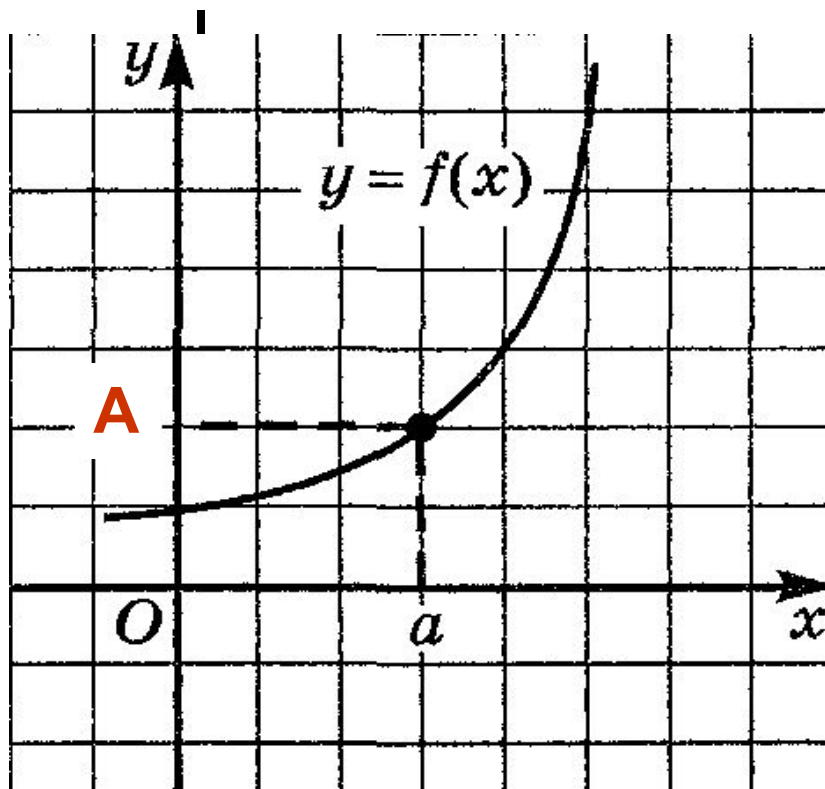


Случай 2.

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$$

$$f(a) \neq A$$



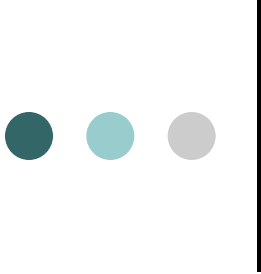


Случай 3.

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$$

$$f(a) = A$$

В этом случае говорят, что функция непрерывна в точке a



Для всех трех случаев используется одна и та же запись:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b,$$

которую читают: «предел функции $y = f(x)$ при стремлении x к a равен b ».

Содержательный смысл этой фразы следующий: если значения аргумента выбирать все ближе и ближе к значению $x = a$, то значения функции все меньше и меньше отличаются от предельного значения b .

Или можно сказать так: в достаточно малой окрестности точки a справедливо приближенное равенство:

$$f(x) \approx b$$

При этом сама точка $x = a$ исключается из рассмотрения.

● Предел функции в точке

Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0 , кроме, быть может самой точки x_0 .

Число A называют пределом функции в точке x_0 (или при $x \rightarrow x_0$), если для любого положительного ε найдется такое положительное число δ , что для всех x из δ – окрестности точки x_0 справедливо неравенство:

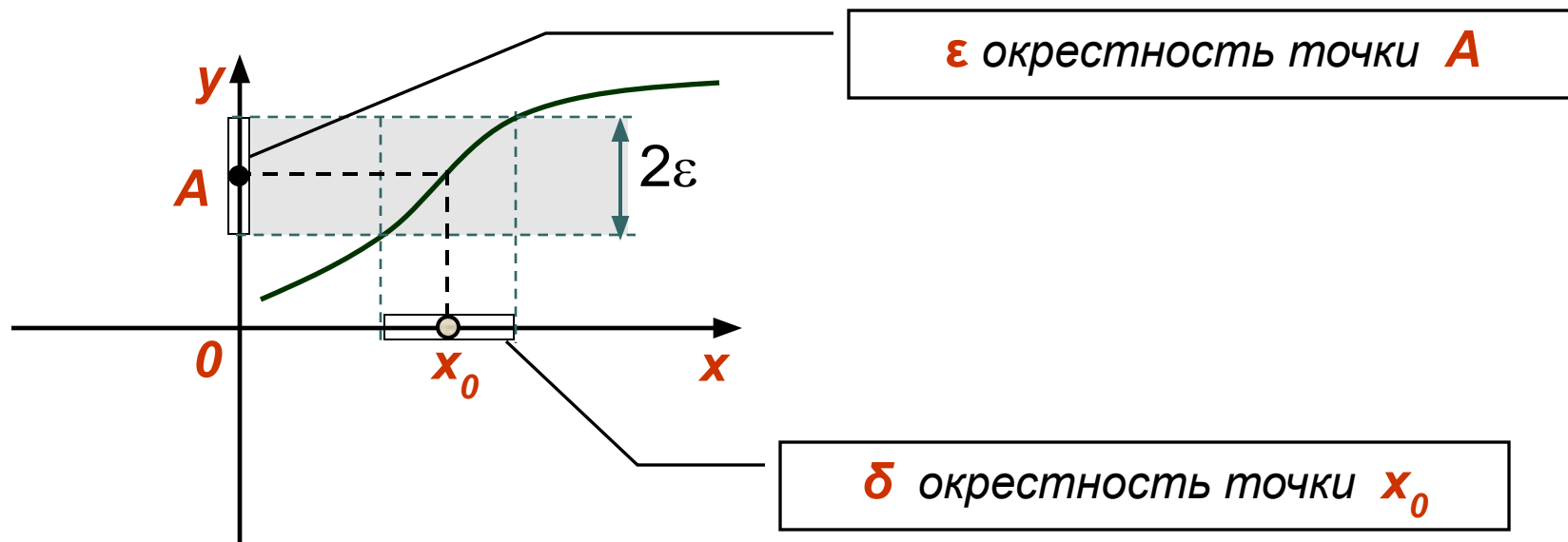
$$|f(x) - A| < \varepsilon$$

$$\forall \varepsilon > 0; \exists \delta > 0; \forall x : |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$$

● Предел функции в точке

$$\forall \varepsilon > 0; \exists \delta > 0; \forall x : |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$$



Геометрический смысл предела: для всех x из δ – окрестности точки x_0 точки графика функции лежат внутри полосы, шириной 2ε , ограниченной прямыми: $y = A + \varepsilon$, $y = A - \varepsilon$.

Прежде чем перейти к разбору решений примеров заметим, что если предел функции $y = f(x)$ при стремлении x к a равен значению функции в точке $x = a$, то в таком случае функцию называют **непрерывной**.

График такой функции представляет собой сплошную линию, **без «проколов» и «скачков»**.



Функцию $y = f(x)$ называют **непрерывной на промежутке** X , если она непрерывна в каждой точке этого промежутка.

Примерами непрерывных функций на всей числовой прямой являются: $y = C$, $y = kx + b$, $y = ax^2 + by + c$,

$$y = |x|, \quad y = x^n, \quad n \in \mathbb{N},$$

Функция $y = \sqrt{x}$ непрерывна на луче $[0, +\infty)$, а функция $y = x^{-n}$, $n \in \mathbb{N}$ непрерывна на промежутках $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.



Предел функции в точке

Число **B** называется
пределом функции в точке
a, если для всех значений **x**
, достаточно близких к **a** и
отличных от **a**, значение
функции $f(x)$ сколь угодно
мало отличается

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$$

от **B**.

Теорема.

Если функция $f(x)$ имеет предел в точке x_0 , то этот предел **единственный**.



Бесконечно малая функция и бесконечно большая функция.

- Функция $\alpha(x)$ называется бесконечно малой при $x \rightarrow a$ (здесь a – конечное число или ∞), если

$$\lim_{x \rightarrow a} \alpha(x) = 0.$$

- Функция $f(x)$ называется бесконечно большой функцией (или бесконечно большой величиной) при $x \rightarrow a$, если

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$$



Графическая иллюстрация

$$\bullet \quad x \rightarrow 0 \longrightarrow \frac{1}{x} \rightarrow \infty$$

$$x \rightarrow \infty \longrightarrow y = \frac{1}{x} \rightarrow 0$$

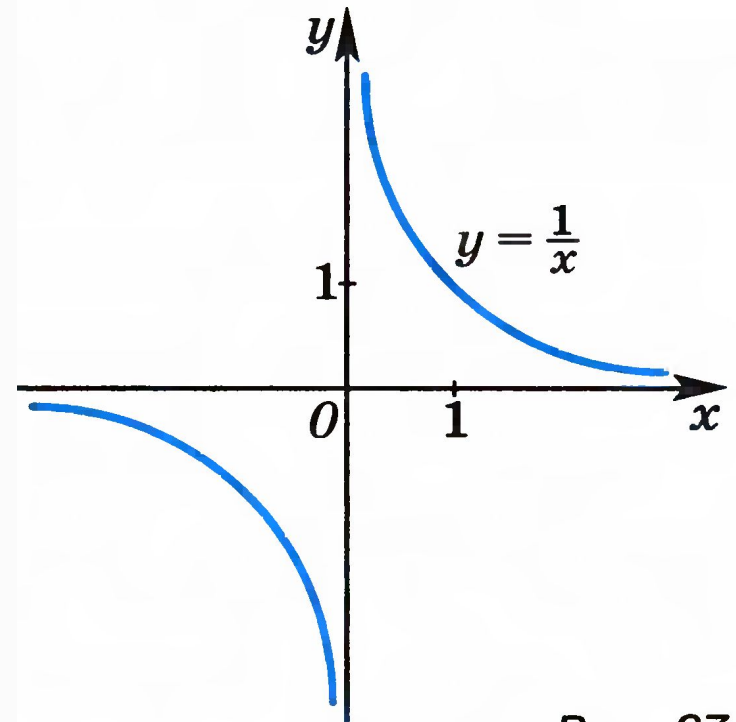


Рис. 37



Таким образом, величина, обратная бесконечно малой, есть бесконечно большая, и наоборот.

ТЕОРЕМА 1.

Предел **СУММЫ** (разности) 2-х функций равен **СУММЕ** (разности) их пределов, если последние существуют

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$$



ТЕОРЕМА 2.

Предел константы равен самой этой константе.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} C = C$$



ТЕОРЕМА 3.

Предел ПРОИЗВЕДЕНИЯ 2-х функций равен ПРОИЗВЕДЕНИЮ их пределов, если последние существуют

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$$



ТЕОРЕМА 4.

Предел ОТНОШЕНИЯ 2-х функций
равен ОТНОШЕНИЮ их пределов,
если последние существуют и
ПРЕДЕЛ ЗНАМЕНАТЕЛЯ ОТЛИЧЕН
ОТ 0:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)}, \text{ если } \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \neq 0$$

ТЕОРЕМА 5.

**Постоянный множитель
можно выносить за знак
предела**

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (k \cdot f(x)) = k \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$$



ТЕОРЕМА 6.

Предел СТЕПЕНИ
переменного равен той же
степени предела основания:

$$\lim_{x \rightarrow a} (z^n) = \left(\lim_{x \rightarrow a} z \right)^n$$



Вычисление пределов

**Вычисление
предела:**

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$$

начинают с подстановки предельного значения x_0 в функцию $f(x)$.

Если при этом получается конечное число, то предел равен этому числу.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x - 1}{x^2} = \frac{3 \cdot 1 - 1}{1^2} = 2$$

Если при подстановки предельного значения x_0 в функцию $f(x)$ получаются выражения вида:



то предел будет равен:

$$\frac{C}{0} = \infty \quad \frac{C}{\infty} = 0$$

Вычислить пределы:

$$\lim_{x \rightarrow 3} (x^2 - 7x + 4) = 3^2 - 7 \cdot 3 + 4 = -8;$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 - 2x} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+2)}{x(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+2}{x} = 2;$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x^2 + 7x + 6}{(x+2)^2} \stackrel{(0/0)}{=} \lim_{x \rightarrow -2} \frac{2(x+2)(x+\frac{3}{2})}{(x+2)^2} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x+3}{x+2} = \infty;$$



Примеры

Пример 2. Вычислить $\lim_{x \rightarrow 1} (x^3 - 2x^2 + 5x + 3)$.

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x^3 - 2x^2 + 5x + 3) = 1^3 - 2 \cdot 1^2 + 5 \cdot 1 + 3 = 7.$$

Пример 4. Вычислить $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 - 9}{4x + 12}$.

$$\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 - 9}{4x + 12} = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{(x - 3)(x + 3)}{4(x + 3)} = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x - 3}{4} = \frac{-3 - 3}{4} = -1,5.$$



Вычисление пределов

Часто при подстановке предельного значения x_0 в функцию $f(x)$ получаются выражения следующих видов:

$$\frac{0}{0}; \quad \frac{\infty}{\infty}; \quad \infty - \infty$$

Эти выражения называются **неопределенности**, а вычисление пределов в этом случае называется **раскрытие неопределенности**.





Методы вычисления пределов на неопределенность

$$\frac{0}{0}, \frac{c}{0}, \frac{c}{\infty}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2 - 2x}{2x^2 - 5x} = \frac{0 - 0}{0 - 0} = \left(\frac{0}{0} \right) -$$

Раскрыть соответствующую неопределенность - это значит найти предел (если он существует) соответствующего выражения, что, однако не всегда просто.



Правило № 1



- В большинстве случаев, чтобы раскрыть неопределенность вида $\frac{0}{0}$, достаточно числитель и знаменатель дроби разделить на множители, и затем сократить на множитель, приводящий к неопределенности.



Пример №1:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2 - 2x}{2x^2 - 5x} = \left(\frac{0}{0} \right)$$

Разложим числитель и знаменатель на множители:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(3x - 2)}{x(2x - 5)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x - 2}{2x - 5} = \frac{2}{5}$$



Пример № 2:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x}{3x^2 + 2x} = \frac{\lim_{x \rightarrow 0} 4x}{\lim_{x \rightarrow 0} (3x^2 + 2x)} = \frac{4 * 0}{3 * 0 + 2 * 0} = \left(\frac{0}{0} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x}{x(3x + 2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4}{3x + 2} = \frac{4}{3 * 0 + 2} = 2.$$



Правило № 2



- Чтобы раскрыть неопределенность данного вида, зависящую от иррациональности, достаточно перевести иррациональность (или иррациональности) из числителя в знаменатель или из знаменателя в числитель и сократить на множитель, приводящий к неопределенности.



Раскрытие неопределенностей

◆ Раскрытие неопределенности $\frac{0}{0}$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 14x - 32}{x^2 - 6x + 8} &= \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+16)}{(x-2)(x-4)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+16}{x-4} = \frac{18}{-2} = -9\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1} - 1}{x} &= \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x+1} - 1) \cdot (\sqrt{x+1} + 1)}{x \cdot (\sqrt{x+1} + 1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+1-1}{x \cdot (\sqrt{x+1} + 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x+1} + 1}\end{aligned}$$

Если $f(x)$ - иррациональная дробь, необходимо умножить числитель и знаменатель дроби на выражение, сопряженное числителю.

Раскрытие неопределенности

- При нахождении предела иногда сталкиваются с неопределенностями вида $\left(\frac{0}{0}\right), \left(\frac{\infty}{\infty}\right), (\infty - \infty), (1^\infty), (0^\infty), (0^0)(\infty^0)$.
- Отыскание предела в таких случаях называется раскрытием неопределенности.

Для того, чтобы раскрыть неопределенность ∞/∞ необходимо разделить числитель и знаменатель на x в старшей степени.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 3x - 5}{1 + x + 3x^2} = \frac{\infty}{\infty} = (*) \quad \text{Разделим числитель и знаменатель на } x^2$$

$$(*) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2x^2 - 3x - 5}{x^2}}{\frac{1 + x + 3x^2}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2x^2}{x^2} - \frac{3x}{x^2} - \frac{5}{x^2}}{\frac{1}{x^2} + \frac{x}{x^2} + \frac{3x^2}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 - \frac{3}{x} - \frac{5}{x^2}}{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} + 3} = \frac{2}{3}$$

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^3 + 15x^2 + 9x + 1}{5x^4 + 6x^2 - 3x - 4} &= \frac{\infty}{\infty} = (*) \quad \text{Разделим числитель и знаменатель на } x^4 \\
 (*) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{7x^3}{x^4} + \frac{15x^2}{x^4} + \frac{9x}{x^4} + \frac{1}{x^4}}{\frac{5x^4}{x^4} + \frac{6x^2}{x^4} - \frac{3x}{x^4} - \frac{4}{x^4}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\overset{x \rightarrow 0}{\frac{7}{x}} + \overset{x \rightarrow 0}{\frac{15}{x^2}} + \overset{x \rightarrow 0}{\frac{9}{x^3}} + \overset{x \rightarrow 0}{\frac{1}{x^4}}}{5 + \overset{x \rightarrow 0}{\frac{6}{x^2}} - \overset{x \rightarrow 0}{\frac{3}{x^3}} - \overset{x \rightarrow 0}{\frac{4}{x^4}}} = \\
 &= \frac{0 + 0 + 0 + 0}{5 + 0 - 0 - 0} = \frac{0}{5} = 0
 \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 3x - 5}{x + 1} = \frac{\infty}{\infty} = (*) \quad \text{Разделим числитель и знаменатель на } x^2$$

$$(*) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2x^2 - 3x - 5}{x^2}}{\frac{x + 1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 - \frac{3 \rightarrow 0}{x} - \frac{5 \rightarrow 0}{x^2}}{\frac{1}{x} \rightarrow 0 + \frac{1}{x^2} \rightarrow 0} = \frac{2}{0} = \infty$$

подразумевается не деление на ноль (делить на ноль нельзя), а деление на бесконечно малое число.

Таким образом, при раскрытии неопределенности может получиться *конечное число*, ноль или бесконечность.

Задание:

$$\lim_{x \rightarrow 2} (2x^2 - 3x + 4);$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (3x^3 + x^2 + 8x + 10);$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x + 3)(x - 2)}{x + 2};$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{3}{2x - 6};$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^3 - 2x^2}{5x^3 - 4x^2};$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x - 3}{x^2 - 9};$$



Упражнения:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x^3 - 3x + 1}{x - 4} + 1 \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^3 - 2x^2}{5x^3 - 4x^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x - 3}{x^2 - 9}$$

$$\lim_{x \rightarrow 6} \frac{6 - x}{3 - \sqrt{x + 3}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 5x + 10}{x^2 - 25}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} (2x^2 - 3x + 4)$$

$$\lim_{x \rightarrow -3} \frac{2x^2 + x - 15}{3x^2 + 5x - 12}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x^3 - 3x^2}{2x^2 + 5}$$

