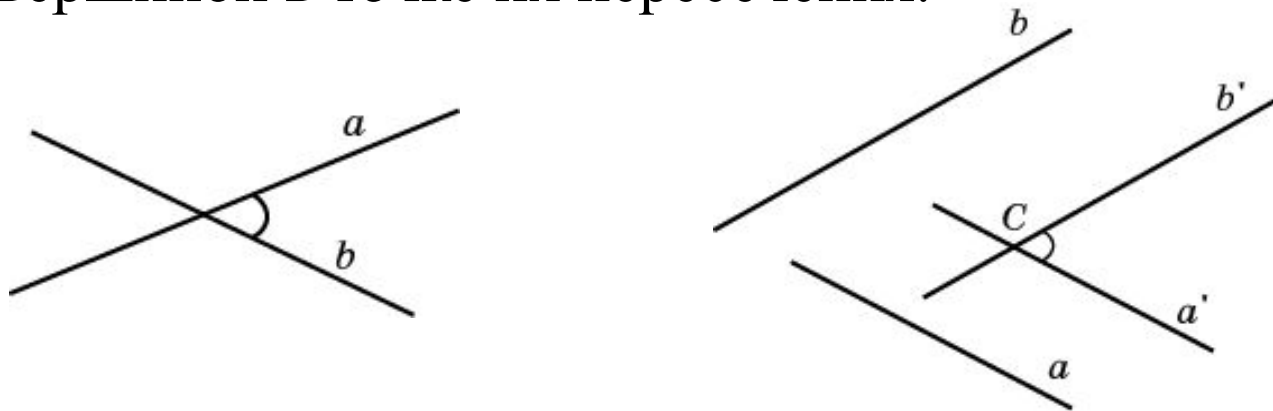


Угол в пространстве

Углом в пространстве называется фигура, образованная двумя лучами с общей вершиной и одной из частей плоскости, ограниченной этими лучами.

Углом между двумя пересекающимися прямыми в пространстве называется наименьший из углов, образованных лучами этих прямых с вершиной в точке их пересечения.



Углом между скрещивающимися прямыми называется угол между пересекающимися прямыми, соответственно параллельными данным.

Две прямые называются **перпендикулярными**, если угол между ними прямой.

Упражнение 1

Дана прямая в пространстве, на ней взята точка. Сколько можно построить прямых, проходящих через эту точку и перпендикулярных данной прямой?

Ответ: Бесконечно много.

Упражнение 2

Даны прямая и точка вне ее. Сколько можно построить прямых, проходящих через эту точку и перпендикулярных данной прямой?

Ответ: Бесконечно много.

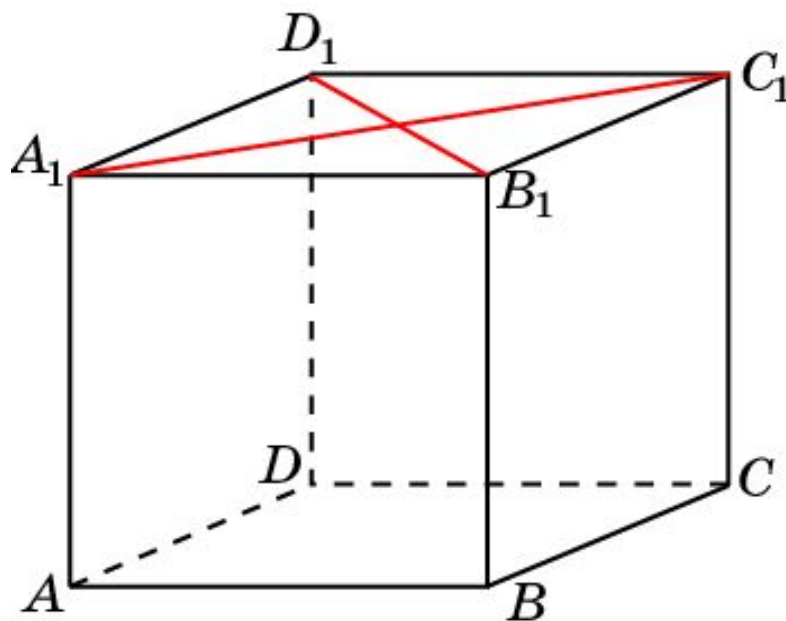
Упражнение 3

Из планиметрии известно, что две прямые, перпендикулярные третьей прямой, параллельны. Верно ли это утверждение для стереометрии?

Ответ: Нет.

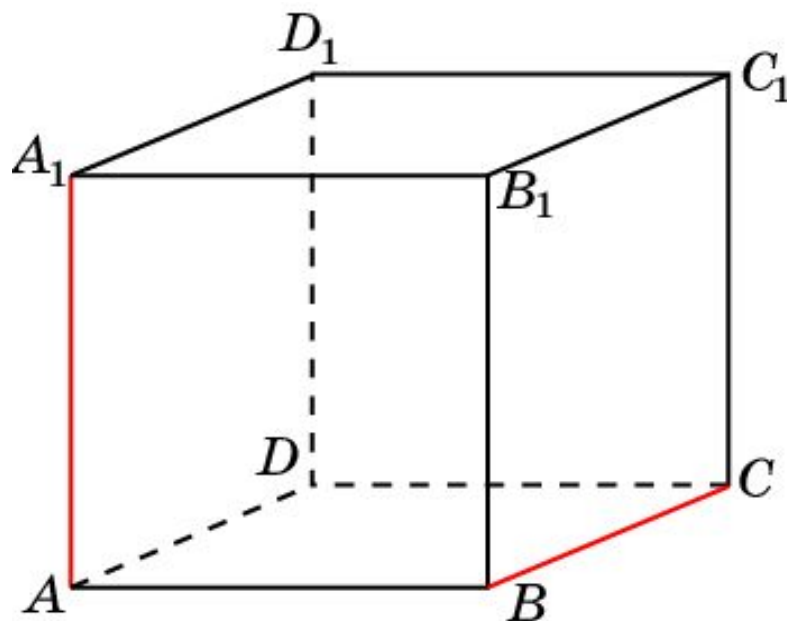
Куб

В кубе $A...D_1$ найдите угол между прямыми A_1C_1 и B_1D_1 .



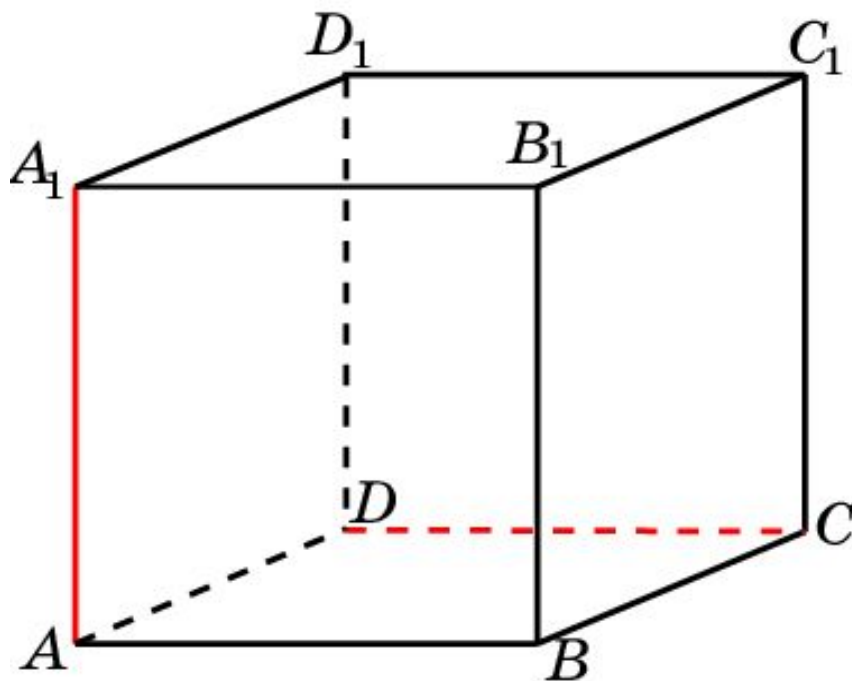
Ответ: 90° .

В кубе $A...D_1$ найдите угол между прямыми AA_1 и BC .



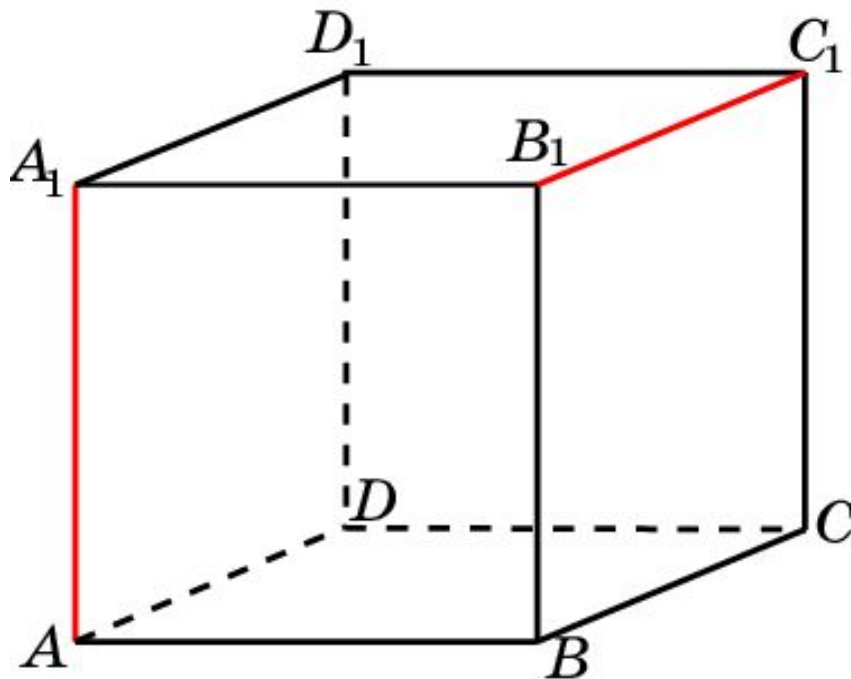
Ответ: 90° .

В кубе $A...D_1$ найдите угол между прямыми AA_1 и CD .



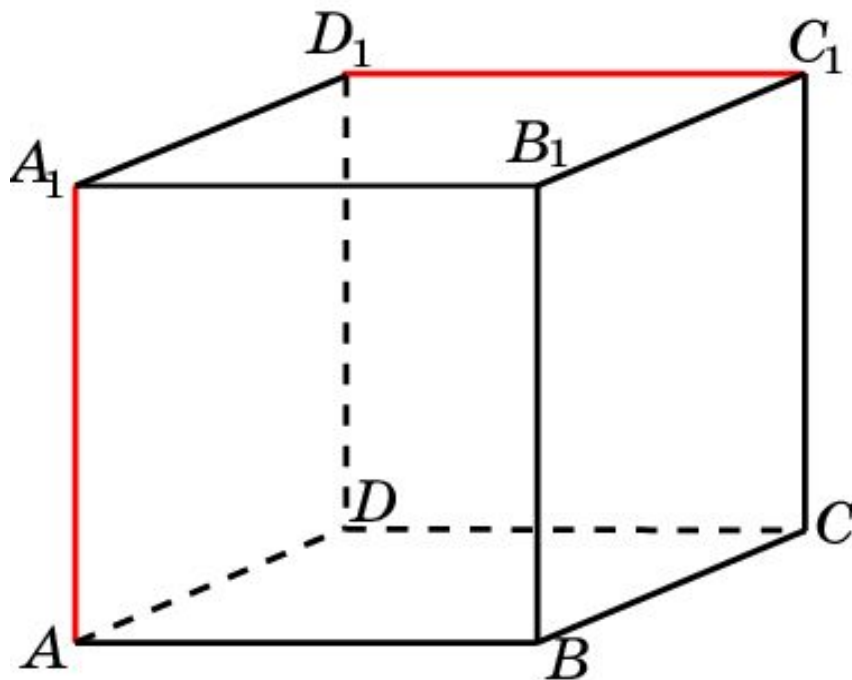
Ответ: 90° .

В кубе $A...D_1$ найдите угол между прямыми AA_1 и B_1C_1 .



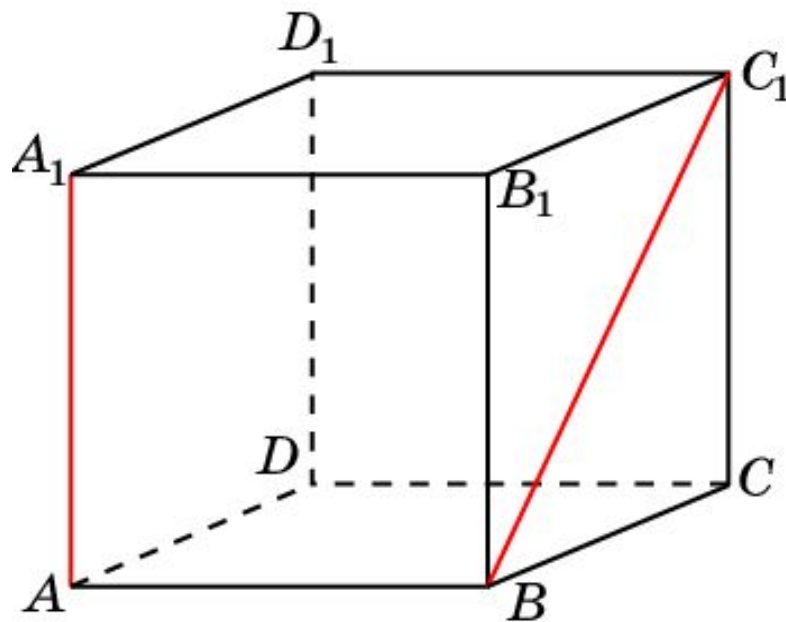
Ответ: 90° .

В кубе $A\dots D_1$ найдите угол между прямыми AA_1 и C_1D_1 .



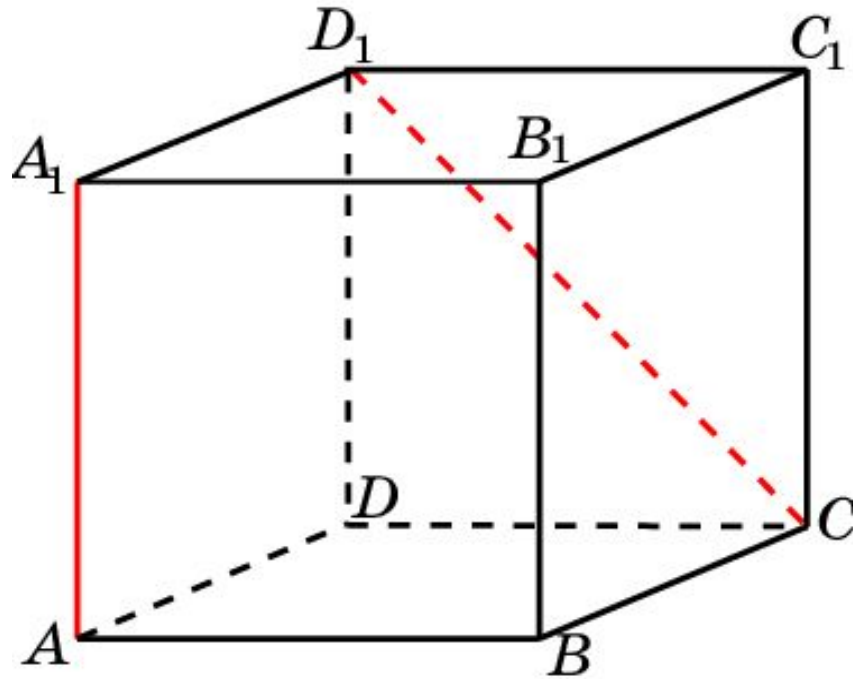
Ответ: 90° .

В кубе $A...D_1$ найдите угол между прямыми AA_1 и BC_1 .



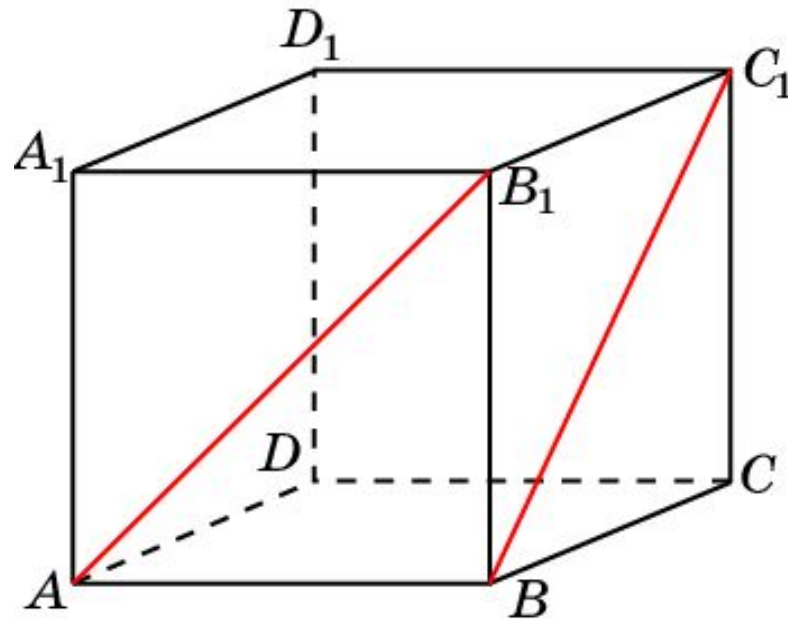
Ответ: 45° .

В кубе $A...D_1$ найдите угол между прямыми AA_1 и CD_1 .



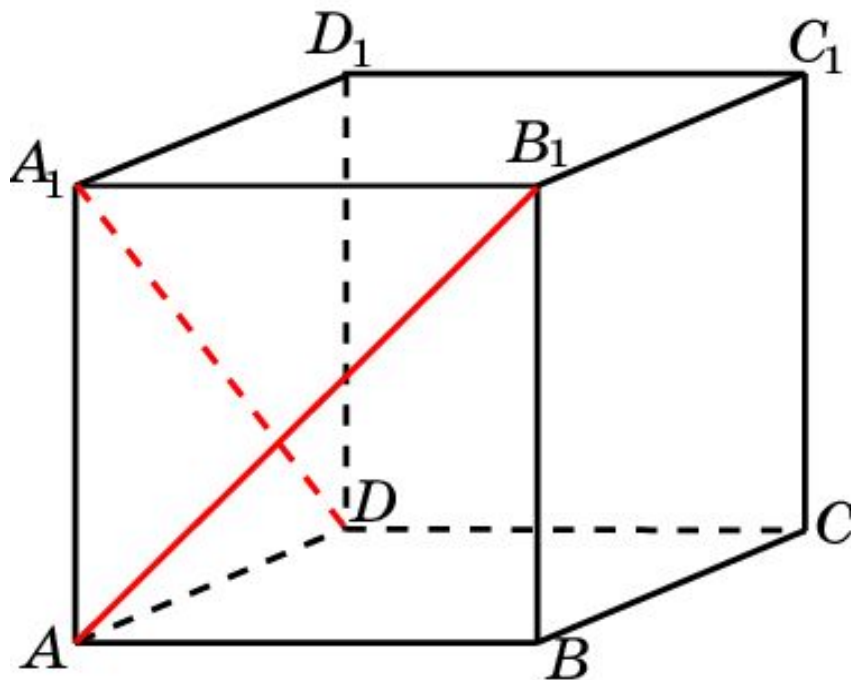
Ответ: 45° .

В кубе $A...D_1$ найдите угол между прямыми AB_1 и BC_1 .



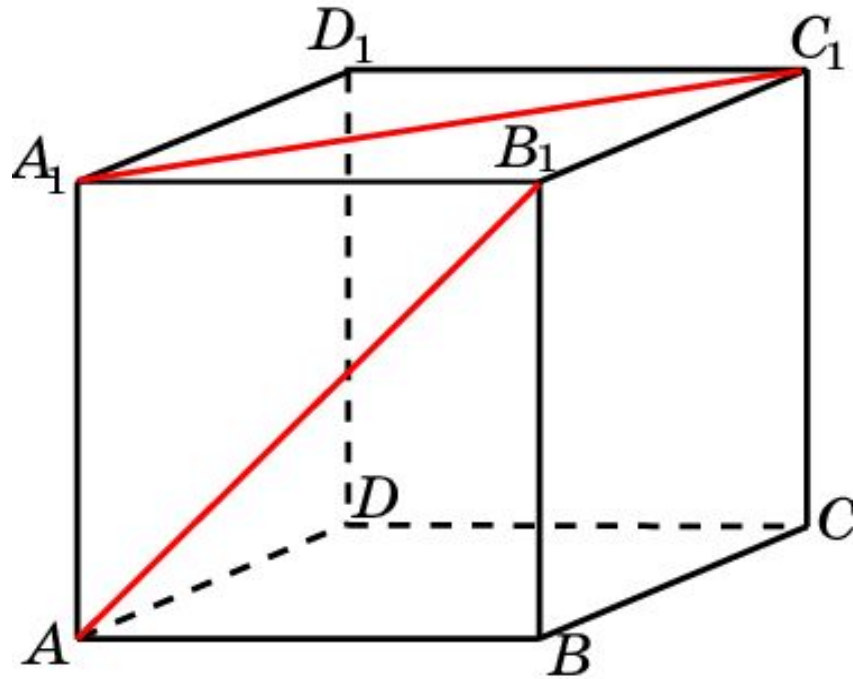
Ответ: 60° .

В кубе $A...D_1$ найдите угол между прямыми AB_1 и DA_1 .



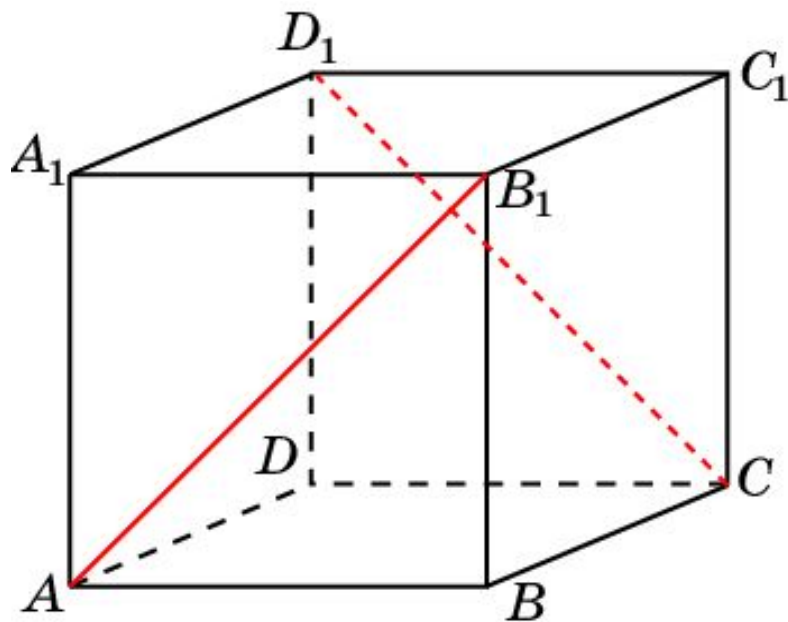
Ответ: 60° .

В кубе $A...D_1$ найдите угол между прямыми AB_1 и A_1C_1 .



Ответ: 60° .

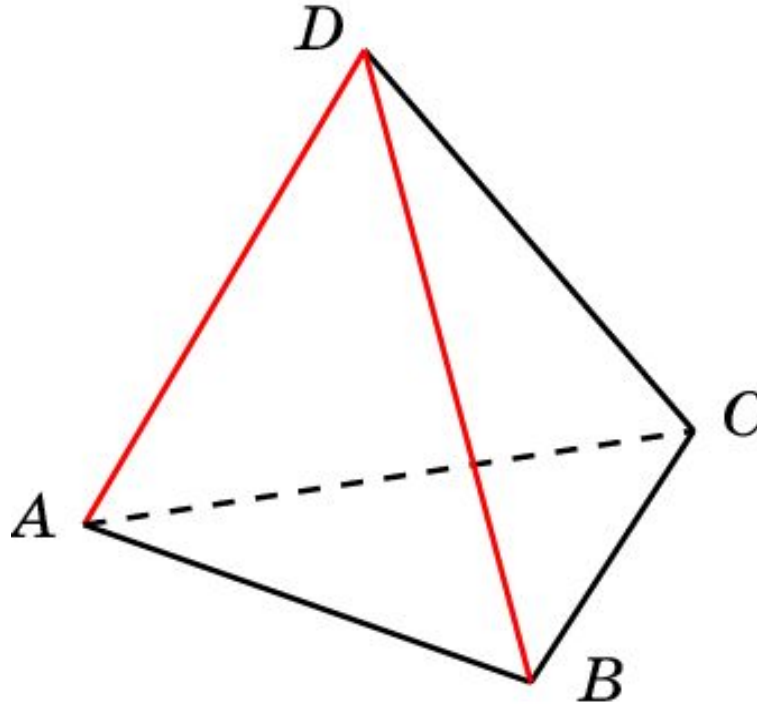
В кубе $A...D_1$ найдите угол между прямыми AB_1 и CD_1 .



Ответ: 90° .

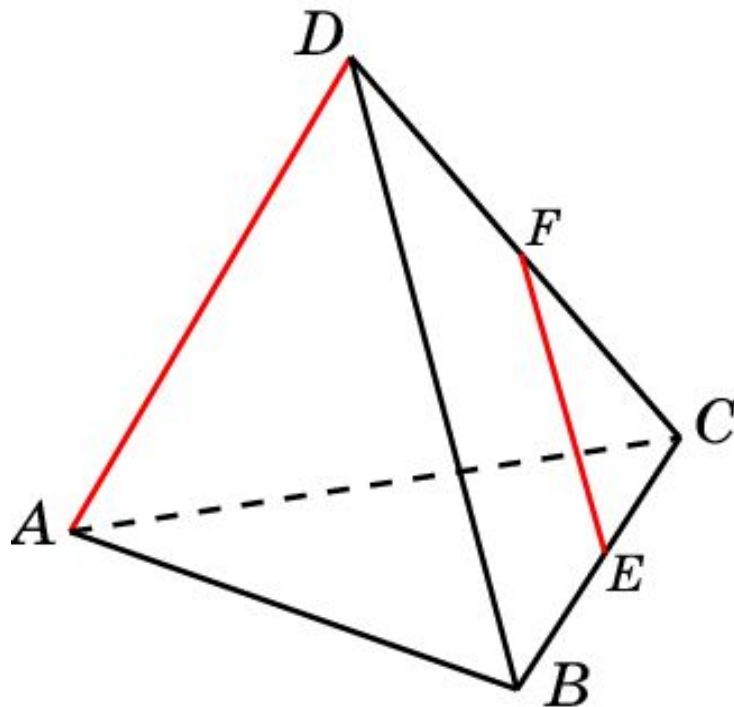
Пирамида

В правильном тетраэдре $ABCD$ найдите угол между прямыми AD и BC .



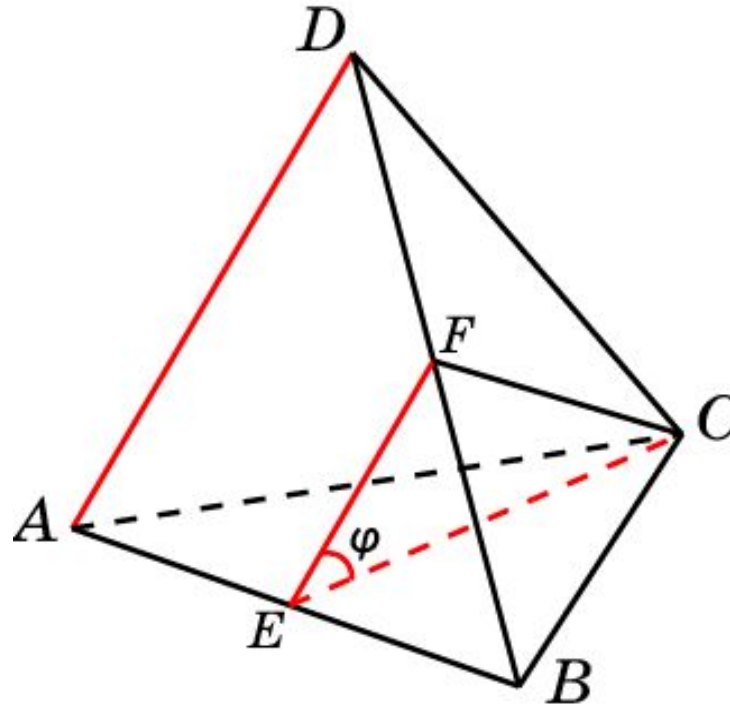
Ответ: 60° .

В правильном тетраэдре $ABCD$ точки E и F – середины ребер BC и CD . Найдите угол между прямыми AD и EF .



Ответ: 60° .

В правильном тетраэдре $ABCD$ точка E – середина ребра AB . Найдите угол между прямыми AD и CE .

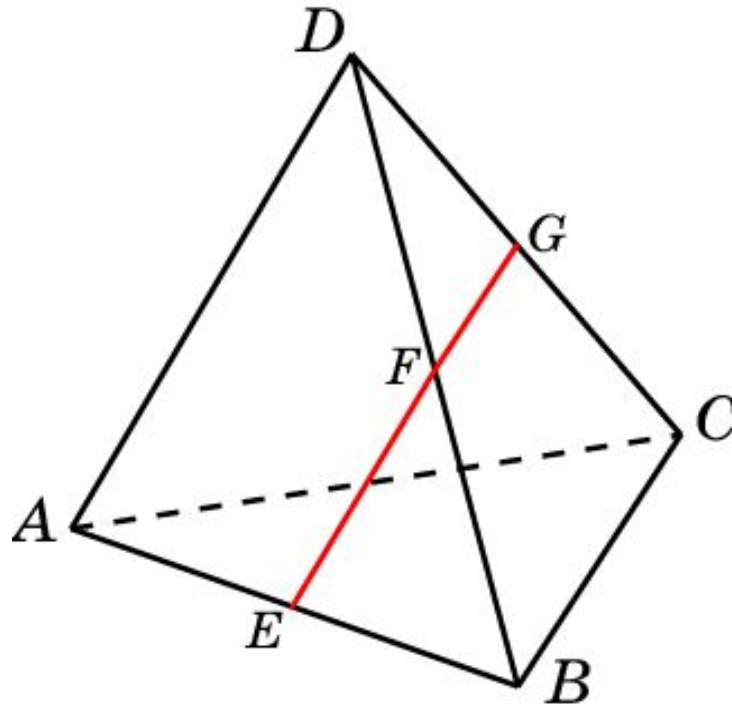


Решение. Через точку E проведем прямую EF , параллельную AD . Искомым углом φ будет угол CEF . В треугольнике CEF имеем

$$EF = \frac{1}{2}, \quad CE = CF = \frac{\sqrt{3}}{2}. \quad \text{Следовательно, } \cos \varphi = \frac{\sqrt{3}}{6}.$$

Ответ: $\cos \varphi = \frac{\sqrt{3}}{6}$.

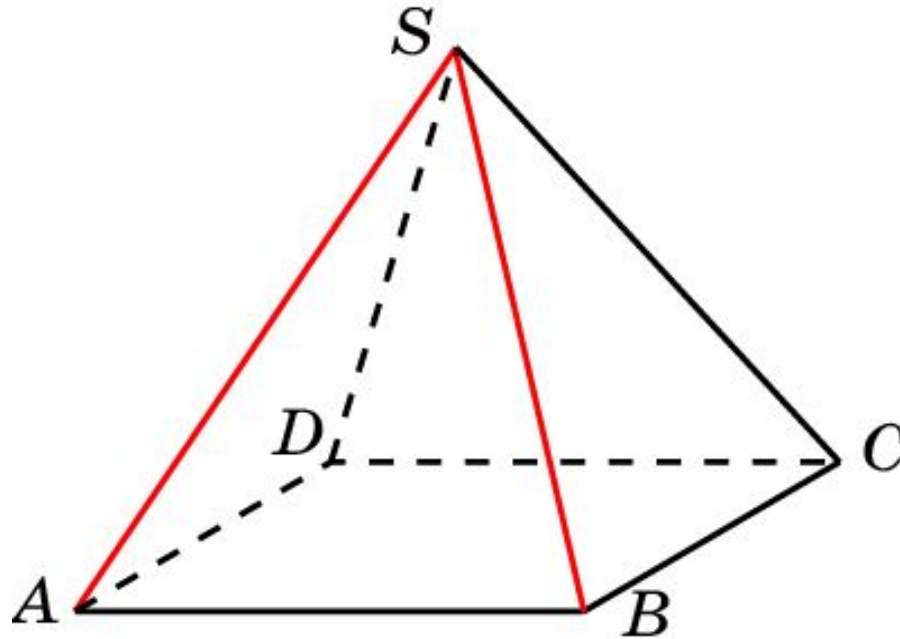
В правильном тетраэдре $ABCD$ точки E, F, G – середины ребер AB, BD, CD . Найдите угол EFG .



Решение. Прямые EF и FG параллельны прямым AD и BC . Следовательно, угол между ними равен 90° .

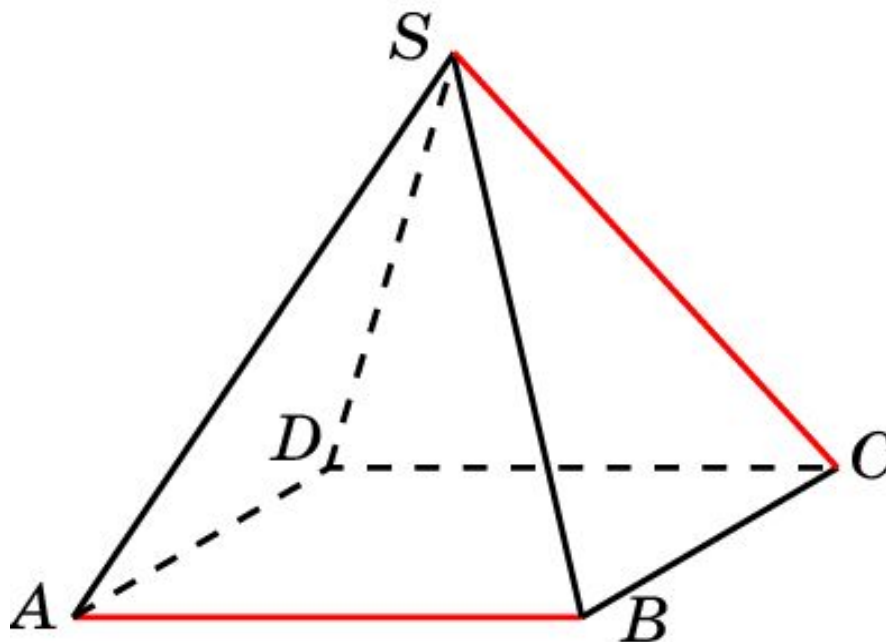
Ответ: 90° .

В правильной пирамиде $SABCD$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямыми SA и SB .



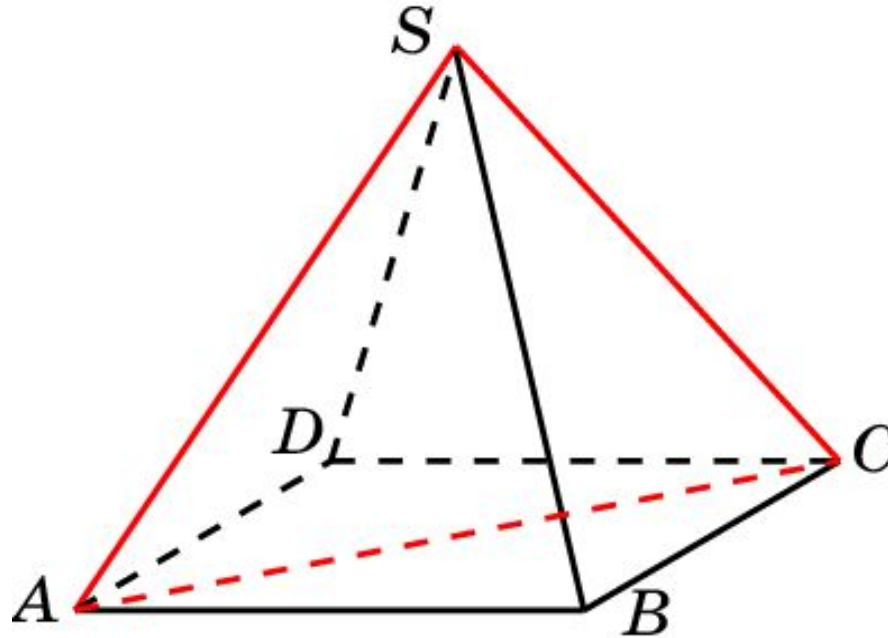
Ответ: 60° .

В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямыми AB и SC .



Ответ: 60° .

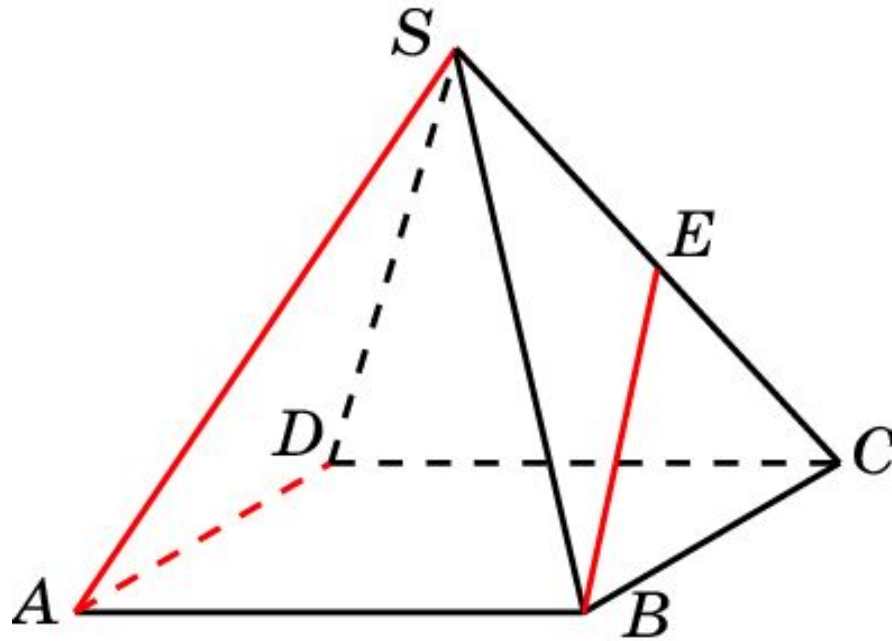
В правильной пирамиде $SABCD$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямыми SA и SC .



Решение. В треугольнике SAC $SA = SC = 1$, $AC = \sqrt{2}$
Следовательно, искомый угол равен 90° .

Ответ: 90° .

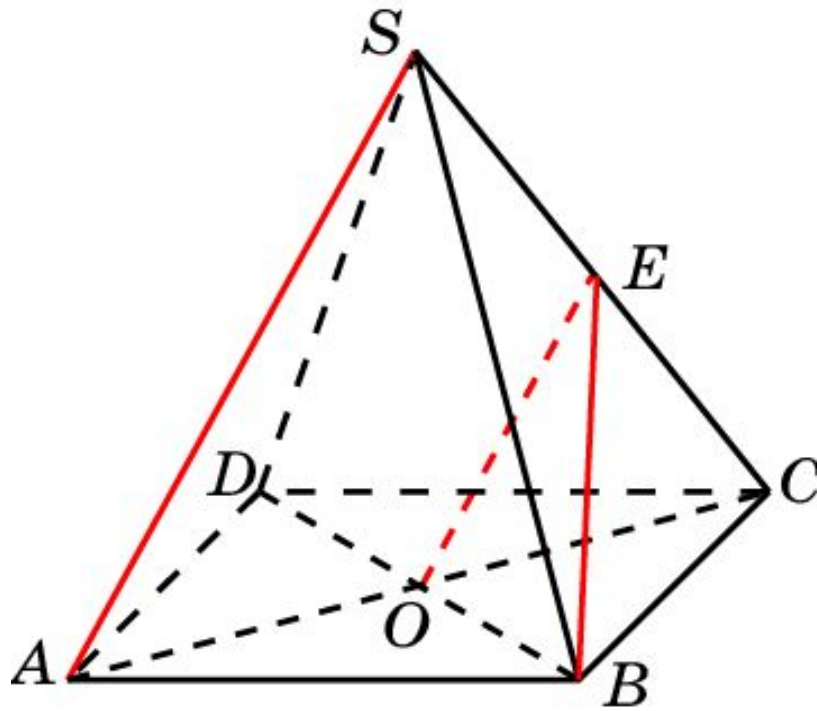
В правильной пирамиде $SABCD$, все ребра которой равны 1, точка E – середина ребра SC . Найдите угол между прямыми AD и BE .



Решение. Искомый угол равен углу CBE . Он равен 30° .

Ответ: 30° .

В правильной пирамиде $SABCD$, все ребра которой равны 1, точка E – середина ребра SC . Найдите тангенс угла между прямыми SA и BE .



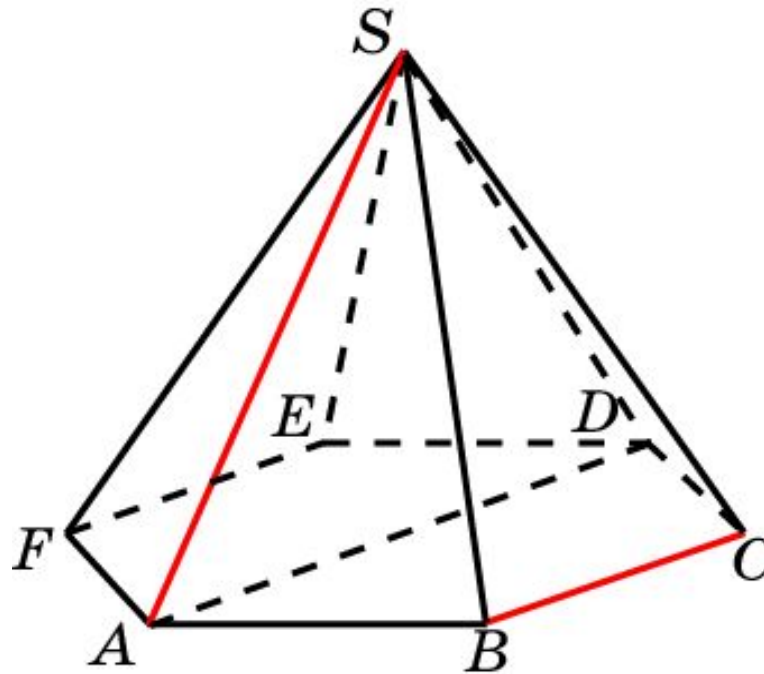
Решение. Через точку E проведем прямую, параллельную SA . Она пересечет основание в точке O . Искомый угол φ равен углу OEB . В прямоугольном треугольнике OEB имеем:

$$OB = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad OE = \frac{1}{2}. \quad \text{Следовательно,}$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \sqrt{2}.$$

Ответ: $\operatorname{tg} \varphi = \sqrt{2}$.

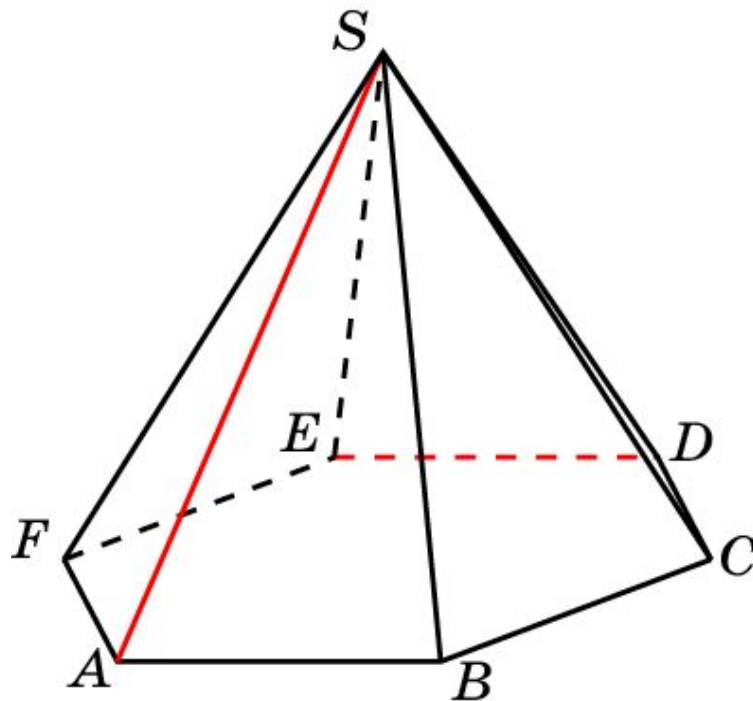
В правильной 6-ой пирамиде $SAB CDEF$, боковые ребра которой равны 2, а ребра основания – 1, найдите угол между прямыми SA и BC .



Решение: Искомый угол равен углу SAD . Треугольник SAD – равносторонний, следовательно, $\angle SAD = 60^\circ$.

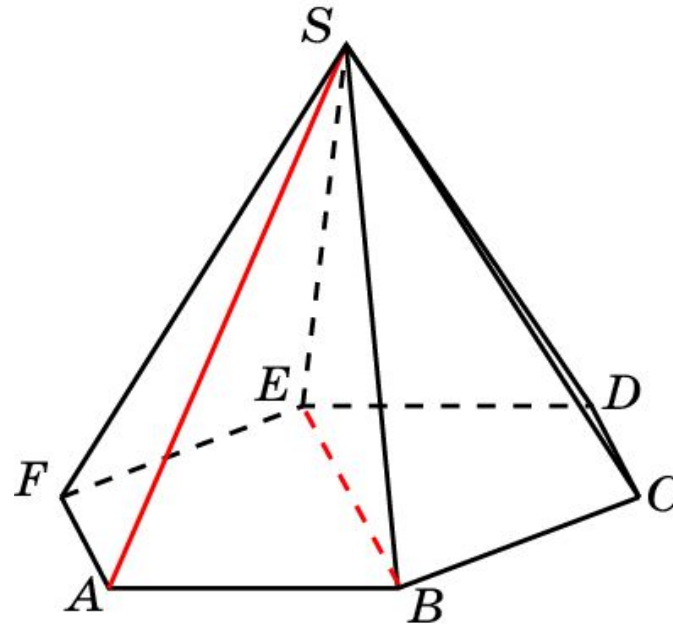
Ответ: 60° .

В правильной 6-ой пирамиде $SAB CDEF$, боковые ребра которой равны 2, а ребра основания – 1, найдите угол между прямыми SA и DE .



Ответ: $\cos \varphi = \frac{1}{4}$.

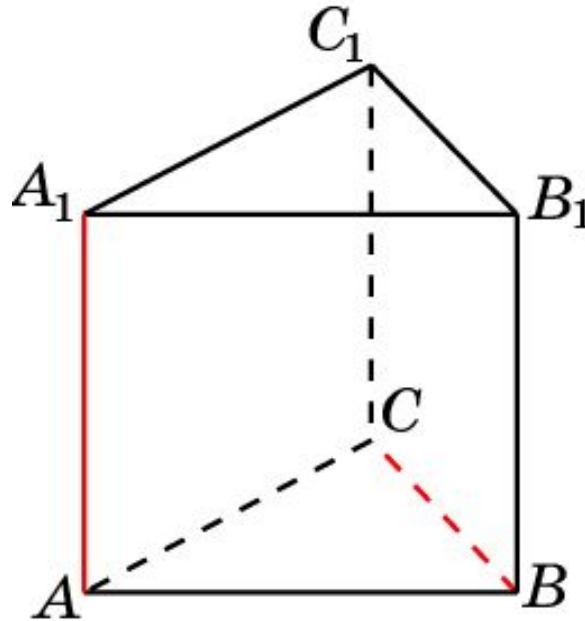
В правильной 6-ой пирамиде $SAB CDEF$, боковые ребра которой равны 2, а ребра основания – 1, найдите угол между прямыми SA и BE .



Ответ: $\cos \varphi = \frac{1}{4}$.

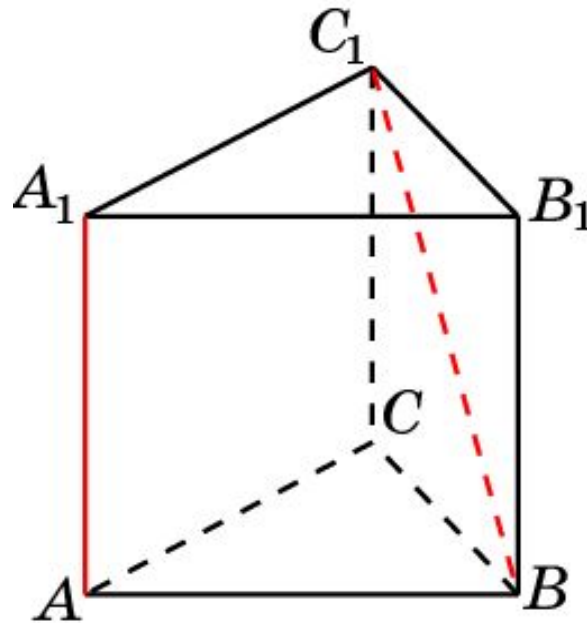
Призма

В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямыми: AA_1 и BC .



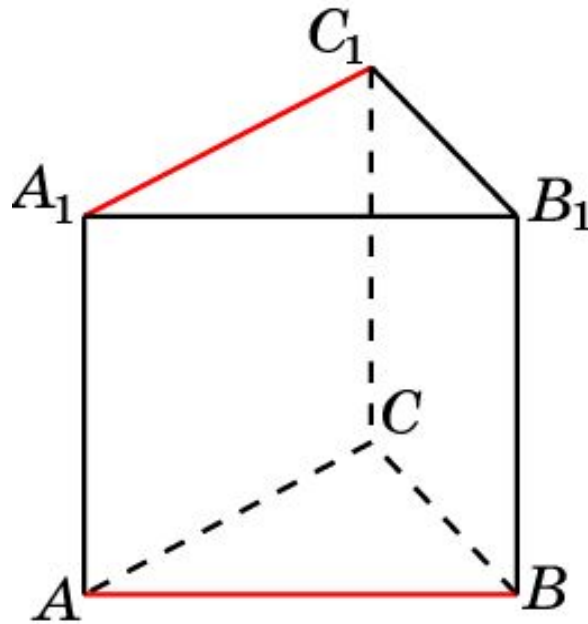
Ответ: 90° .

В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямыми: AA_1 и BC_1 .



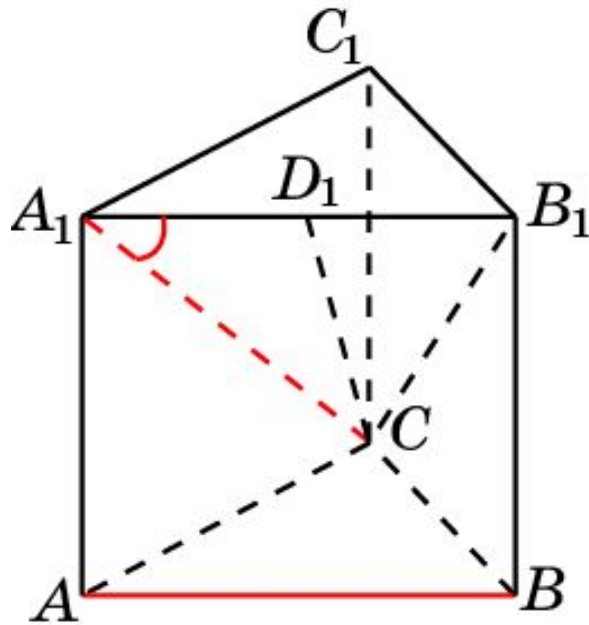
Ответ: 45° .

В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямыми: AB и A_1C_1 .



Ответ: 60° .

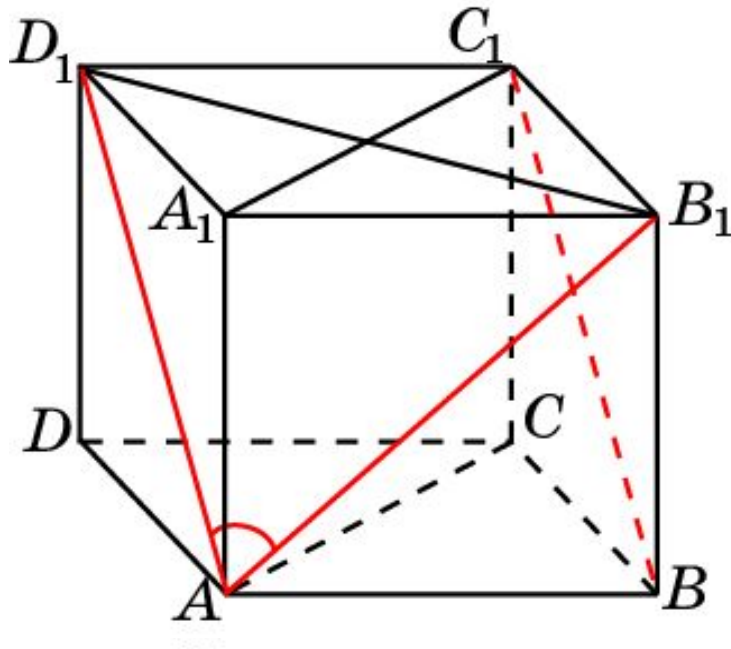
В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямыми AB и A_1C .



Решение: Искомый угол равен углу B_1A_1C . В треугольнике B_1A_1C проведем высоту CD_1 . В прямоугольном треугольнике A_1CD_1 катет A_1D_1 равен 0,5; гипотенуза A_1C равна $\sqrt{2}$. Следовательно,

$$\cos \varphi = \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямыми: AB_1 и BC_1 .



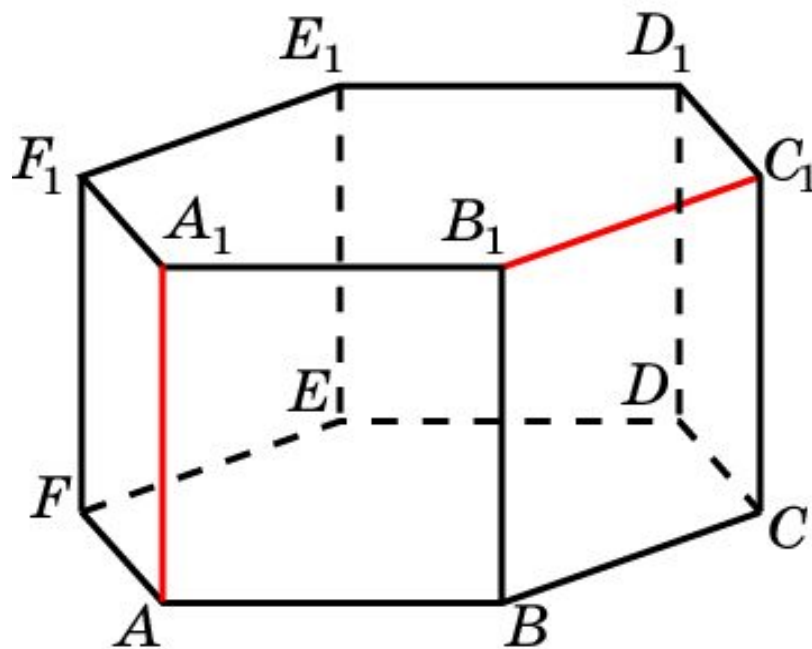
Решение: Достроим призму до 4-х угольной призмы. Проведем AD_1 параллельно BC_1 . Искомый угол будет равен углу B_1AD_1 .
В треугольнике AB_1D_1

$$AB_1 = AD_1 = \sqrt{2}, B_1D_1 = \sqrt{3}.$$

Используя теорему косинусов, находим

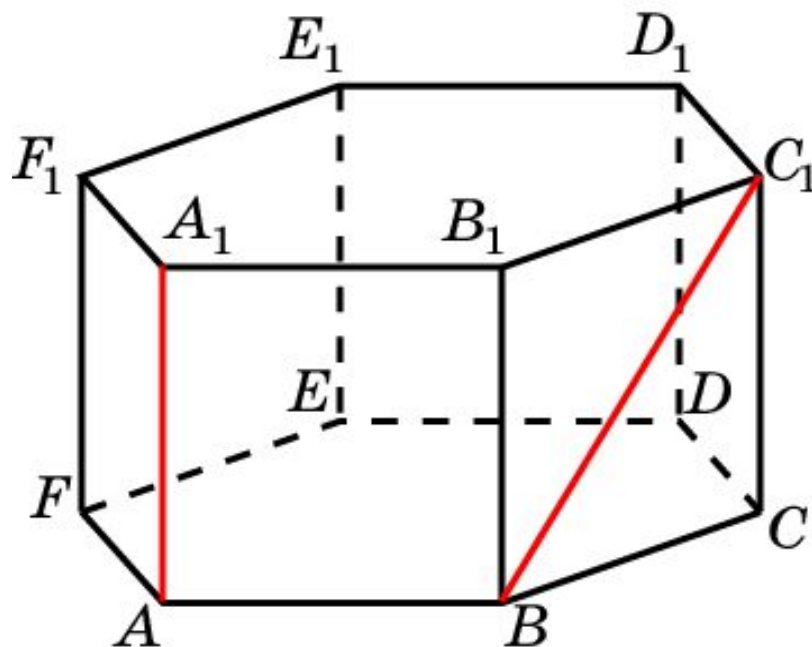
$$\cos \varphi = \frac{1}{4}.$$

В правильной 6-й призме $A...F_1$, ребра которой равны 1, найдите угол между прямыми: AA_1 и B_1C_1 .



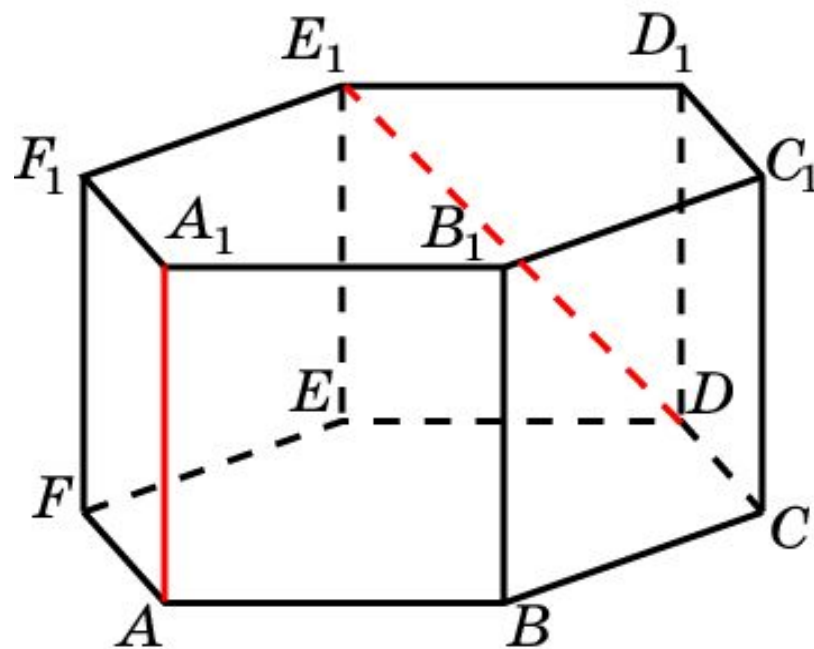
Ответ: 90° .

В правильной 6-й призме $A...F_1$, ребра которой равны 1, найдите угол между прямыми: AA_1 и BC_1 .



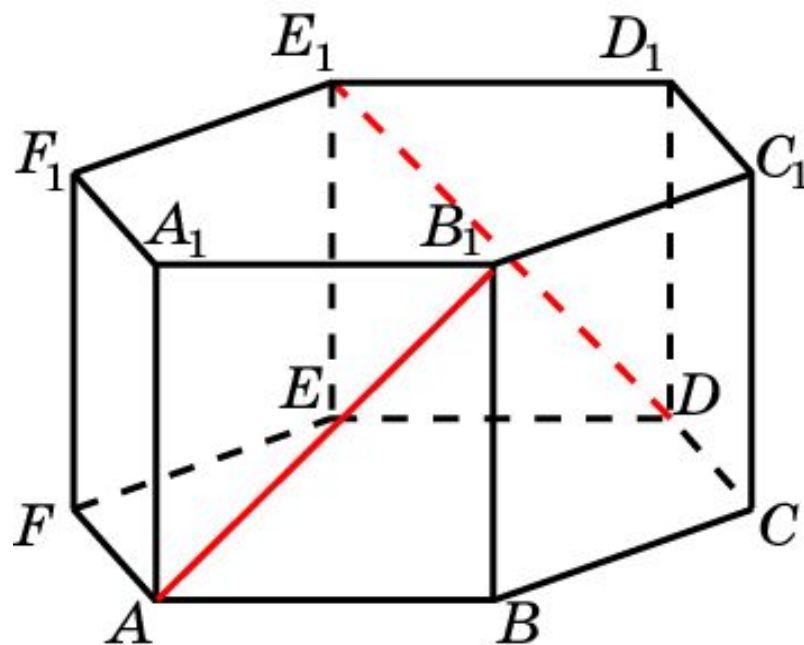
Ответ: 45° .

В правильной 6-й призме $A...F_1$, ребра которой равны 1, найдите угол между прямыми: AA_1 и DE_1 .



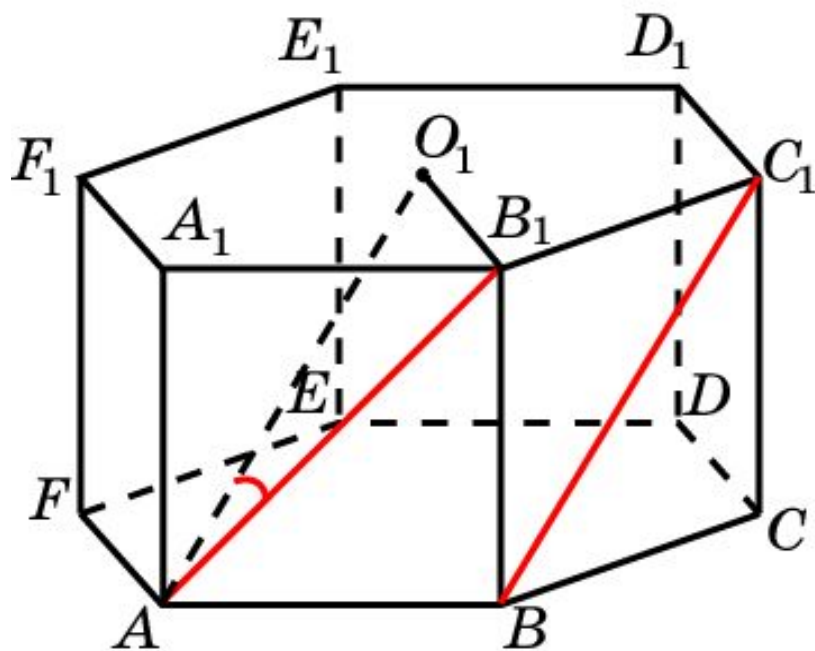
Ответ: 45° .

В правильной 6-й призме $A...F_1$, ребра которой равны 1, найдите угол между прямыми AB_1 и DE_1 .



Ответ: 90° .

В правильной 6-й призме $A...F_1$, ребра которой равны 1, найдите косинус угла между прямыми AB_1 и BC_1 .



Решение: Пусть O_1 — центр правильного 6-ка $A_1...F_1$. Тогда AO_1 параллельна BC_1 , и искомый угол равен углу B_1AO_1 . В равнобедренном треугольнике B_1AO_1 $O_1B_1=1$; $AB_1=AO_1=\sqrt{2}$. Применяя теорему косинусов, получим

$$\cos \varphi = \frac{3}{4}.$$