

Подготовка к ОГЭ математика 9 практикум



*учитель математики: Цыганкова Светлана Ивановна
МБОУ Лицей №1*

«Нет царского пути в геометрии»

Эвклид

Решение практических задач ОГЭ. Методы, способствующие решению геометрических задач.

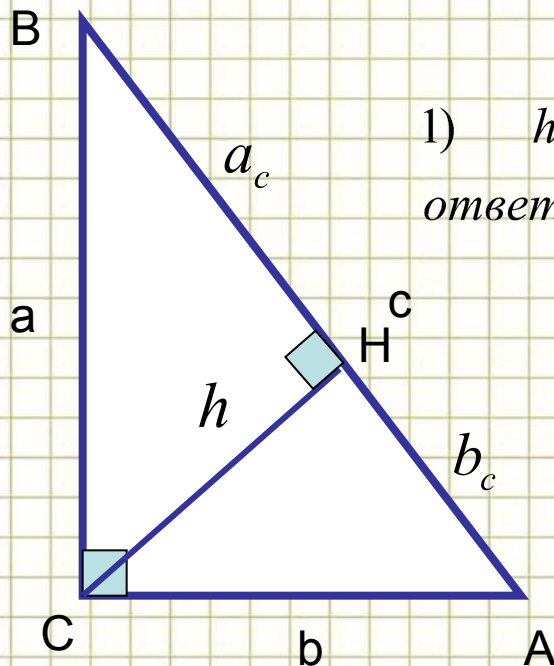


Метод ключевой задачи

Ключевая задача:

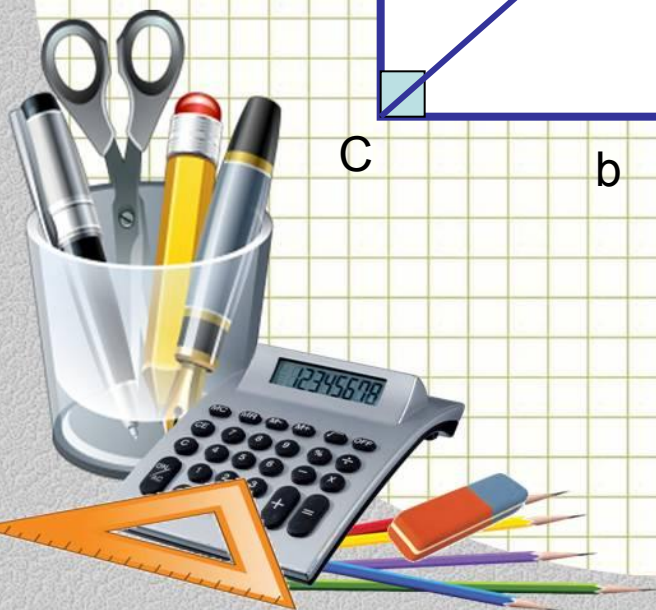
В прямоугольном треугольнике высота, проведённая к гипотенузе, делит её на отрезки 18 и 32. Найти высоту.

Решение:



$$1) \quad h^2 = a_c b_c, \quad h^2 = 32 \cdot 18; \quad h = \sqrt{32 \cdot 18} = 24$$

ответ: 24

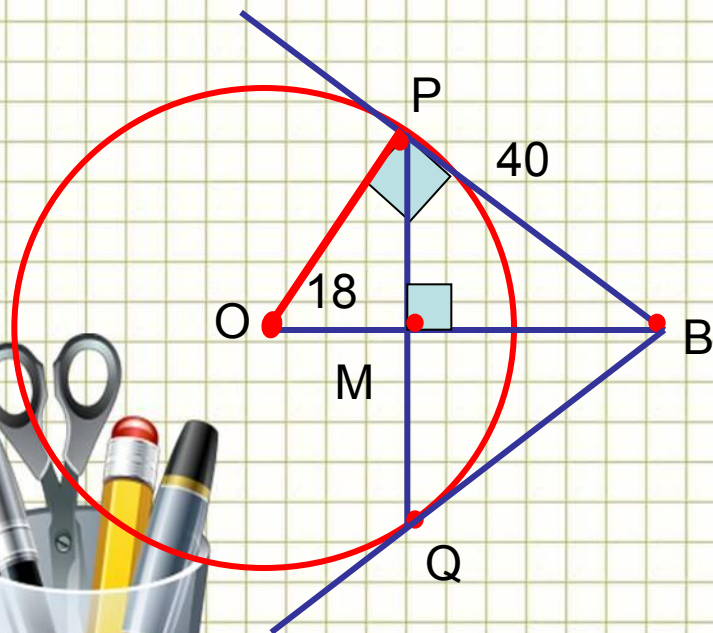


Задача 1

Из точки В к окружности проведены касательные ВР и ВQ (Р и Q – точки касания).

Найти длину хорды PQ, если длина отрезка $PB = 40$, а расстояние от центра окружности до хорды PQ равно 18.

Решение:



1) $PQ = 2PM$; $\triangle OPB$ – прямоугольный, PM – высота. $PB^2 = OB \cdot MB$

2) Пусть $BM = x$, $x > 0$, тогда

$$40^2 = (18 + x) \cdot x, \quad x^2 + 18x - 1600 = 0$$

$$x_1 = 32, x_2 = -50 \quad BM = 32, \quad -50 < 0$$

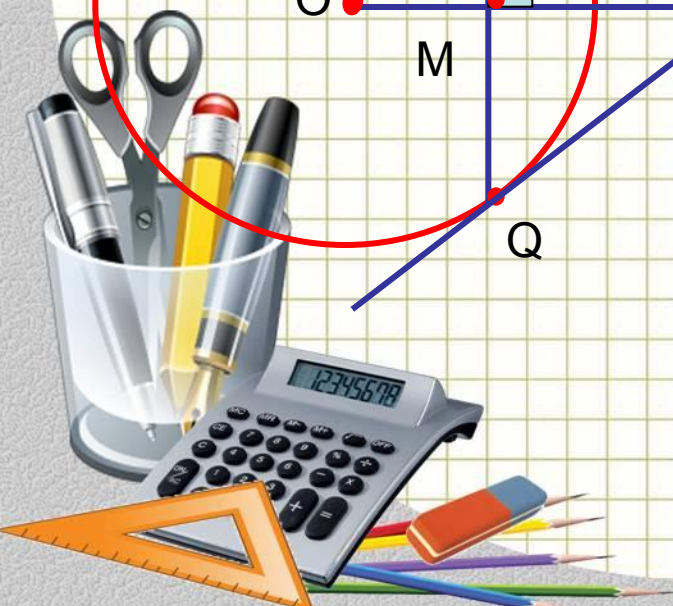
$$3) \quad PM^2 = OM \cdot MB,$$

$$PM^2 = 18 \cdot 32, \quad PM = 24$$

$$PQ = 48$$

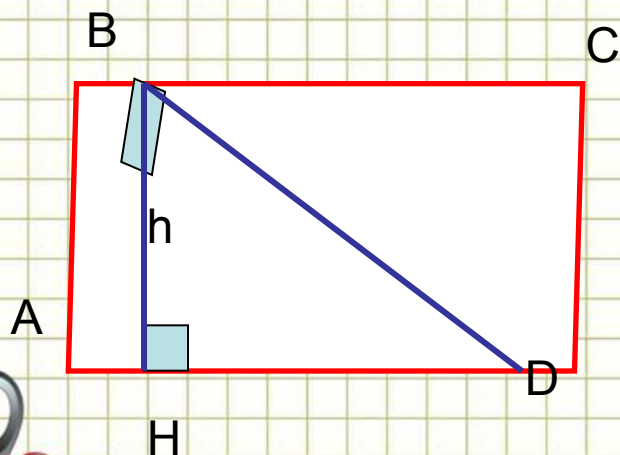
Ответ:

48



Задача 2

В параллелограмме одна из диагоналей перпендикулярна боковой стороне. Высота, проведённая из вершины, делит основание на отрезки длиной 32 и 18. Найдите площадь параллелограмма.



Решение:

1) Пусть $AD = a = 50$,

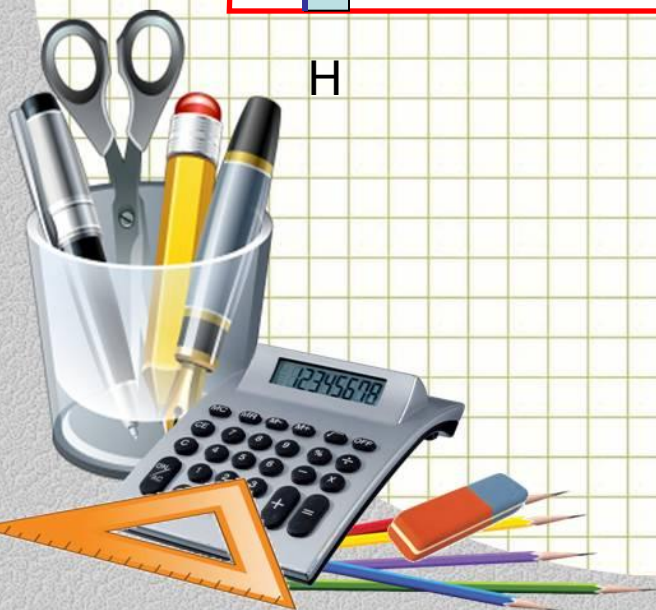
$BH = h$, тогда $S = h \cdot a$

2) $\triangle ABD (\angle B = 90^\circ)$, $h^2 = AH \cdot HD$,

$h = 24$

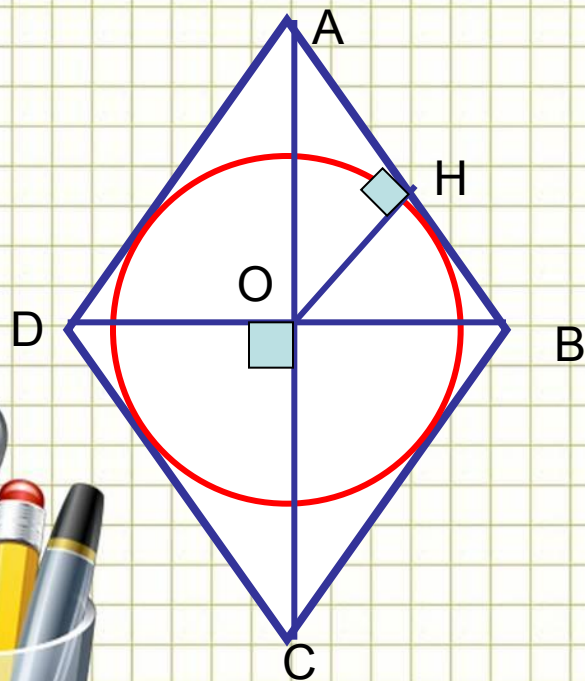
3) $S = ah$, $S = 24 \cdot 50 = 1200$

Ответ:
1200



Задача 3

Окружность вписана в ромб. Радиус, проведённый из центра окружности к стороне ромба, делит её на отрезки 18 и 24. Найдите радиус вписанной окружности.



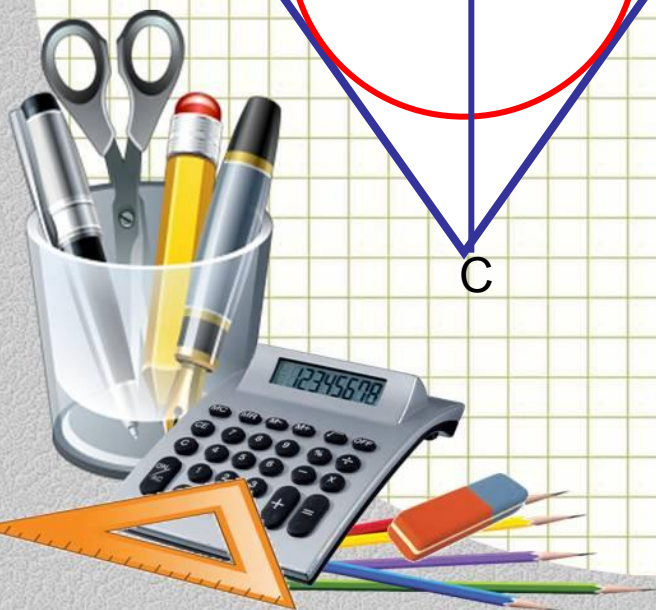
Решение:

Радиус вписанной в ромб окружности есть высота прямоугольного треугольника OAB,

$$r = OH = \sqrt{AH \cdot HB}$$

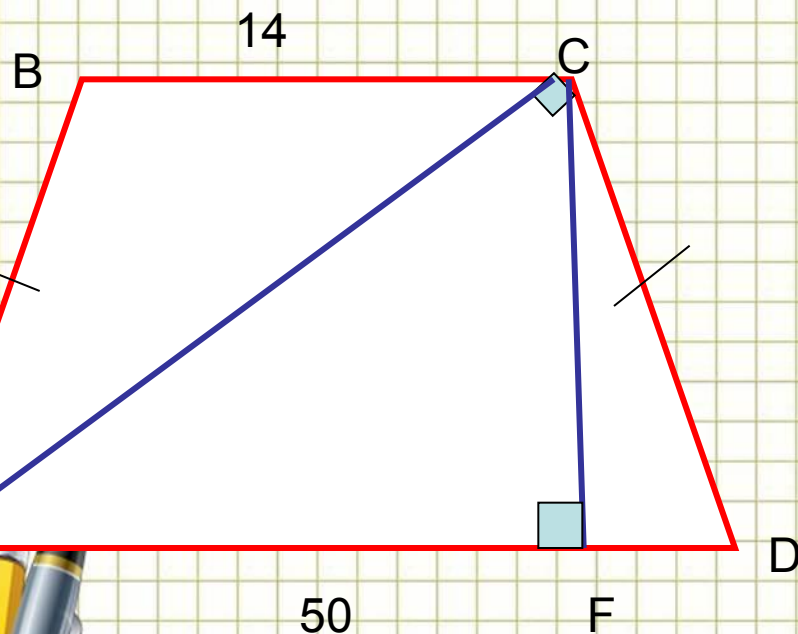
$$r = \sqrt{18 \cdot 24} = 12\sqrt{3}$$

Ответ: $12\sqrt{3}$



Задача 4

Найдите площадь равнобедренной трапеции, если её основания равны 14 и 50, а диагональ перпендикулярна боковой стороне.



Решение:

$$1) S = \frac{a+b}{2} h$$

$$2) \triangle ACD (\angle C = 90^\circ) \quad CF = \sqrt{AF \cdot FD}$$

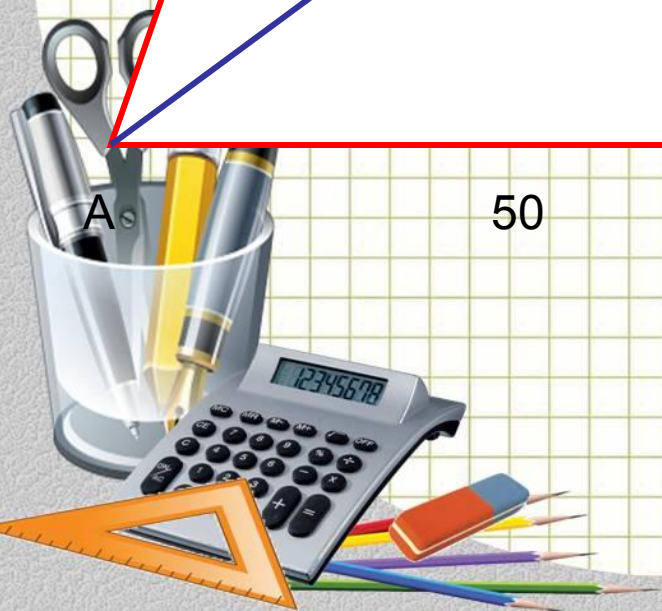
$$FD = \frac{AD - BC}{2} = \frac{50 - 14}{2} = 18$$

$$AF = 50 - 18 = 32$$

$$CF = \sqrt{32 \cdot 18} = 24$$

$$3) S = \frac{50 + 14}{2} \cdot 24 = 768$$

Ответ: 768



Задача 5

Большее основание трапеции является диаметром описанной окружности. Определите высоту трапеции, если её диагональ равна 40, а меньшей из отрезков, на которые делит основание высота, равен 18.

Решение:

1) Описать окружность можно только около равнобедренной трапеции.

2) $\triangle ABC$ – прямоугольный (

B – вписанный, опирается на диаметр).

3) $\triangle ABD$ ($\angle B = 90^\circ$)

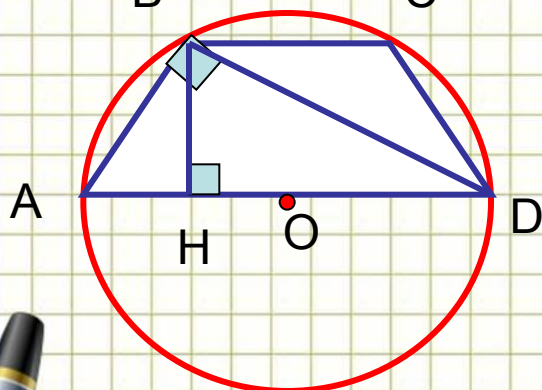
$$BD^2 = AD \cdot HD, \quad HD = x, \quad x > 0$$

$$40^2 = (18 + x)x, \quad x^2 + 18x - 1600 = 0$$

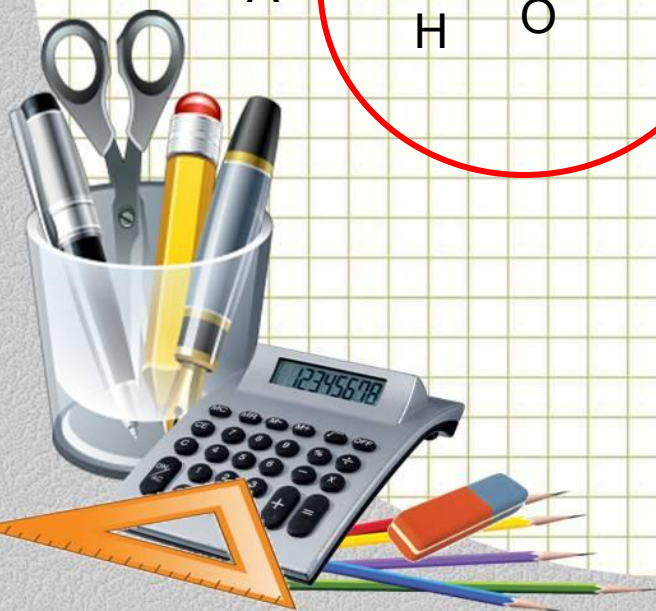
$$D = 81 + 1600 = 1681$$

$$x_1 = 32, \quad x_2 = -50, \quad -50 < 0$$

$$4) BH = \sqrt{AH \cdot HD} = \sqrt{18 \cdot 32} = 24$$



Ответ: 24



Задача 6

Равнобедренная трапеция с основаниями 64 и 36 описана около окружности. Найдите радиус окружности.

Решение:

1) $BM = BH$ (как отрезки касательных, проведённых из одной точки)

2) O – точка пересечения биссектрис

$\angle A, \angle B, \angle C$ и $\angle D$, тогда

$$\angle BOA = 90^\circ \text{ и } OH = r = \sqrt{AH \cdot HB}$$

3) т.к. $ABCD$ – описана около окружности,
то

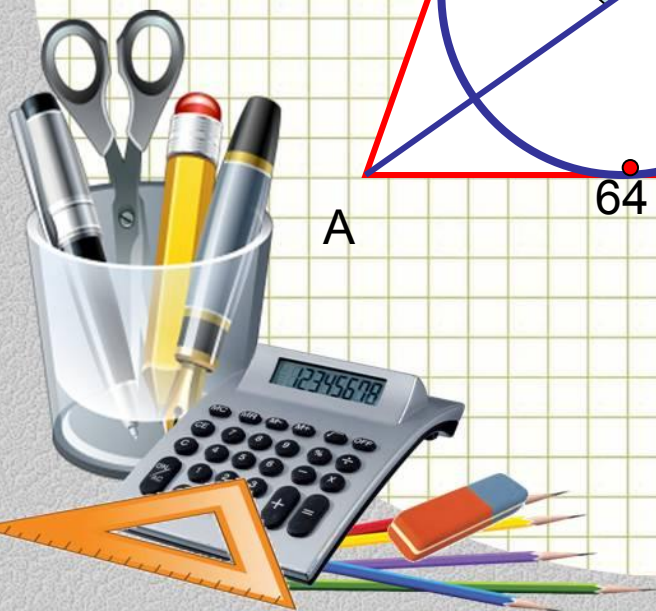
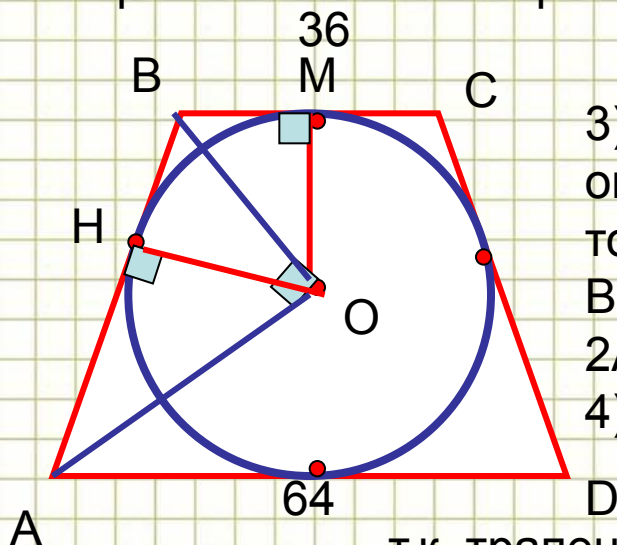
$$BC + AD = AB + CD, AB = CD, \\ 2AB = 36 + 64, AB = 50$$

4) т.к. $BM = BH$ и $BM = \frac{1}{2}BC$,

т.к. трапеция равнобедренная, то $BM = 18 = BH$

$$AH = 50 - 18 = 32 \\ 5) OH = r = \sqrt{32 \cdot 18} = 24$$

Ответ: 24



Часть 2

№24

В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом C известны катеты: AC=6, BC=8. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник ABC.

Дано: $\triangle ABC (\angle C = 90^\circ)$

AC=6, BC=8

Вписанная окружность

Найти: r

Решение:

Радиус вписанной окружности $r = \frac{a + b - c}{2}$

1) $\triangle ABC (\angle C = 90^\circ)$, по теореме Пифагора

$$AB = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$$

$$2) r = \frac{a + b - c}{2}, \quad r = \frac{6 + 8 - 10}{2} = 2$$

Ответ: 2

Вывод: $c = b - r + a - r$

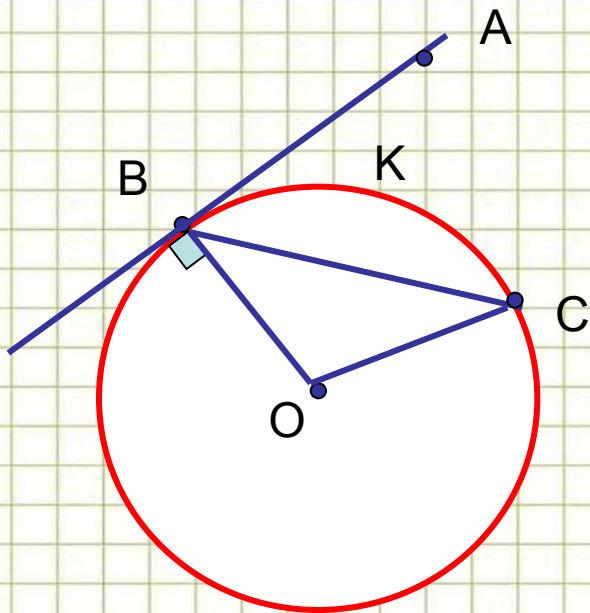
$$2r = b + a - c$$

$$r = \frac{a + b - c}{2}$$

Часть 2

№25

Докажите, что угол между касательной и хордой, имеющими общую точку на окружности, равен половине градусной меры дуги, заключённой между его сторонами.



Дано: $(O; r)$, AB – касательная .

Доказать: $\angle ABC = \frac{1}{2} \cup BKC$

Доказательств

о: $OB \perp AB$
(радиус, проведённый в точке касания перпендикулярен касательной)

2) пусть $\angle BOC = \alpha$, тогда $\cup BKC = \alpha$

(центральный угол равен дуге на которую опирается)

3) $\triangle BOC$,
т.к. $OB = OC$ (как радиусы одной окружности),

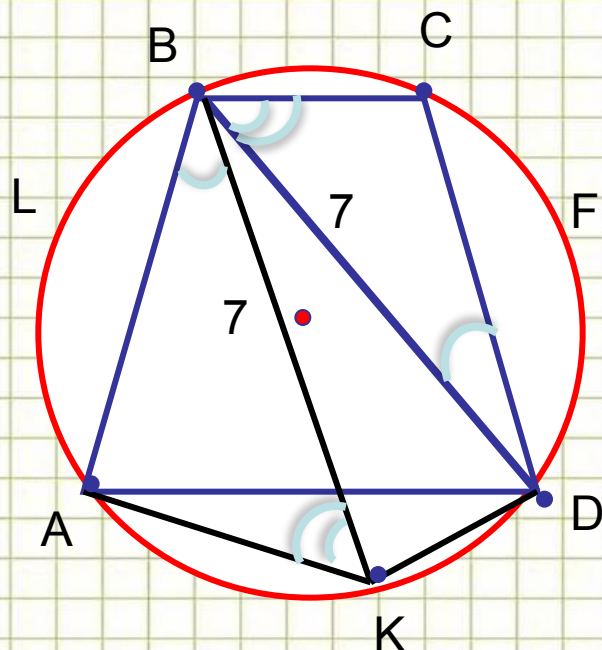
то

$$\angle CBO = \frac{180^\circ - \alpha}{2} = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$$

4) т.к. $OB \perp AB$, то

$$\angle ABC = 90^\circ - (90^\circ - \frac{\alpha}{2}) = \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2} \cup BKC \quad \text{ч.т.д.}$$

№26 Трапеция $ABCD$ с основаниями $AD = 6$, и $BC = 4$ и диагональю $BD = 7$ вписана в окружность. На окружности взята точка K , отличная от точки D так, что $BK = 7$. Найти длину отрезка AK .



Дано: $ABCD$ – трапеция, описанная окружность, $BC = 4$, $AD = 6$, $BD = 7$, $BK = 7$. K не совпадает с D .

Найти: AK

Решение:

1) Описать окружность можно только около равнобедренной трапеции, поэтому $BA = CD$ и $\angle BLA = \angle CFD$

2) т.к.

$BD = BK$, то $\angle BDK = \angle BKD$ и $\angle BAK = \angle BCD$, т.к. $\angle BLA = \angle CFD$,
то $\angle AK = \angle BC$, тогда $\angle ABK = \angle BDC$

3) т.к. $\angle BLA = \angle CFD$, то $\angle ABK = \angle CBD$

4) $\triangle ABK = \triangle BCD$ (по стороне $BD = BK$ и двум прилежащим к ней углам.

$\angle CBD = \angle AKB$ и $\angle ABK = \angle BDC$) из равенства треугольников следует, что $BC = AK = 4$.

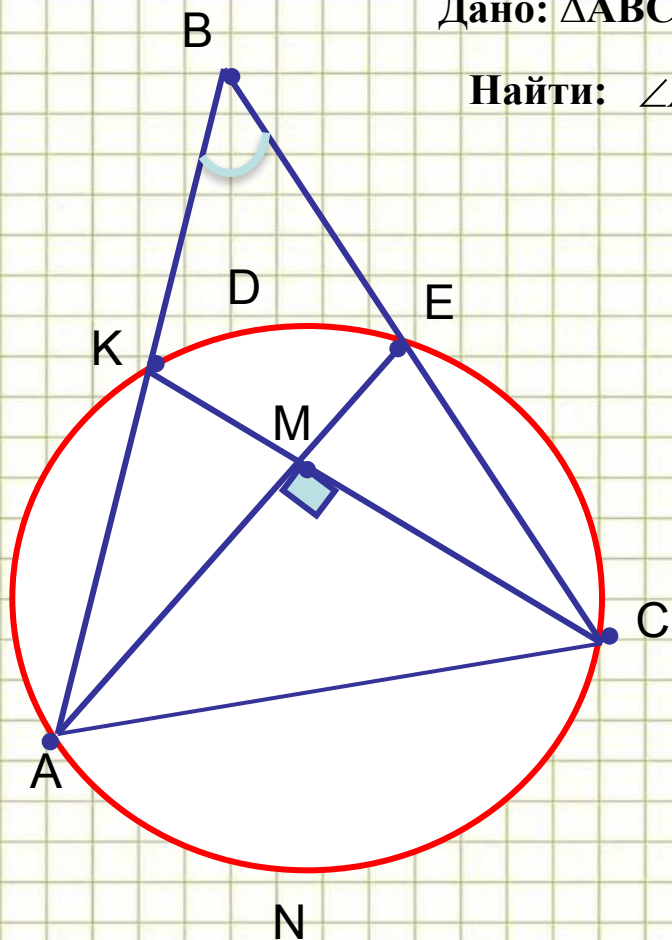
Ответ: $AK = 4$.

Часть 2

- №24** Окружность проходит через вершины A и C треугольника ABC и пересекает его стороны AB и BC в точках K и E соответственно. Отрезки AE и CK перпендикулярны. Найдите угол ABC , если угол KCB равен 20°

Дано: $\triangle ABC$, $A \in$ окружности, $C \in$ окружности, $AE \perp CK$, $\angle KCB = 20^\circ$

Найти: $\angle ABC$

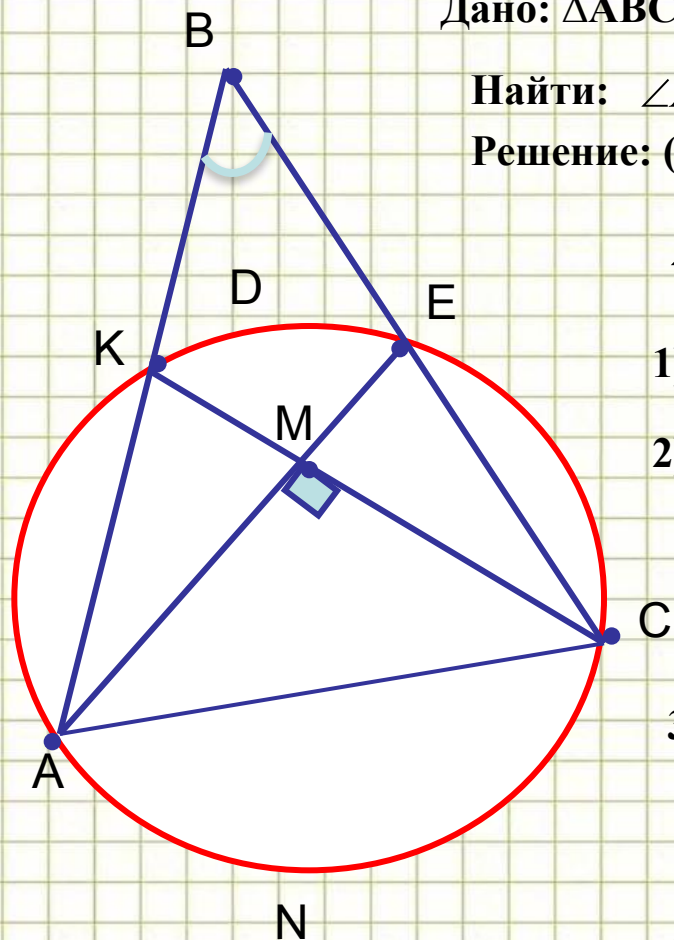


- №24** Окружность проходит через вершины А и С треугольника ABC и пересекает его стороны AB и BC в точках К и Е соответственно. Отрезки AE и СК перпендикулярны. Найдите угол ABC, если угол KCB равен 20°

Дано: $\triangle ABC$, А $\in$ окружности, С $\in$ окружности, $AE \perp CK$, $\angle KCB = 20^\circ$

Найти: $\angle ABC$

Решение: (при решении используем метод поэтапного решения)



$$\angle ABC = \frac{1}{2}(\cup ANC - \cup KDE)$$

1) т.к. $\angle KCB$ – вписанный, то $\cup KDE = 40^\circ$

2) $\angle AMC = \frac{1}{2}(\cup ANC + \cup KDE)$

$$90^\circ = \frac{1}{2}(\cup ANC + 40^\circ), \quad \cup ANC = 140^\circ$$

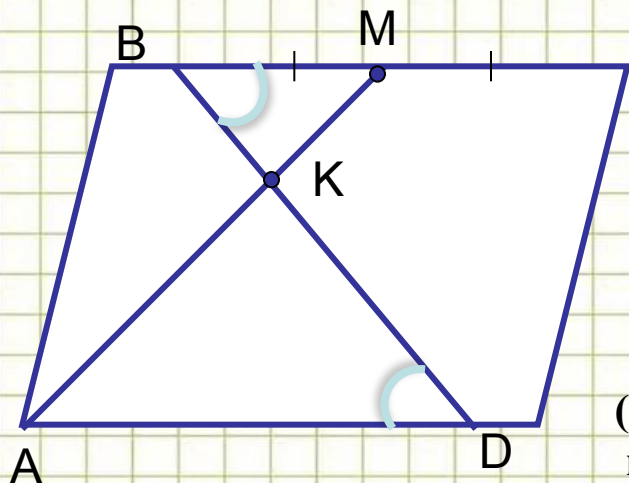
3) $\angle ABC = \frac{1}{2}(\cup ANC - \cup KDE)$

$$\angle ABC = \frac{1}{2}(140^\circ - 40^\circ) = 50^\circ$$

Ответ: $\angle ABC = 50^\circ$

Часть 2

№25 В параллелограмме $ABCD$ отмечена точка M – середина BC . Отрезок AM пересекается с диагональю BD в точке K . Докажите, что $BK : BD = 1 : 3$.



Дано: $ABCD$ – параллелограмм

$BM = MC$, $AM \cap BD = K$

Доказать: $BK : BD = 1 : 3$

Доказательство:

1) $\angle MBK = \angle KDA$

(как накрест лежащие при параллельных прямых BC и AD и секущей BD).

2) $\triangle BKM \sim \triangle ADK$

(по двум углам: $\angle AKM = \angle AKD$ – как вертикальные, $\angle MBK = \angle KDA$ из п.1)

При решении используется метод подобия и поэтапного решения.

3) Из подобия $\triangle BKM$ и $\triangle ADK$ следует:

$$\frac{BM}{AD} = \frac{BK}{KD}, \text{ т.к. } BM = \frac{1}{2}BC, \text{ а } BC = AD, \text{ то } AD = 2BM.$$

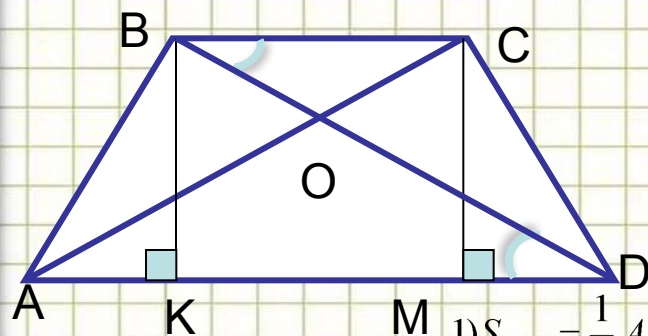
$$\text{Имеем } \frac{BM}{2BM} = \frac{BK}{KD} \text{ или } KD = 2BK.$$

$$4) \text{ Т.к. } BD = BK + KD, \text{ то } BD = 3BK \text{ и } \frac{BK}{BD} = \frac{BK}{3BK} = \frac{1}{3}, \text{ т.е. } BK : BD = 1 : 3 \quad \text{ч.т.д.}$$

Часть 2

№26

Диагонали AC и BD трапеции ABCD пересекаются в точке O.
Площади треугольников AOD и BOC равны соответственно 25 и 16.
Найдите площадь трапеции.



Дано: ABCD – трапеция, $AC \cap BD = O$

$$S_{AOB} = 25, S_{BOC} = 16$$

Найти: S_{ABCD}

Решение:

$$\left. \begin{aligned} 1) S_{ABD} &= \frac{1}{2} AD \cdot BK, \text{ где } BK \perp AD \\ S_{ACD} &= \frac{1}{2} AD \cdot CM, \text{ где } CM \perp AD \end{aligned} \right\} \text{т.к. } BC \parallel AD, \text{ то } BK = CM, \text{ т.е. } S_{ABD} = S_{ACD}.$$

$$\left. \begin{aligned} 2) S_{ABO} &= S_{ABD} - S_{AOD} \\ S_{COD} &= S_{ACD} - S_{AOD} \end{aligned} \right\} \Rightarrow S_{ABO} = S_{COD}$$

3) т.к. $BC \parallel AD$, и BD – секущая, то $\angle CBO = \angle ODA$
(как накрест лежащие)

4) $\triangle BOC \sim \triangle AOD$ (по двум углам: $\angle BOC = \angle AOD$, как вертикальные, $\angle CBO = \angle ODA$ по п.3)

$$\text{тогда: } \frac{S_{BOC}}{S_{AOD}} = \left(\frac{BO}{OD} \right)^2; \quad \frac{16}{25} = \left(\frac{BO}{OD} \right)^2; \quad \frac{BO}{OD} = \frac{4}{5}, \text{ т.к. } \frac{BO}{OD} > 0.$$

5) Т.к. $\triangle ABO$ и $\triangle AOD$ имеют общую высоту, то их площади относятся как стороны,

$$\text{соответствующие этим высотам, } \frac{S_{ABO}}{S_{AOD}} = \frac{BO}{OD}; \quad \frac{S_{ABO}}{25} = \frac{4}{5}, S_{ABO} = 20$$

$$6) S_{ABCD} = 16 + 20 + 25 + 20 = 81$$

Ответ: площадь трапеции 81.

Спасибо за внимание!

