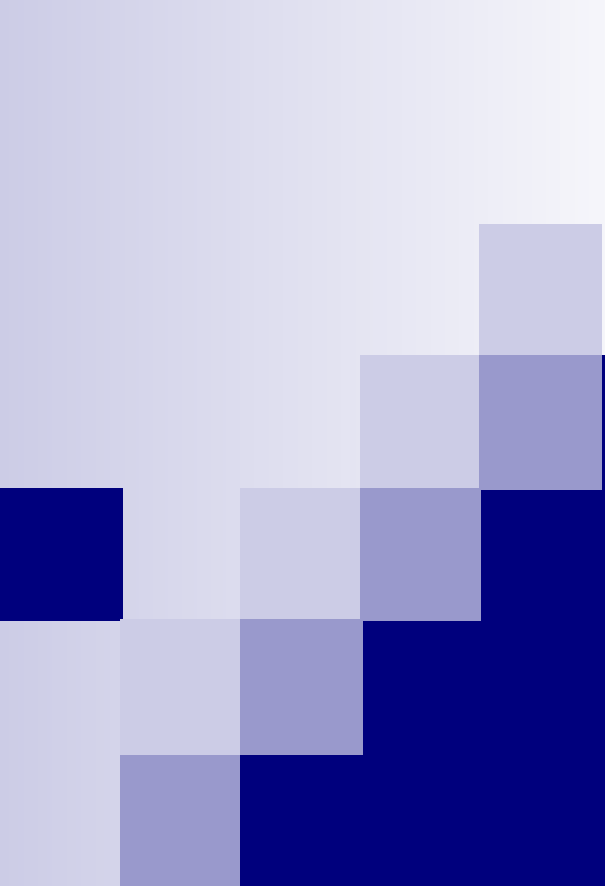




ЭЛЕКТРОМАГНЕТИЗМ

**Лекция «Основы электромагнитной
теории Максвелла»**

Общая характеристика теории Максвелла

- Основу теории Максвелла составляют четыре структурных уравнения, которые записываются в интегральной и дифференциальной формах. В интегральной форме они выражают соотношения для мысленно проведенных в ЭМП контуров и замкнутых поверхностей, а в дифференциальной – показывают, как связаны между собой характеристики ЭМП и плотности электрических зарядов и токов в каждой точке пространства.
- Дифференциальная и интегральная формы получаются друг из друга путем применения двух теорем векторного анализа:
 -  теоремы Остроградского-Гаусса;
 -  теоремы Стокса.

Теоремы векторного анализа

Теорема Остроградского-Гаусса: поток Φ_a вектора $\vec{a}$ сквозь произвольную замкнутую поверхность S равен объемному (тройному) интегралу от дивергенции этого вектора по объему, ограниченному этой поверхностью

$$\Phi_a = \oint_S \vec{a} dS = \int_V \operatorname{div} \vec{a} dV$$

Дивергенцией называется математическая операция, в результате которой из вектора получаем скаляр

$$\operatorname{div} \vec{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}$$

Теоремы векторного анализа

Теорема Стокса: циркуляция вектора $\vec{a}$ вдоль замкнутого контура L равна поверхностному интегралу от ротора (вихря) вектора $\vec{a}$ по замкнутой поверхности S

$$\oint_L \vec{a} d\vec{l} = \oint_S \text{rot } \vec{a} d\vec{S},$$

где ротор или вихрь определяется выражением

$$\text{rot } \vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} = \vec{\nabla} \vec{a} = \left(\frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k} \right) \vec{a}$$

$$\vec{\nabla} \vec{a} = \text{div } \vec{a}$$

$$\vec{\nabla} \vec{a} = \text{rot } \vec{a}$$

Первое уравнение Максвелла в интегральной и дифференциальной формах

$$\mathcal{E}_i = -\frac{d\Phi_m}{dt} = -\oint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S} = \oint_L \vec{E} d\vec{l} \qquad \text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

по сути, это закон электромагнитной индукции Фарадея с учетом выражения для магнитного потока

$$\mathcal{E}_i = -\frac{d\Phi_m}{dt} \qquad \Phi_m = \int_S \vec{B} d\vec{S}$$

- Максвелл предположил, что это верно не только для проводящего замкнутого контура, но и для любого мысленно проведенного в пространстве. Другими словами: переменное магнитное поле (МП) существует всегда при наличии вихревого (переменного) электрического поля, и наоборот. Они обуславливают друг друга как при наличии проводников, так и без них.
- Вихревое (переменное) электрическое поле в отличие от электростатического имеет отличную от нуля циркуляцию.

Ток смещения

■ Максвелл предположил, что источником МП может быть не только макроток (ток проводимости), но и вихревое (переменное) электрическое поле. Для количественной характеристики магнитного действия переменного электрического поля Максвелл ввел понятие **тока смещения** (по сути это – переменное электрическое поле).

Из теоремы Остроградского-Гаусса для вектора **D**

$$\oint_S \vec{D} d\vec{S} = q_{\text{своб}}^{\text{охват}}$$
$$I = \frac{dq}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\oint_S \vec{D} d\vec{S} \right) = \oint_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} d\vec{S} \qquad I = \oint_S j_{\text{смещ}} d\vec{S}$$
$$j_{\text{смещ}} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

Второе уравнение Максвелла в интегральной и дифференциальной формах

С учетом тока смещения закон полного тока для МП в веществе может быть переписан в виде **второго уравнения Максвелла в интегральной форме**

$$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = I_{\text{макро}} + I_{\text{смещ}} = \oint_S \left(\vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) d\vec{S}$$

и (по теореме Стокса) дифференциальной форме

$$\text{rot } \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

Для областей, где нет макротоков (токов проводимости) первое и второе уравнения Максвелла имеют симметричный вид

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad \text{rot } \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

Третье и четвертое уравнение Максвелла в интегральной и дифференциальной формах

Максвелл обобщил теорему Остроградского-Гаусса для электростатического поля в диэлектрике

$$\oint_S \vec{D} d\vec{S} = q_{своб}^{охват} = \int_V \rho(V) dV$$

- третье уравнение Максвелла в интегральной форме, с применением теоремы Остроградского-Гаусса получим дифференциальную (локальную) форму

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho(V)$$

Максвелл обобщил также теорему Остроградского-Гаусса для МП в вакууме, выражающую отсутствие особых – магнитных зарядов

$$\oint_S \vec{B} d\vec{S} = 0$$

– четвертое уравнение Максвелла в интегральной форме, в дифференциальной форме с учетом теоремы Остроградского-Гаусса

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0$$

Полная система структурных уравнений Максвелла для ЭМП в общем случае

№	Получено на основе	Интегральная форма	Дифференциальная форма
1	закон электромагнитной индукции Фарадея	$\oint_L \vec{E} d\vec{l} = - \oint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S}$	$rot \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$
2	закон полного тока для магнитного поля в веществе	$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = \oint_S \left(\vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) d\vec{S}$	$rot \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$
3	теоремы Остроградского—Гаусса для электростатического поля в диэлектрике	$\oint_S \vec{D} d\vec{S} = \int_V \rho(V) dV$	$div \vec{D} = \rho(V)$
4	теоремы Остроградского—Гаусса для МП в вакууме	$\oint_S \vec{B} d\vec{S} = 0$	$div \vec{B} = 0$

Материальные уравнения и граничные условия для ЭМП

Данные четыре структурных уравнения (табл. 1) дополняются тремя материальными уравнениями, характеризующими свойства среды. Для изотропных несегнетоэлектрических и неферромагнитных сред материальные уравнения имеют вид соответственно:

$$\vec{D} = \varepsilon \varepsilon_0 \vec{E}$$

$$\vec{B} = \mu \mu_0 \vec{H}$$

$$\vec{j} = \gamma \vec{E}$$

Также полную систему уравнений Максвелла дополняют граничными условиями для электрического и магнитного полей

$$\left\{ \begin{array}{l} D_{n2} - D_{n1} = \sigma, \\ E_{\tau 2} - E_{\tau 1} = 0, \\ B_{n2} - B_{n1} = 0, \\ H_{\tau 2} - H_{\tau 1} = j_{\text{поверхн}}. \end{array} \right.$$

Полная система структурных уравнений Максвелла для стационарных ЭП и МП при наличии зарядов и токов проводимости

№	Получено на основе	Интегральная форма	Дифференциальная форма
1	закон электромагнитной индукции Фарадея	$\oint_L \vec{E} d\vec{l} = 0$	$\operatorname{rot} \vec{E} = 0$
2	закон полного тока для магнитного поля в веществе	$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = \oint_S \left(\vec{j} \right) d\vec{S}$	$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j}$
3	теоремы Остроградского–Гаусса для электростатического поля в диэлектрике	$\oint_S \vec{D} d\vec{S} = \int_V \rho(V) dV$	$\operatorname{div} \vec{D} = \rho(V)$
4	теоремы Остроградского–Гаусса для МП в вакууме	$\oint_S \vec{B} d\vec{S} = 0$	$\operatorname{div} \vec{B} = 0$

Полная система уравнений Максвелла состоит из

- Четырех структурных уравнений в интегральной или дифференциальной форме
- Трех материальных уравнений
- Четырех граничных условий

ВСЕГО 11 уравнений



Благодарю за внимание