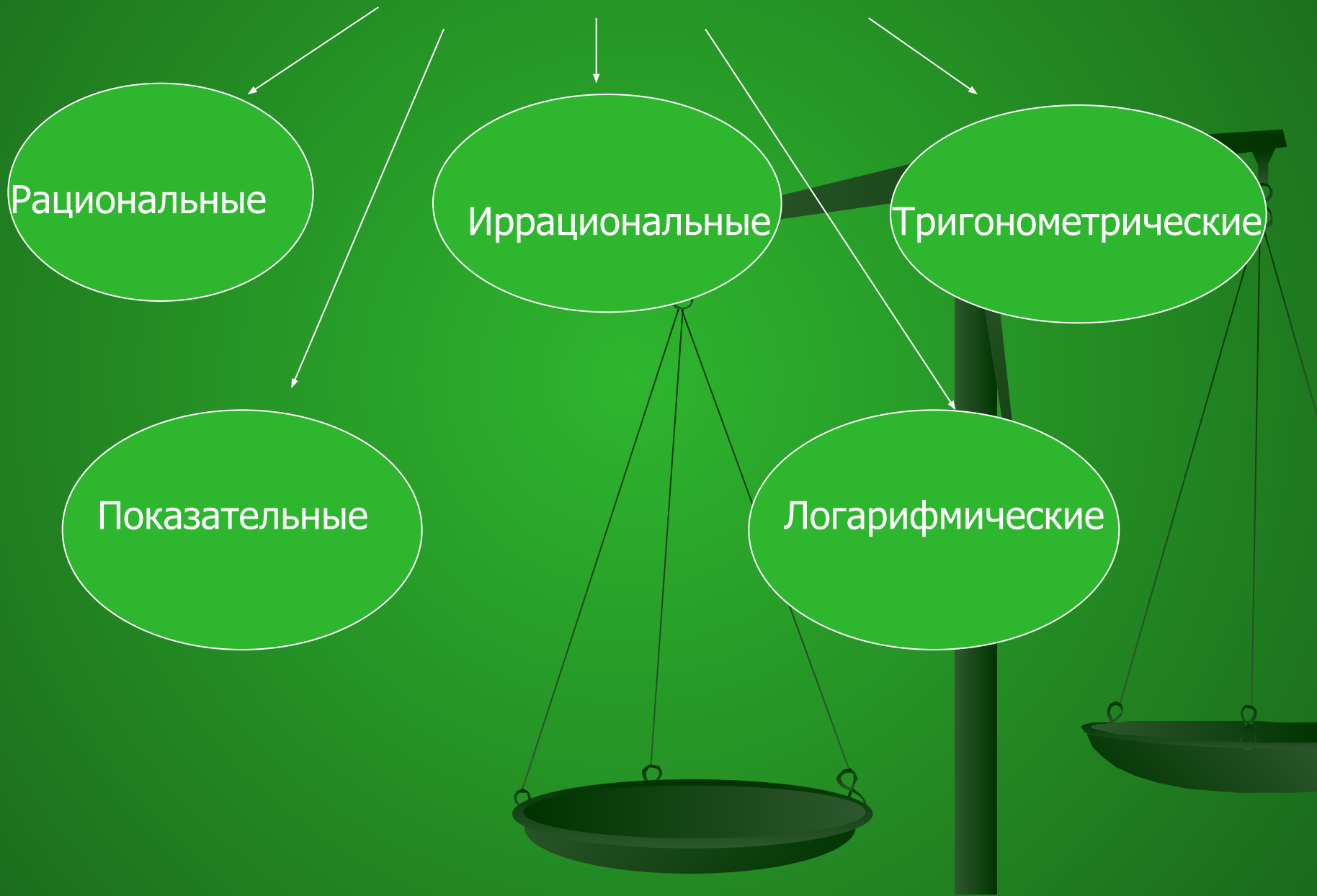


Изучение уравнений и
неравенств в школьном
курсе математики.



Виды уравнений и неравенств



Рациональные уравнения

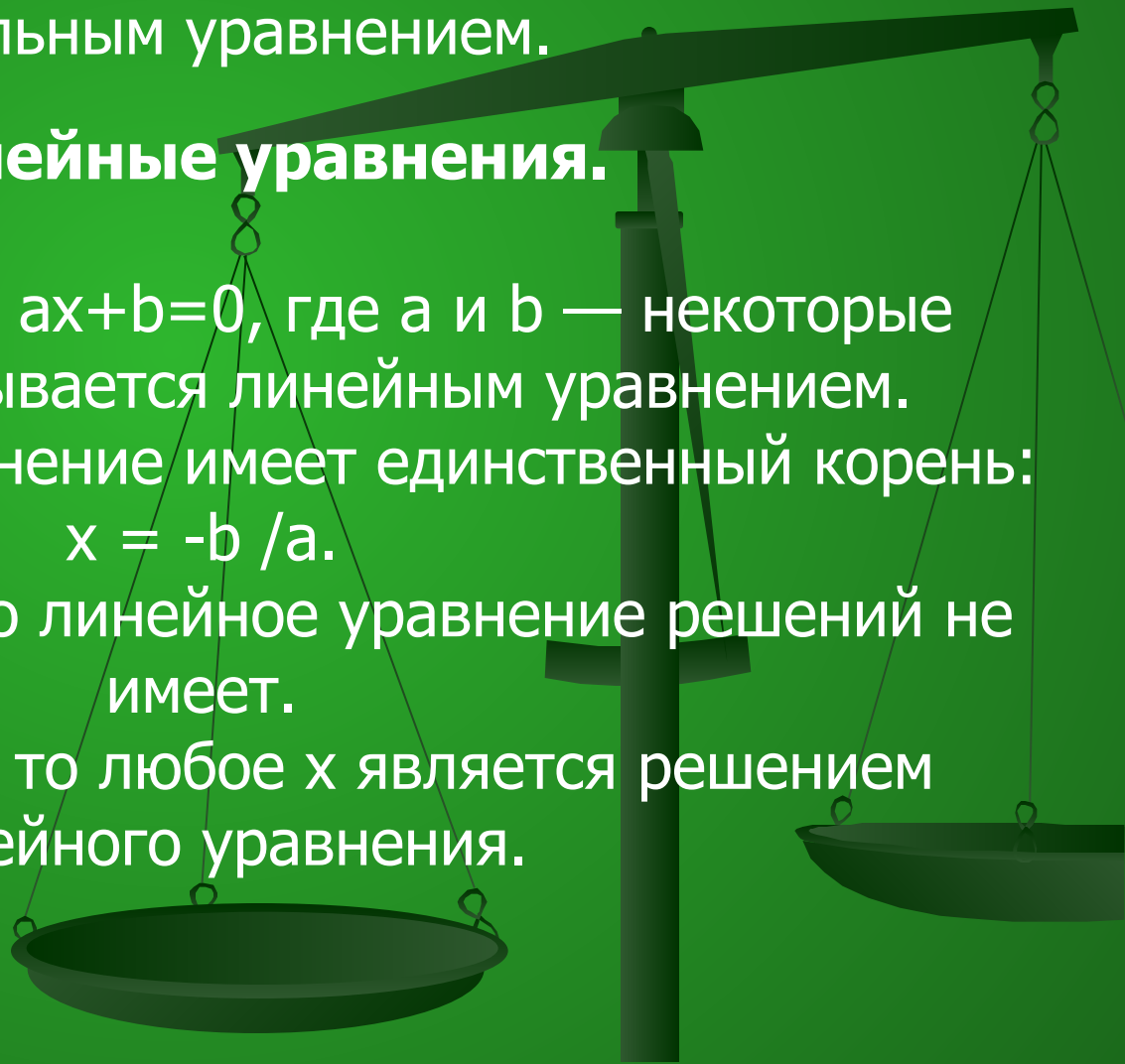
Уравнение вида $P(x) = 0$, где $P(x)$ — целая рациональная функция, называется целым рациональным уравнением.

Линейные уравнения.

Уравнения вида $ax+b=0$, где a и b — некоторые постоянные, называется линейным уравнением. Если $a \neq 0$, то уравнение имеет единственный корень:
$$x = -b/a.$$

Если $a=0$; $b \neq 0$, то линейное уравнение решений не имеет.

Если $a=0$; $b=0$, то любое x является решением линейного уравнения.



Пример 1.1.

$$2x - 3 + 4(x - 1) = 5.$$

Решение.

$$2x - 3 + 4x - 4 = 5,$$

$$2x + 4x = 5 + 4 + 3,$$

$$6x = 12,$$

$$x = 2.$$

Ответ: 2.

Пример 1.2.

$$2x - 3 + 2(x - 1) = 4(x - 1) - 7.$$

Решение.

$$2x + 2x - 4x = 3 + 2 - 4 - 7,$$

$$0x = -6.$$

Ответ: Ø.

Пример 1.3.

$$2x + 3 - 6(x - 1) = 4(x - 1) + 5.$$

Решение.

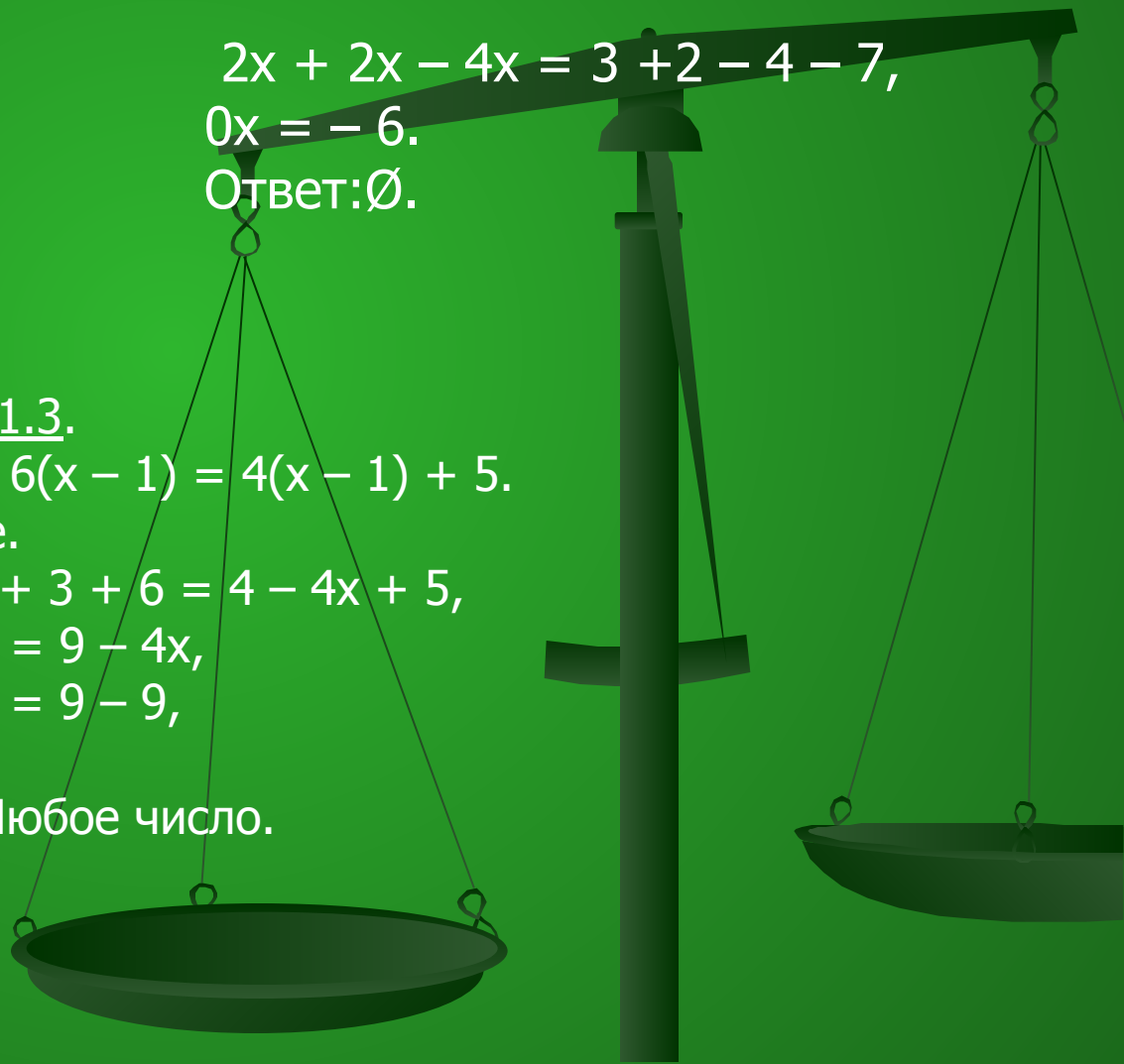
$$2x - 6x + 3 + 6 = 4 - 4x + 5,$$

$$-4x + 9 = 9 - 4x,$$

$$-4x + 4x = 9 - 9,$$

$$0x = 0.$$

Ответ: Любое число.



Квадратные уравнения

Уравнение вида $ax^2 + bx + c = 0$, где a , b и c — некоторые числа ($a \neq 0$);

x — переменная, называется квадратным уравнением.

Формула решения квадратного уравнения.

для решения квадратного уравнения следует вычислить дискриминант

$$D = b^2 - 4ac.$$

Если $D = 0$, то квадратное уравнение имеет единственное решение:

$$x = -b / (2a).$$

Если $D > 0$, то квадратное уравнение имеет два корня:

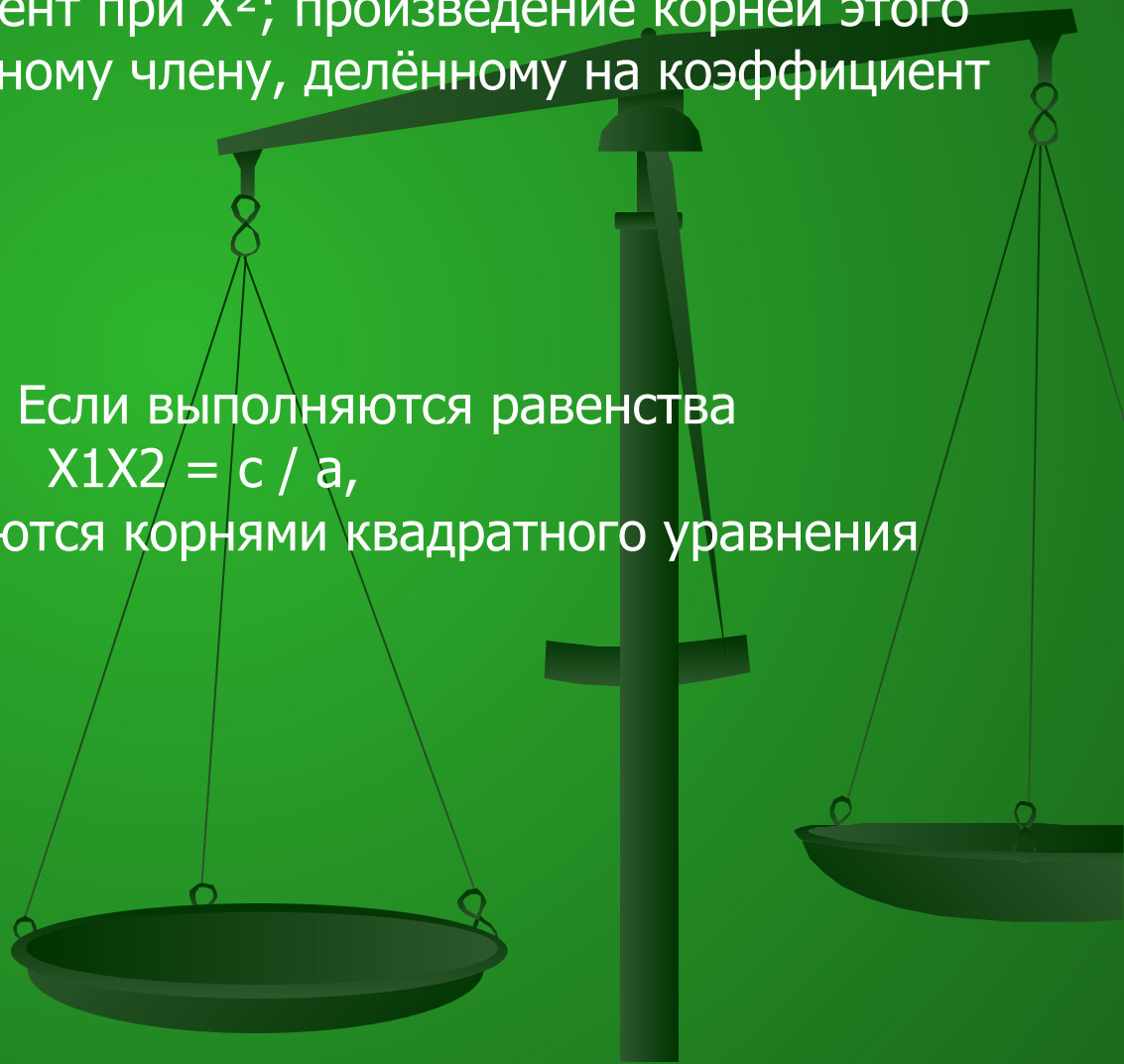
$$x_1 = (-b + \sqrt{D}) / (2a); \quad x_2 = (-b - \sqrt{D}) / (2a).$$

Если $D < 0$, то квадратное уравнение не имеет корней.

Теорема Виета.

Теорема 1 (Виета). Сумма корней квадратного уравнения равна коэффициенту при X , взятому с противоположным знаком и делённому на коэффициент при X^2 ; произведение корней этого уравнения равно свободному члену, делённому на коэффициент при X^2 .

Теорема 2 (обратная). Если выполняются равенства $X_1 + X_2 = -b/a$ и $X_1X_2 = c/a$, то числа X_1 и X_2 являются корнями квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$.



Пример

Решить уравнение

$$A) 2x^2 + 5x - 1 = 0.$$

Решение

$$D = 25 - 4 \cdot 2(-1) = 33 > 0;$$

$$x_1 = (-5 + \sqrt{33}) / 4; \quad x_2 = (-5 - \sqrt{33}) / 4.$$

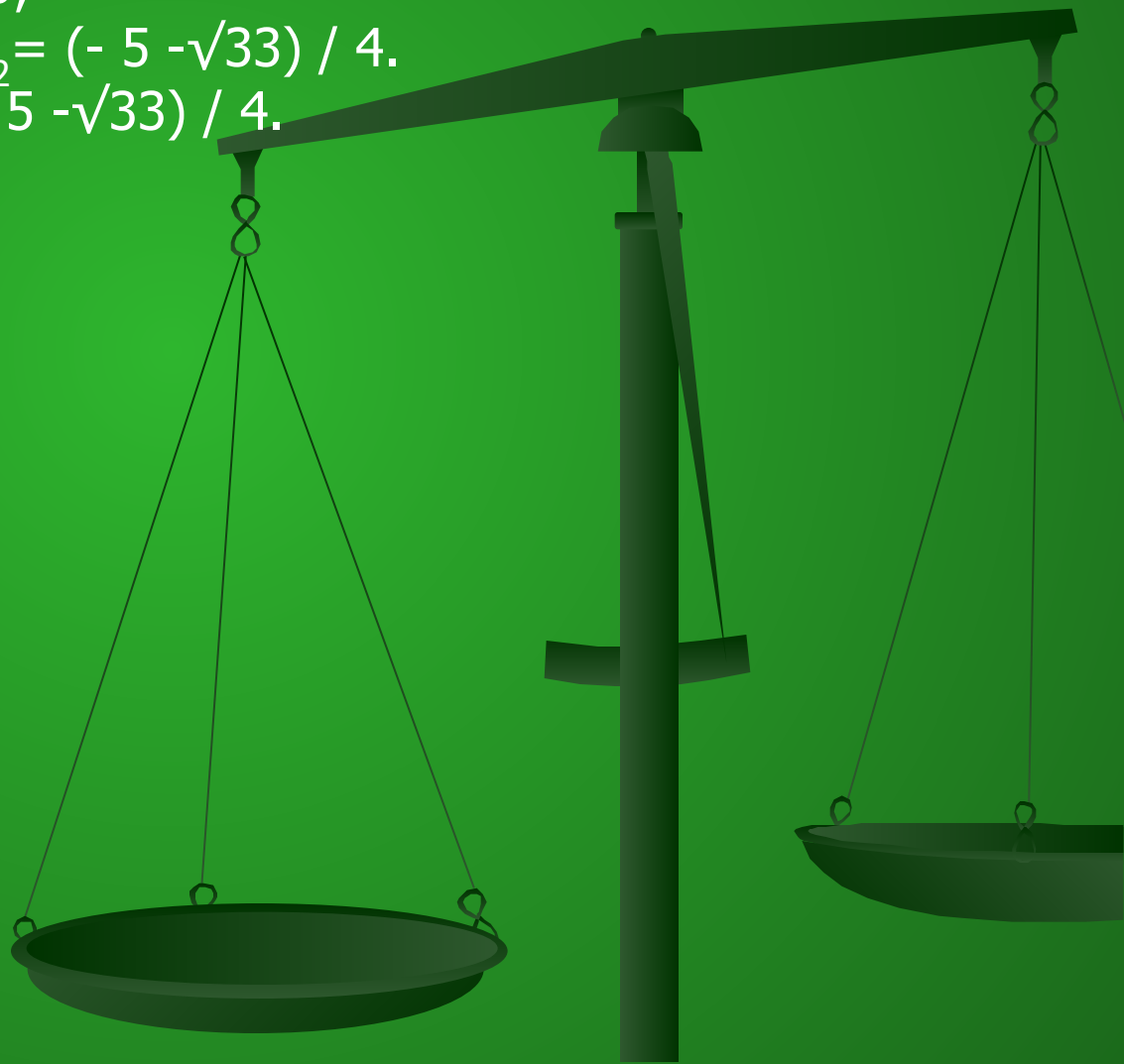
$$\text{Ответ: } (-5 + \sqrt{33}) / 4; \quad (-5 - \sqrt{33}) / 4.$$

$$B) x^2 - 9x + 20 = 0$$

$$x_1 + x_2 = 9 \text{ и } x_1 x_2 = 20$$

$$x_1 = 4, \quad x_2 = 5.$$

$$\text{Ответ: } 4; 5.$$



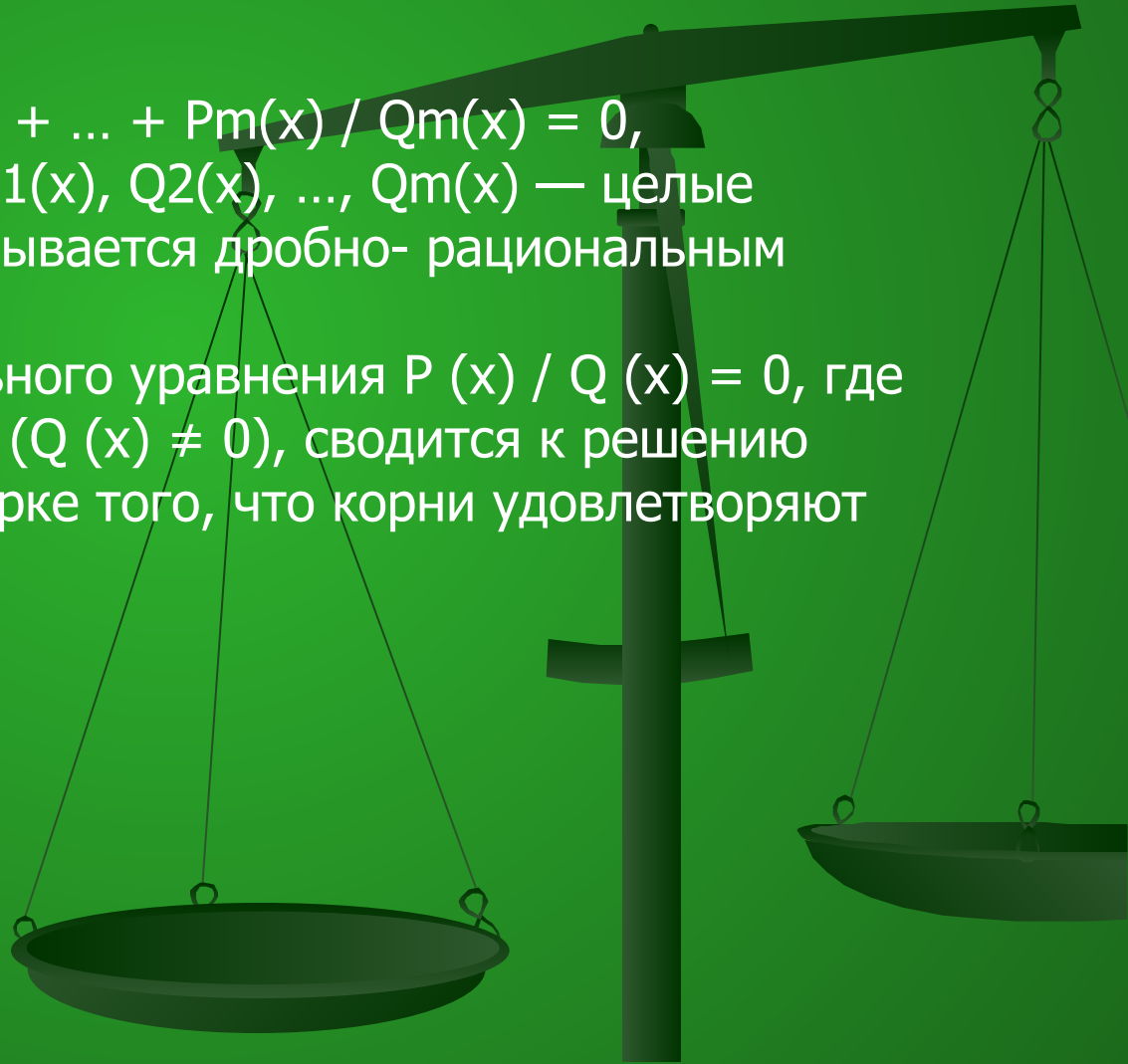
Дробно-рациональные

Уравнение вида

$$P_1(x) / Q_1(x) + P_2(x) / Q_2(x) + \dots + P_m(x) / Q_m(x) = 0,$$

где $P_1(x), P_2(x), \dots, P_m(x), Q_1(x), Q_2(x), \dots, Q_m(x)$ — целые рациональные функции, называется дробно- рациональным уравнением.

Решение дробно- рационального уравнения $P(x) / Q(x) = 0$, где $P(x)$ и $Q(x)$ — многочлены ($Q(x) \neq 0$), сводится к решению уравнения $P(x) = 0$ и проверке того, что корни удовлетворяют условию $Q(x) \neq 0$.



Решить уравнение

$$(x^3 - 27) / (x - 3) = 27$$

Решение.

Разложим числитель на множители (по формуле разности кубов):

$$(x - 3)(x^2 + 3x + 9) / (x - 3) = 27.$$

Отсюда:

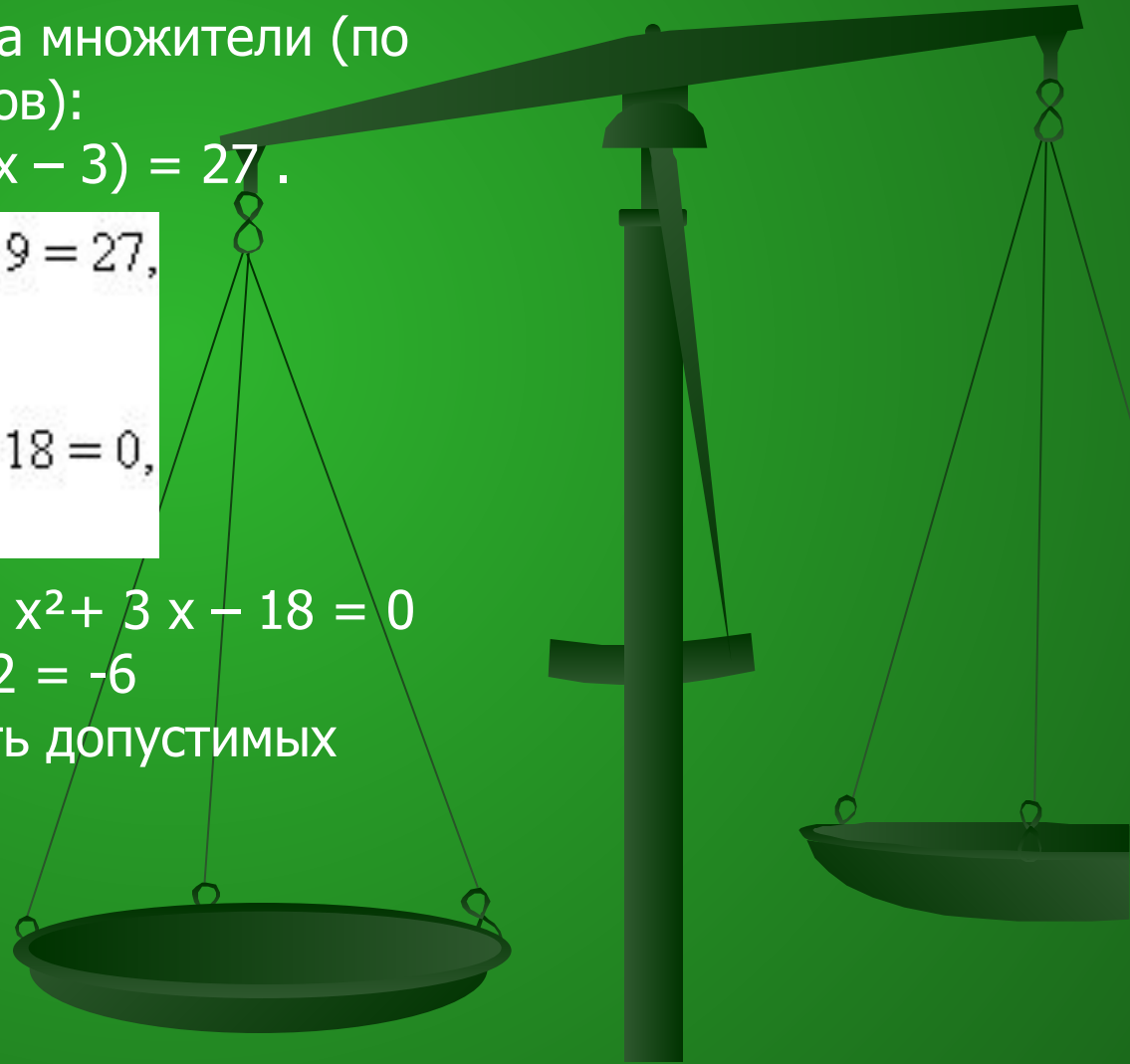
$$\begin{cases} x^2 + 3x + 9 = 27, \\ x - 3 \neq 0; \end{cases}$$
$$\begin{cases} x^2 + 3x - 18 = 0, \\ x \neq 3. \end{cases}$$

Квадратное уравнение $x^2 + 3x - 18 = 0$

имеет корни $x_1 = 3$; $x_2 = -6$

(x_1 не входит в область допустимых значений).

Ответ: -6



Неравенства

Неравенства

линейные

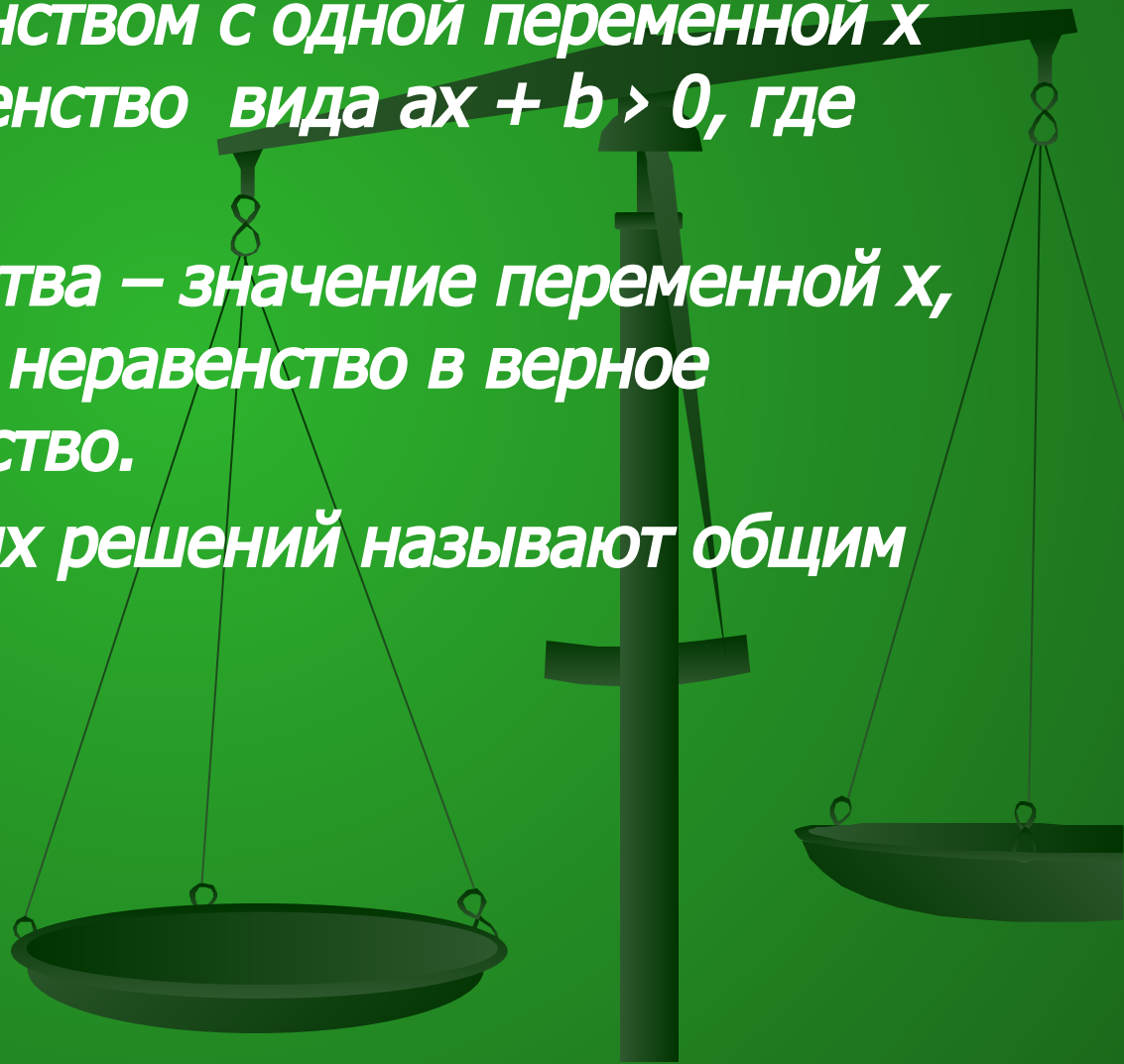
квадратные

рациональные



Линейные неравенства

- *Линейным неравенством с одной переменной x называется неравенство вида $ax + b > 0$, где $a \neq 0$.*
- *Решение неравенства – значение переменной x , которое обращает неравенство в верное числовое неравенство.*
- *Множество частных решений называют общим решением.*



Два неравенства $f(x) < g(x)$ и $r(x) < s(x)$ называют равносильными, если они имеют одинаковые решения.

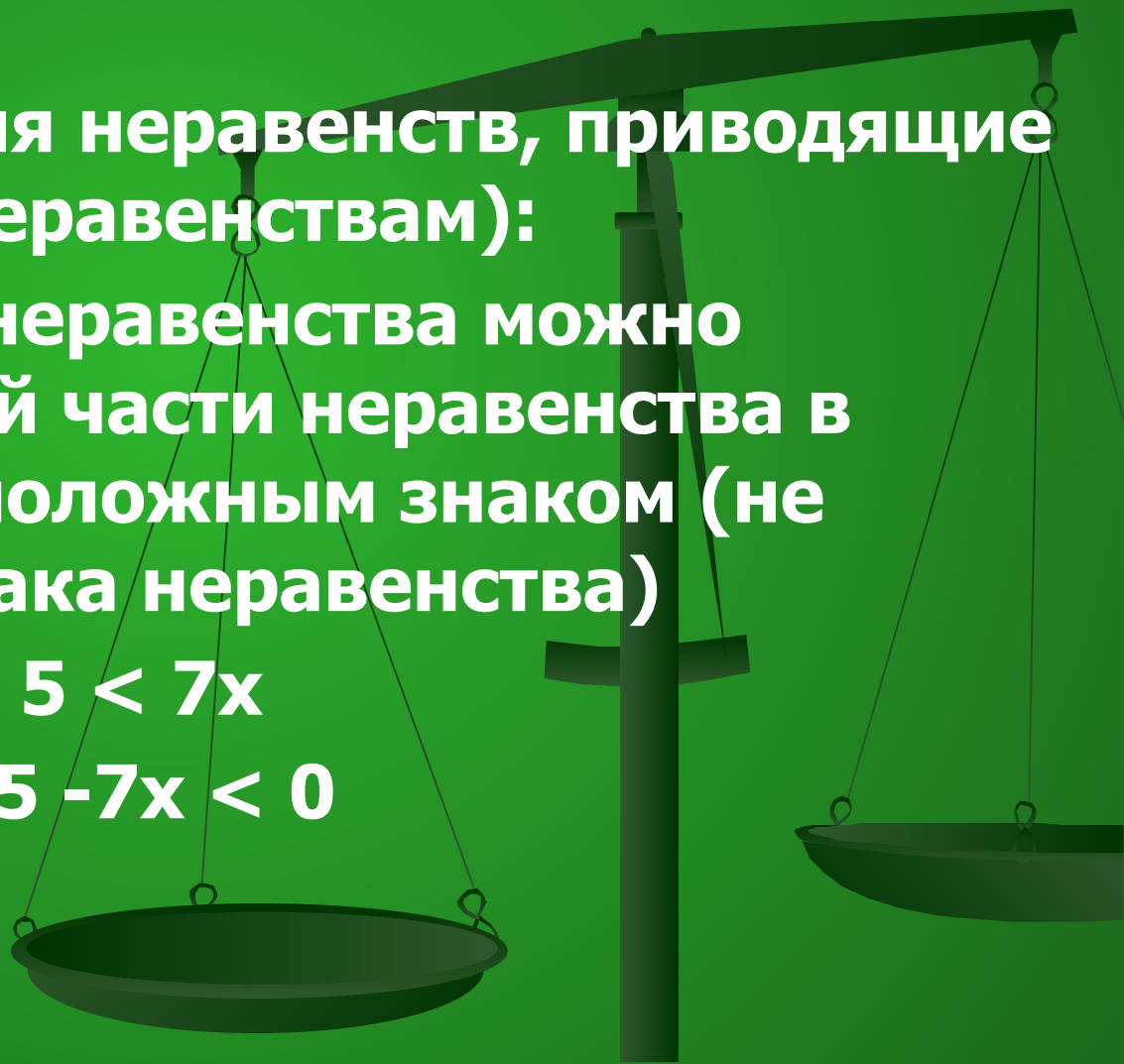
Правила

(преобразования неравенств, приводящие к равносильным неравенствам):

1. Любой член неравенства можно перенести из одной части неравенства в другую с противоположным знаком (не меняя при этом знака неравенства)

Например: $3x + 5 < 7x$

$$3x + 5 - 7x < 0$$



2: а) обе части неравенства можно умножить или разделить на одно и то же **положительное число**, не меняя при этом знака неравенства.

б) если обе части неравенства умножить или разделить на одно и то же **выражение, положительное при любых значениях переменной**, и сохранить знак неравенства, то получится неравенство, равносильное данному.

Например:

$$\begin{aligned} \text{а)} \quad & 8x - 12 > 4x^2 \\ & 2x - 3 > x^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{б)} \quad & (2x + 1)(x^2 + 2) < 0 \\ & 2x + 1 < 0 \end{aligned}$$

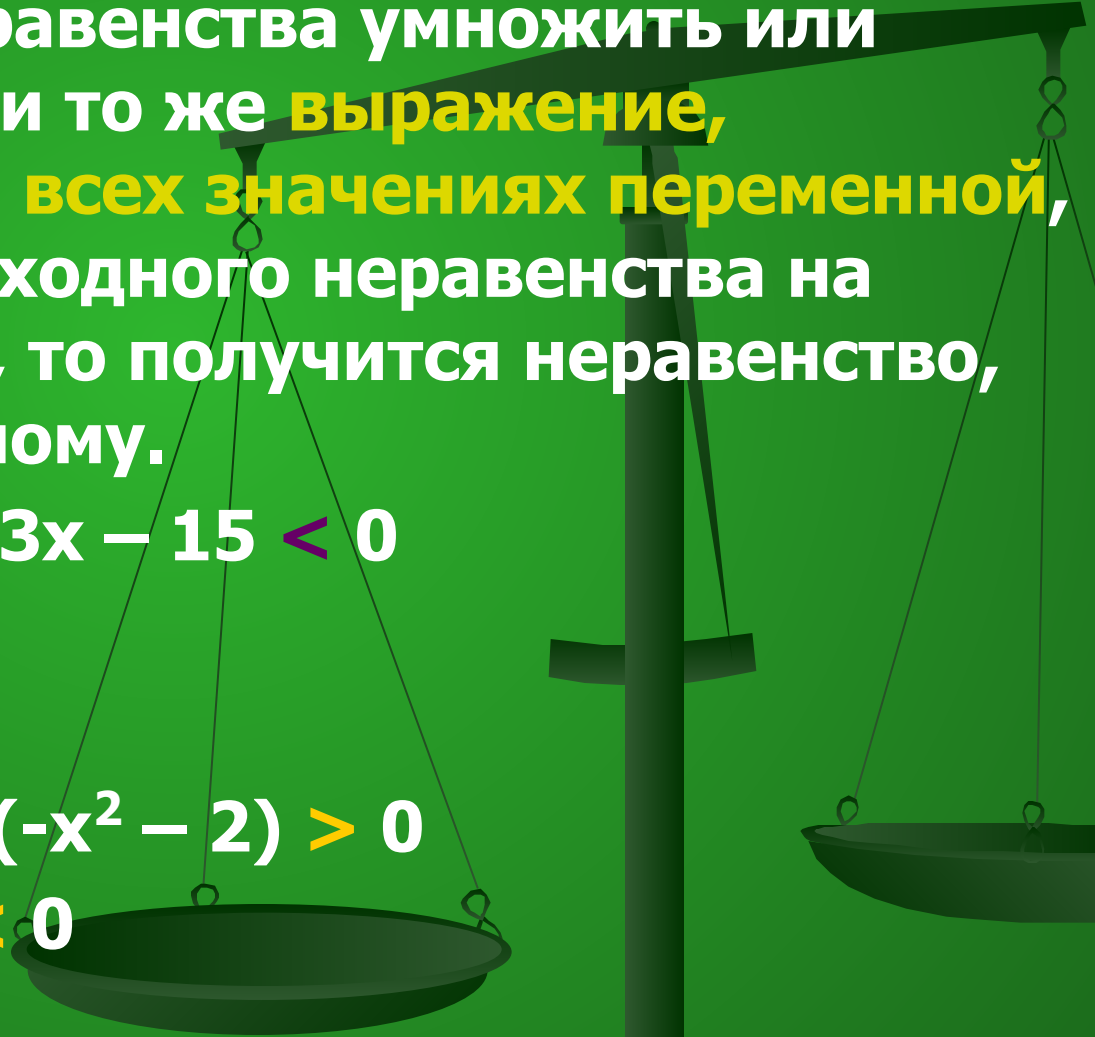
3.а) Обе части неравенства можно умножить или разделить на одно и то же **отрицательное число**, изменив при этом знак неравенства на противоположный ($<$ на $>$, $>$ на $<$).

б) если обе части неравенства умножить или разделить на одно и то же **выражение, отрицательное при всех значениях переменной**, и изменить знак исходного неравенства на противоположный, то получится неравенство, равносильное данному.

Например: а) - $6x^3 + 3x - 15 < 0$

$$2x^3 - x + 5 > 0$$

$$\text{б) } (3x - 4)(-x^2 - 2) > 0$$

$$3x - 4 < 0$$


Решите неравенство:

$$5x + 3(2x - 1) > 13x - 1$$

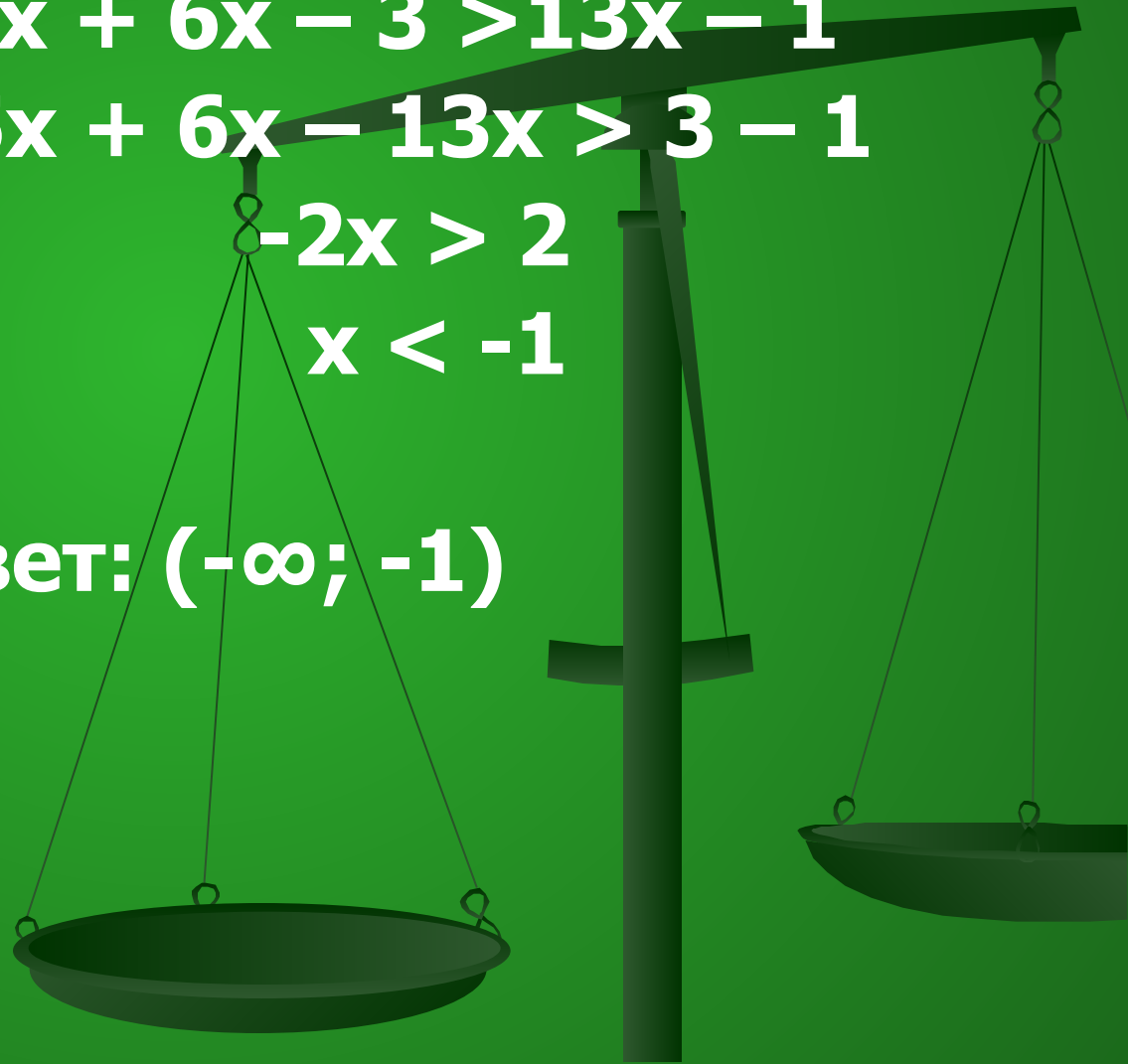
Решение: $5x + 6x - 3 > 13x - 1$

$$5x + 6x - 13x > 3 - 1$$

$$-2x > 2$$

$$x < -1$$

Ответ: $(-\infty; -1)$



Квадратные неравенства

Неравенства вида

**$ax^2 + bx + c > 0$, где $a \neq 0$, a, b, c
- некоторые числа,
называются квадратными.**

Методы решения

графический

интервалов

Алгоритм применения графического метода:

1. Найти корни квадратного трехчлена ax^2+bx+c , т.е. решить уравнение $ax^2+bx+c=0$.
2. Отметить найденные значения на оси x в координатной плоскости.
3. Схематично построить график параболы.
4. Записать ответ в соответствии со знаком неравенства.

Частные случаи при $D < 0$:

- а) $a < 0$, $ax^2 + bx + c \geq 0$ нет решений
 $ax^2 + bx + c < 0$ $(-\infty; +\infty)$
- б) $a > 0$ $ax^2 + bx + c > 0$ $(-\infty; +\infty)$
 $ax^2 + bx + c \leq 0$ нет решений

Алгоритм выполнения метода интервалов:

- 1. Разложить на множители квадратный трехчлен, используя формулу $ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2)$, где x_1, x_2 - корни квадратного уравнения $ax^2+bx+c=0$.
- 2. Отметить на числовой прямой корни x_1 и x_2 .
- 3. Определить знак выражения $a(x-x_1)(x-x_2)$ на каждом из получившихся промежутков.
- 4. Записать ответ, выбрав промежутки с соответствующим знаком неравенства знаком (если знак неравенства $<$, то выбираем промежутки со знаком «-», если знак неравенства $>$, то выбираем промежутки со знаком «+»).

Решите неравенство: $x^2 - 6x + 8 > 0$

- **Решение:** Разложим квадратный трехчлен $x^2 - 6x + 8$ на множители. Решим уравнение

$$x^2 - 6x + 8 = 0$$

$$D = 36 - 32 = 4, 4 > 0, \text{ два корня}$$

$$x_{1/2} = (6 \pm 2) : 2 \quad x_1 = 4, \quad x_2 = 2$$

$$x^2 - 6x + 8 = (x - 2)(x - 4)$$

Отметим на числовой прямой корни трехчлена 2 и 4. Определим знаки выражения $(x-2)(x-4)$ на каждом из промежутков.

+ 2 - 4 +

Ответ: $x < 2, x > 4$ или $(-\infty; 2) \cup (4; +\infty)$.

Решение рационального неравенства

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} > 0$$

сводится к решению эквивалентного
неравенства

$$P_n(x) \times Q_m(x) > 0,$$



Пример:

Решить неравенство

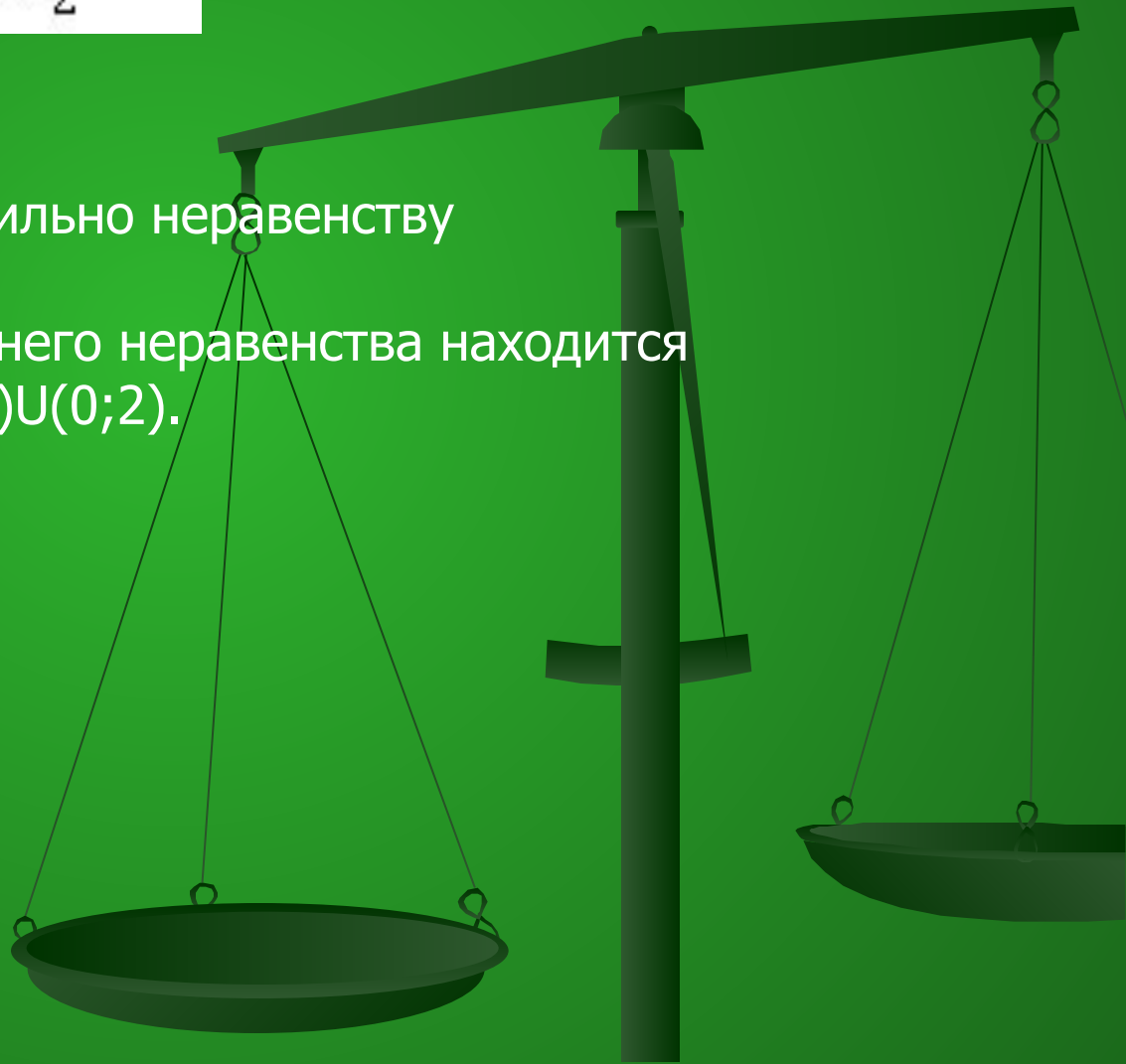
$$\frac{x+2}{x^2-x-2} < -1.$$

Решение:

Данное неравенство равносильно неравенству
 $x^2(x^2 - x - 2) < 0$.

Множество решений последнего неравенства находится
методом интервалов: $(-1;0) \cup (0;2)$.

Ответ: $(-1;0) \cup (0;2)$.



ИРРАЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Уравнение $A(x) = B(x)$, в котором хотя бы одно из выражений $A(x)$, $B(x)$ иррационально, называется **иррациональным**.

Примерами таких уравнений могут служить

$$\sqrt{x-3} + \sqrt{x+4} = 7, \quad \sqrt{x^2-9} = \sqrt{x^2+9} - 10 = 0$$

Уравнение же $\sqrt{2}x^4 + \sqrt[5]{3}x^4 + \sqrt{\frac{3-\sqrt{2}}{3+\sqrt{2}}} = 0$

Рационально, поскольку в нём x не находится под знаком корня.

Понятия **корня уравнения и его решения** для иррациональных уравнений определяют так же, как и для рациональных.

ИРРАЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Как правило, иррациональное уравнение сводится к равносильной системе, содержащей уравнения и неравенства.

$$1. \quad \sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x), \\ f(x) \geq 0. \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} f(x) = g(x), \\ g(x) \geq 0. \end{cases}$$

Замечание. Из двух систем выбирают ту, которая решается проще.

Пример.

$$\begin{aligned} \sqrt{3-x} = \sqrt{x^2-5x-2} &\Leftrightarrow \begin{cases} 3-x = x^2-5x-2, \\ 3-x \geq 0; \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-4x-5, \\ x \leq 3; \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x = 5, \\ x = -1, \end{cases} \\ x \leq 3; \end{cases} \Leftrightarrow x = -1. \end{aligned}$$

ИРРАЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

2.

$$\sqrt{f(x)} = a$$

если $a < 0$, уравнение не имеет корней.

если $a \geq 0$, уравнение равносильно уравнению $f(x) = a^2$.

Замечание. Иногда иррациональное уравнение можно свести к приведённому виду с помощью введения новой переменной.

Пример. $x - \sqrt{x+1} = 5 \Leftrightarrow (x+1) - \sqrt{x+1} - 6 = 0$

$$z = \sqrt{x+1}, \quad z^2 - z - 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z = -2, \\ z = 3; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+1} = -2, \\ x = 3. \end{cases}$$

Первое уравнение совокупности не имеет корней, корень второго уравнения

$$x = 8.$$

ИРРАЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

$$3. \sqrt{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0, \\ f(x) = g^2(x). \end{cases}$$

Пример. $\sqrt{7-x} = x-1 \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 \geq 0 \\ 7-x = (x-1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x^2 - x - 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ \begin{cases} x = -2 \\ x = 3 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow x = 3.$$

Графический метод

Решите графически
уравнение

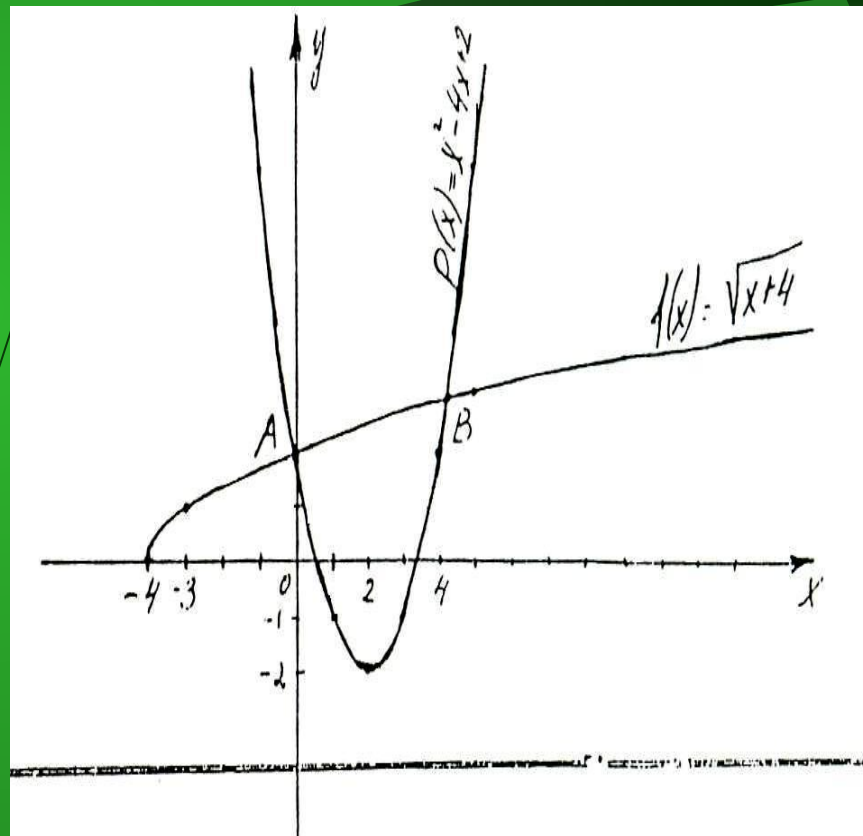
$$\sqrt{x+4} = x^2 - 4x + 2$$

Решение: В одной системе
координат построим
графики функций $f(x) = \sqrt{x+4}$

и $p(x) = x^2 - 4x + 2$.

Графики пересекаются в
двух точках А и В.
Данное уравнение имеет
два корня.

$$x_1 \approx 0, \quad x_2 \approx 4,2$$



«Найди О.Д.З.»

$$\sqrt{x-3} - 6\sqrt{2-x} = 18$$

«Выполни замену»

$$\sqrt{x^2 - 3x} = x^2 - 3x - 2$$

«Умножай на сопряжённое выражение»

$$\sqrt{4-x} + \sqrt{5+x} = 3$$

«Переходи к модулю»

$$\sqrt{x^2 + 2x + 1} + \sqrt{x^2 - 2x + 1} = 6$$



Иррациональные неравенства

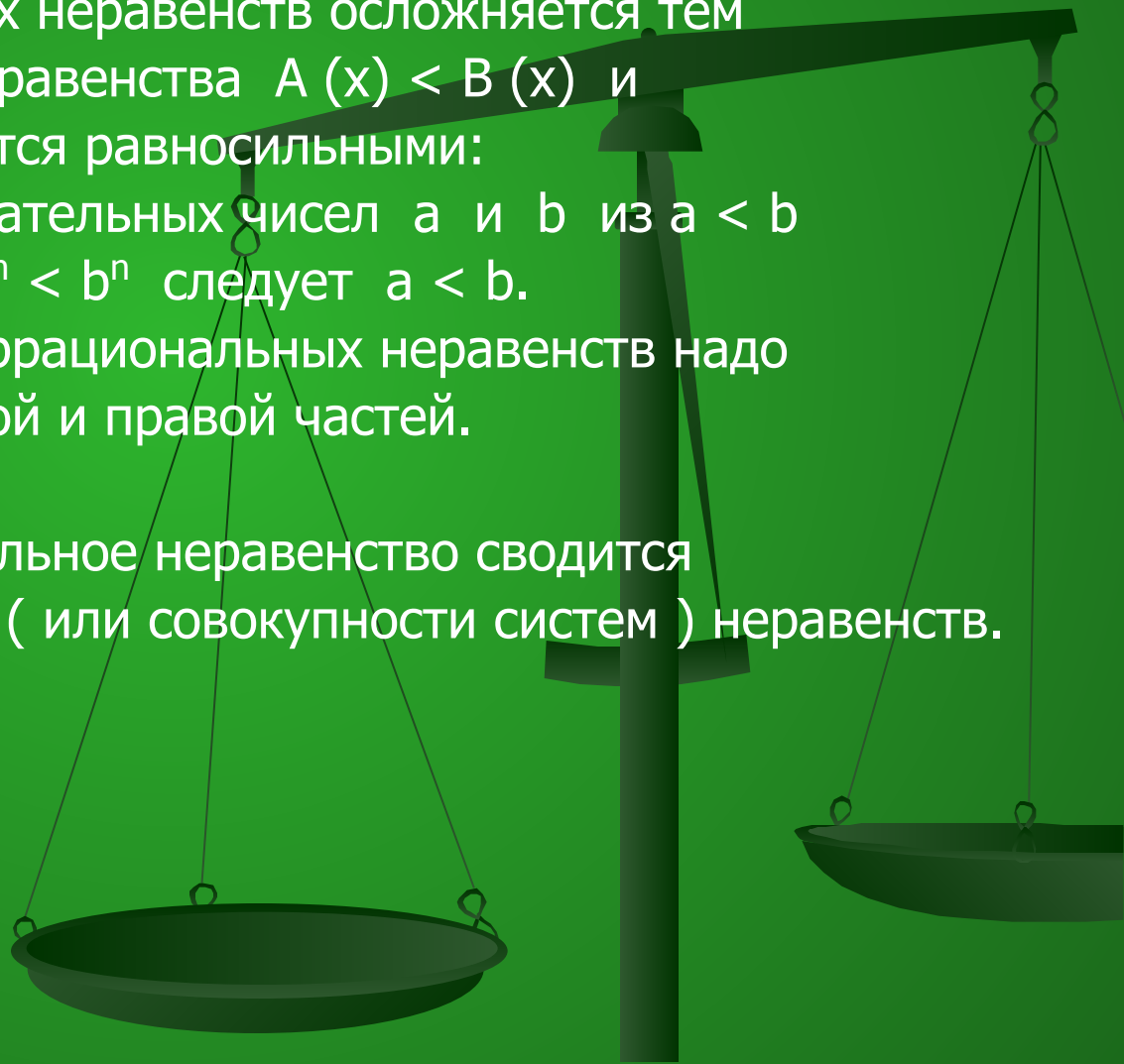
Решение иррациональных неравенств осложняется тем обстоятельством, что неравенства $A(x) < B(x)$ и

$A^n(x) < B^n(x)$ не являются равносильными:

Ведь только для неотрицательных чисел a и b из $a < b$ следует $a^n < b^n$, а из $a^n < b^n$ следует $a < b$.

Поэтому при решении иррациональных неравенств надо учитывать знаки его левой и правой частей.

Как правило, иррациональное неравенство сводится к равносильной системе (или совокупности систем) неравенств.



Иррациональные неравенства

$$\sqrt{f(x)} \geq \sqrt{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0, \\ f(x) \geq g(x). \end{cases}$$

$$\sqrt{f(x)} \geq \sqrt{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0, \\ f(x) \geq g(x). \end{cases}$$

$$\sqrt{f(x)} \geq g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0, \\ g(x) \geq 0, \\ f(x) \geq g^2(x). \end{cases}$$

$$\sqrt{f(x)} \leq g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0, \\ g(x) \geq 0, \\ f(x) \leq g^2(x). \end{cases}$$

$$\sqrt{f(x)} \geq g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0, \\ f(x) \geq 0; \\ g(x) \geq 0, \\ f(x) \geq g^2(x). \end{cases}$$

$$\sqrt{f(x)} \geq g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0, \\ f(x) \geq 0; \\ g(x) \geq 0, \\ f(x) \geq g^2(x). \end{cases}$$

Пример

$$\sqrt{2x - 5} > -4;$$

$$\text{ОДЗ: } 2x - 5 \geq 0; x \geq 2,5$$

$$x \in [2,5; +\infty)$$

Ответ: $[2,5; +\infty)$



Пример

$$\sqrt{x+2} > x$$

○

$\Leftrightarrow$

$$\begin{cases} x < 0 \\ x + 2 \geq 0 \end{cases}$$

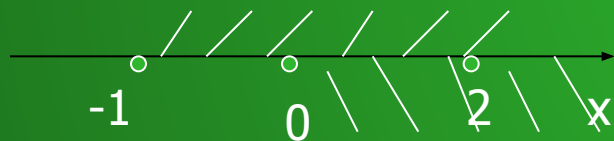
или

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ x + 2 > x^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x < 0 \\ x \geq -2 \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 - x - 2 < 0 \end{cases}$$



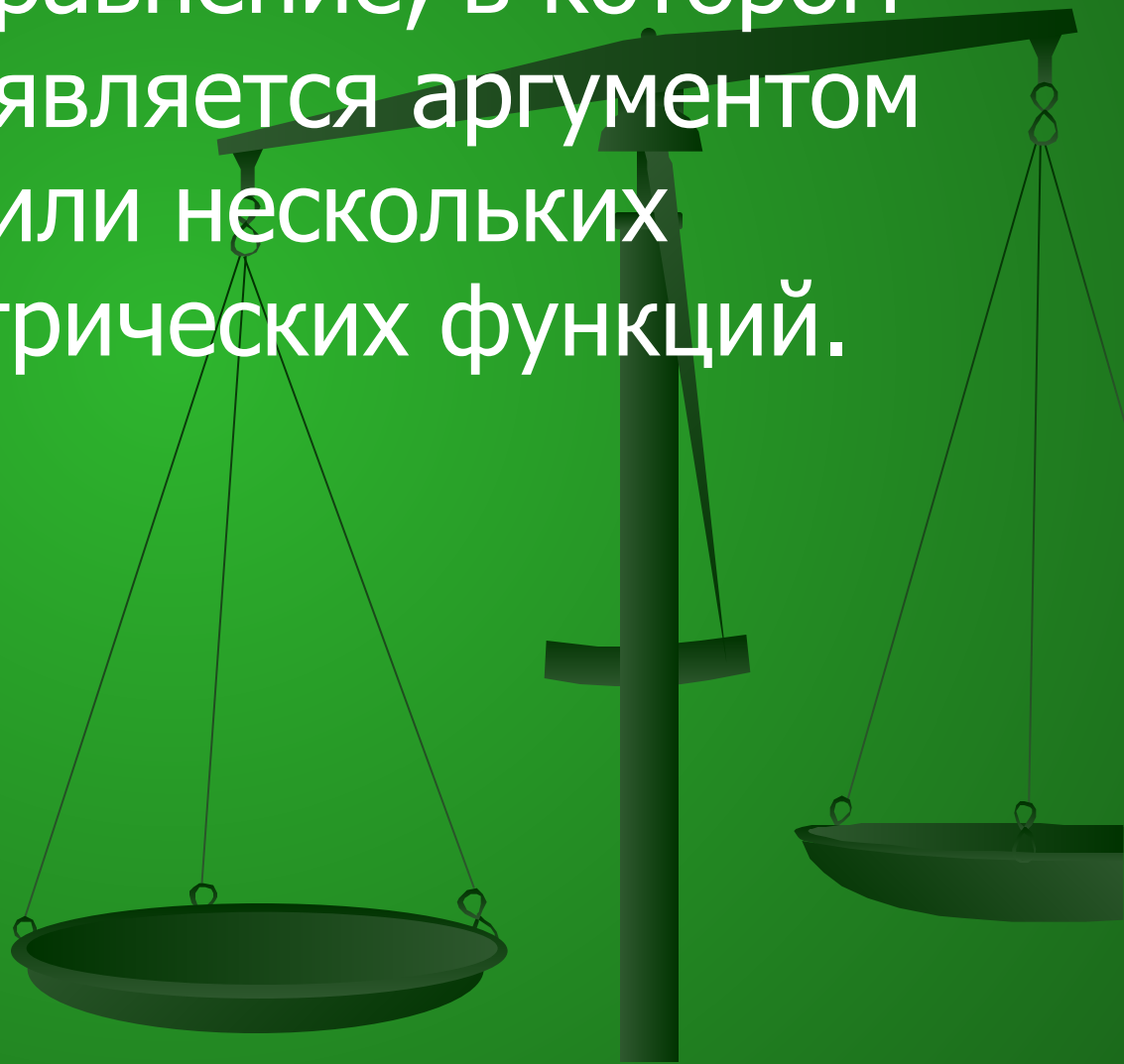
$$-2 \leq x < 0 \text{ или } \begin{cases} x \geq 0 \\ (x+1)(x-2) < 0 \end{cases}$$

Следовательно: $x \in [-2; 2)$

Ответ: $[-2; 2)$

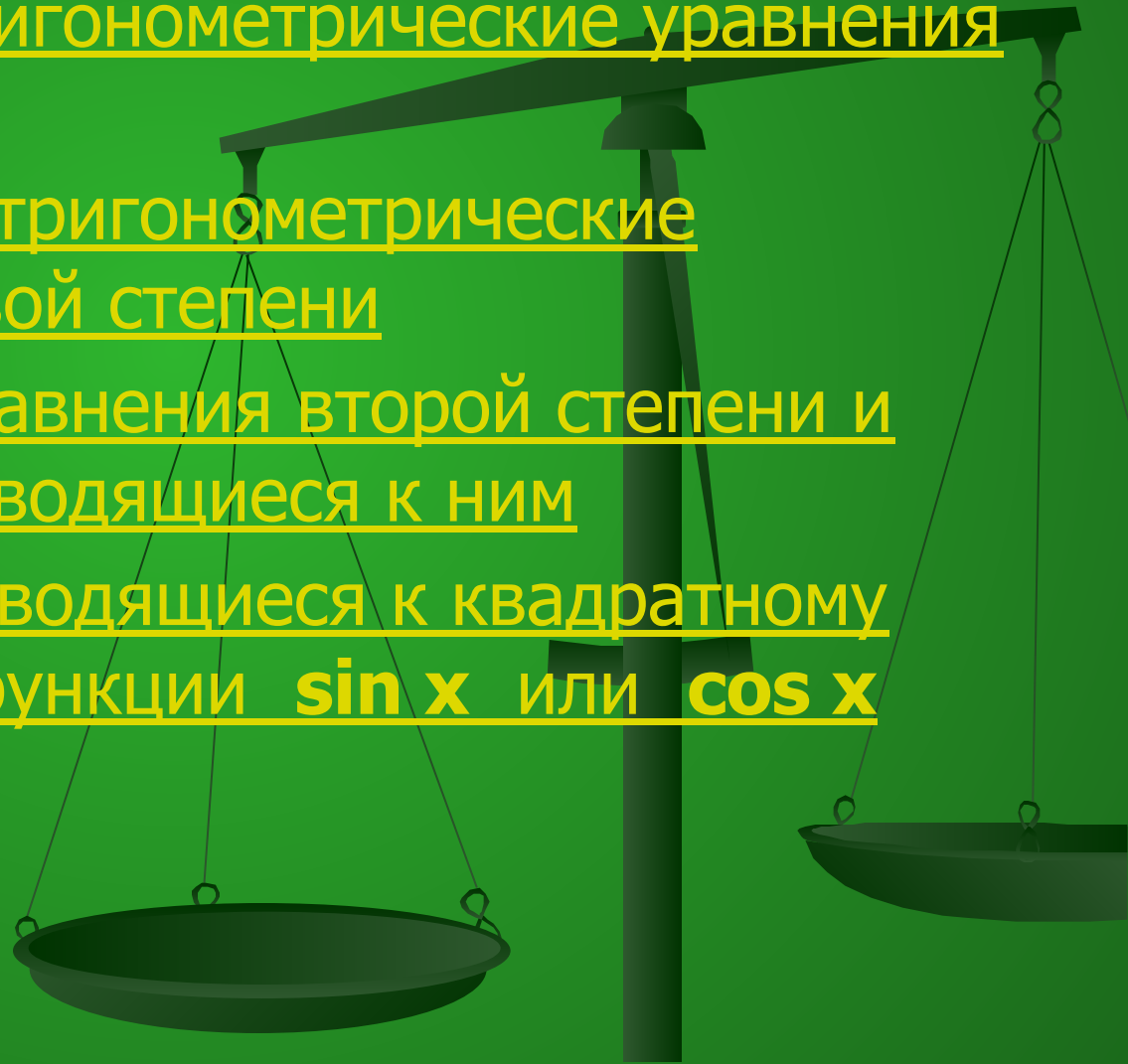
Тригонометрическим уравнением

называется уравнение, в котором переменная является аргументом одной или нескольких тригонометрических функций.



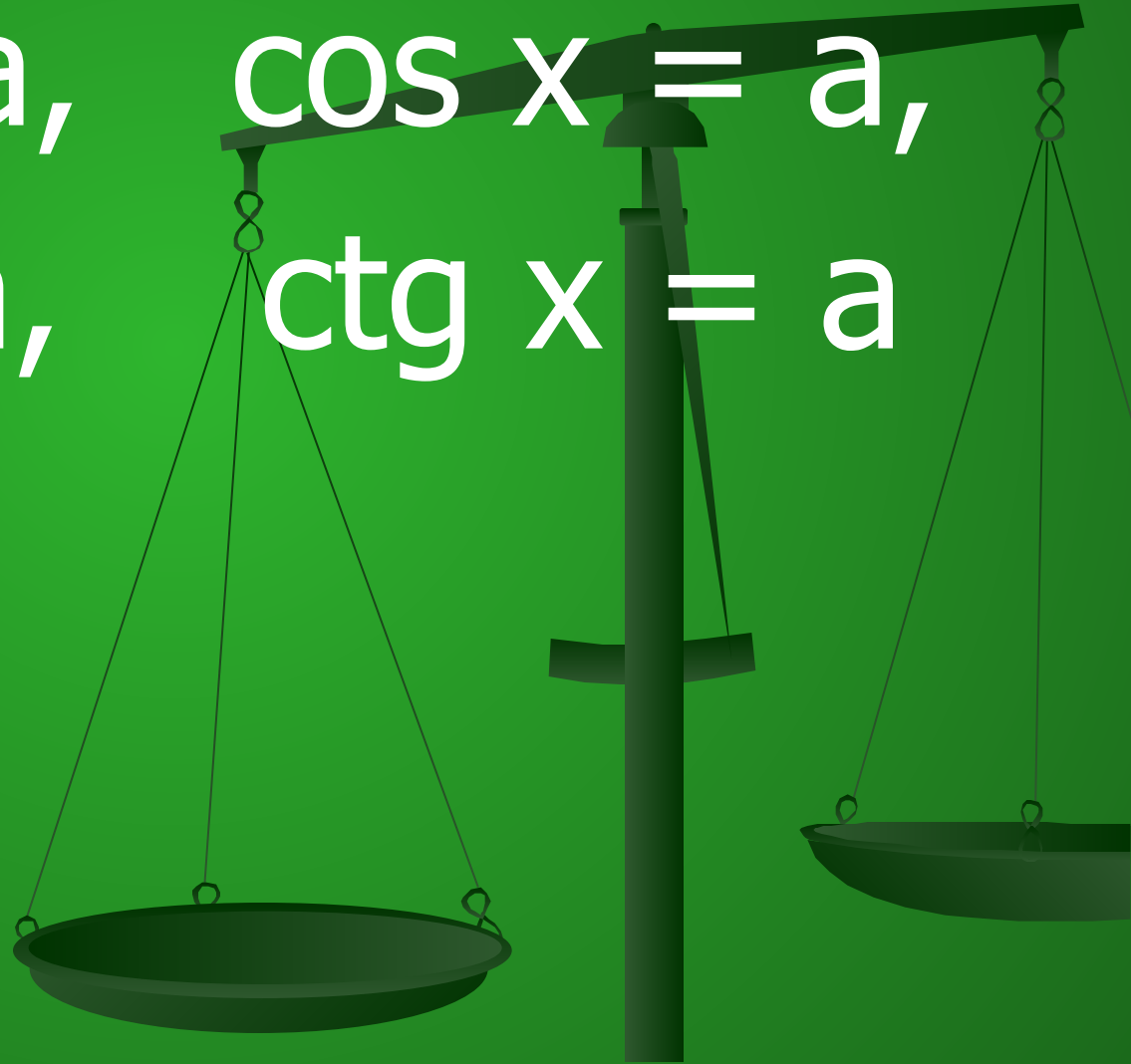
Основные типы тригонометрических уравнений

- Однородные тригонометрические уравнения первой степени
- Неоднородные тригонометрические уравнения первой степени
- Однородные уравнения второй степени и уравнения, приводящиеся к ним
- Уравнения, приводящиеся к квадратному относительно функции **$\sin x$** или **$\cos x$**



Простейшие тригонометрические уравнения

$$\sin x = a, \quad \cos x = a,$$
$$\operatorname{tg} x = a, \quad \operatorname{ctg} x = a$$



Решение уравнений с помощью формул

- $\sin x = a,$
- $x = (-1)^n \arcsin a + \pi n.$
 $a + 2\pi n.$
- **$\sin x = 0$**
- $x = \pi n.$
- $\sin x = 1$
- $x = \pi/2 + 2\pi n.$
- $\sin x = -1$
- $x = -\pi/2 + 2\pi n.$
- $\operatorname{tg} x = a \quad x = \operatorname{arctg} a + \pi n.$

$$\cos x = a$$

$$x = \pm \arccos$$

$$\cos x = 0$$

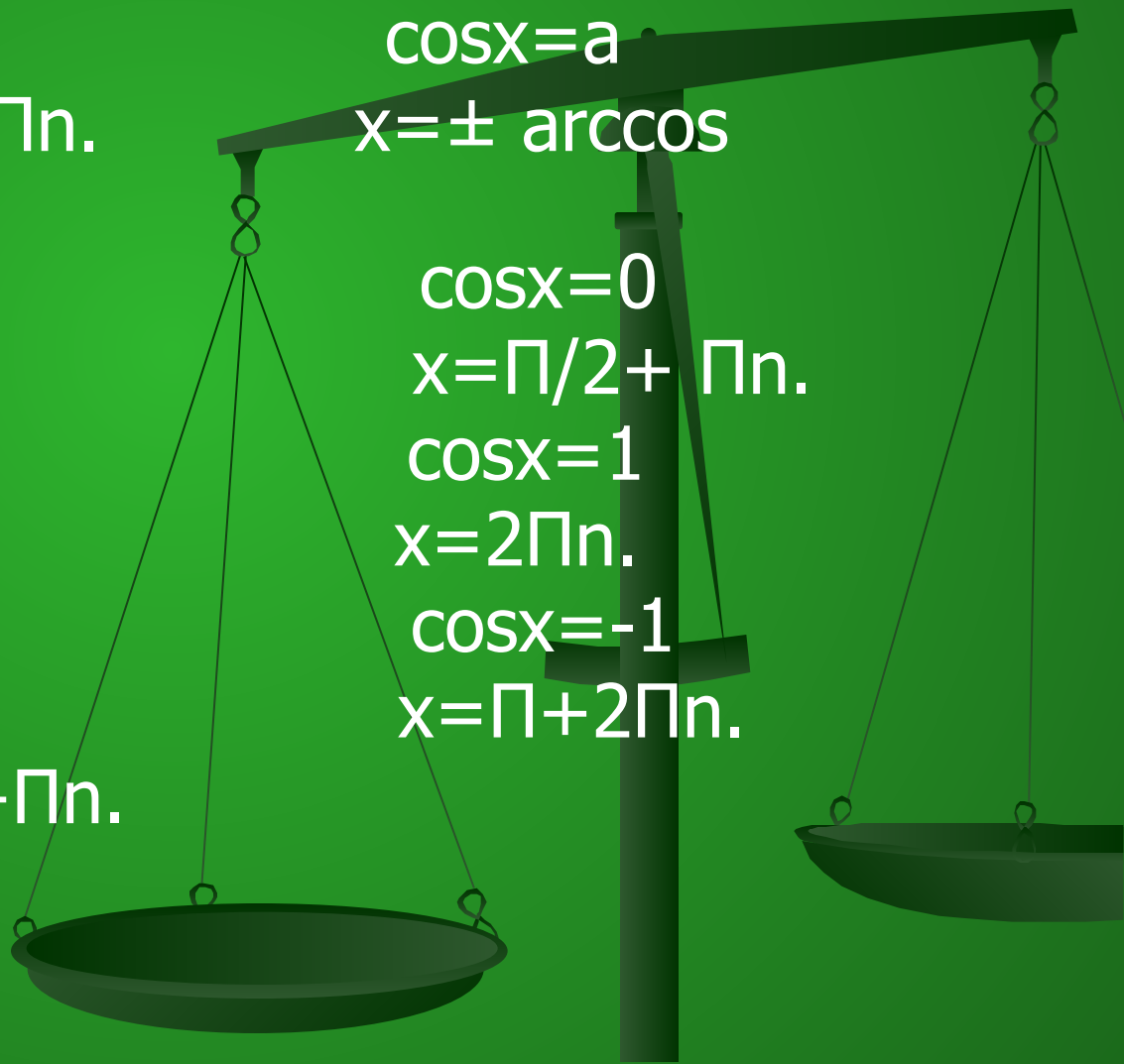
$$x = \pi/2 + \pi n.$$

$$\cos x = 1$$

$$x = 2\pi n.$$

$$\cos x = -1$$

$$x = \pi + 2\pi n.$$



Решить уравнение $2\cos 2x = -1$

Решение.

$$2\cos 2x = -1$$

$$\cos 2x = -1/2$$

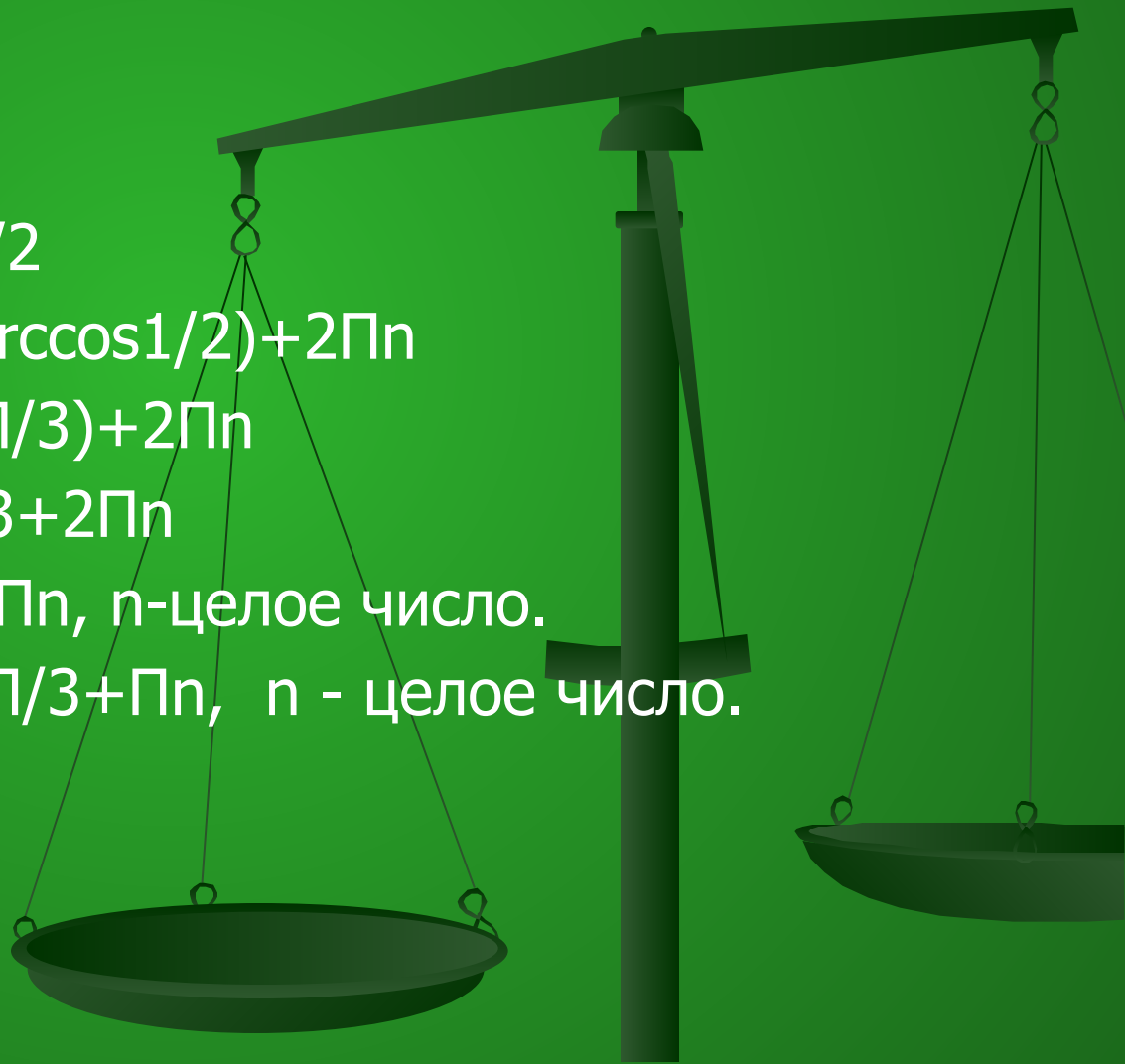
$$2x = +(\pi - \arccos 1/2) + 2\pi n$$

$$2x = +(\pi - \pi/3) + 2\pi n$$

$$2x = +2\pi/3 + 2\pi n$$

$$x = +\pi/3 + \pi n, \text{ } n\text{-целое число.}$$

Ответ: $+\pi/3 + \pi n$, n - целое число.



Решить уравнение $\text{tg}(3x - \pi/3) = -1$

Решение.

$$\text{tg}(3x - \pi/3) = -1$$

$$3x - \pi/3 = -\arctg 1 + \pi n$$

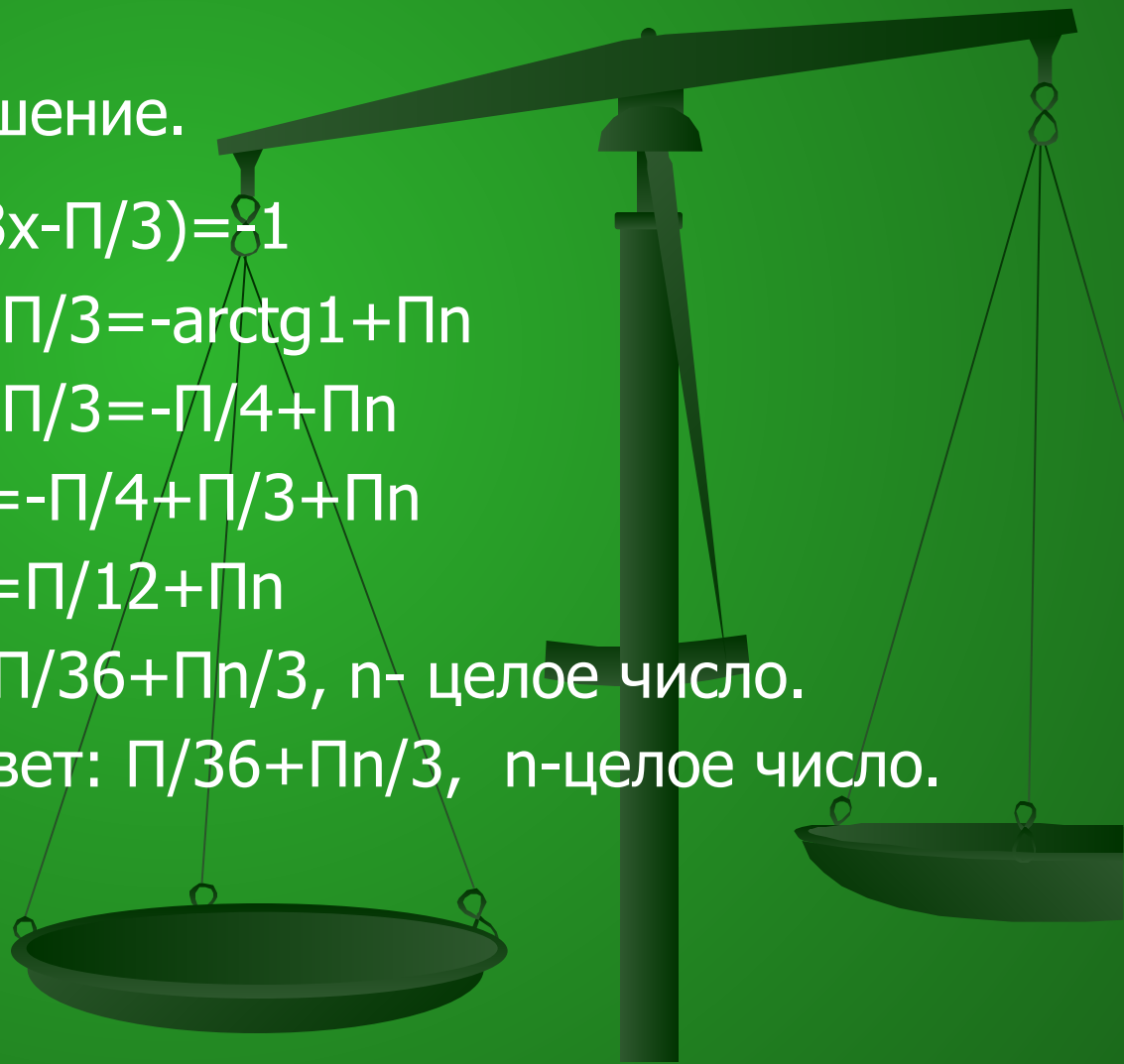
$$3x - \pi/3 = -\pi/4 + \pi n$$

$$3x = -\pi/4 + \pi/3 + \pi n$$

$$3x = \pi/12 + \pi n$$

$$x = \pi/36 + \pi n/3, \text{ } n - \text{целое число.}$$

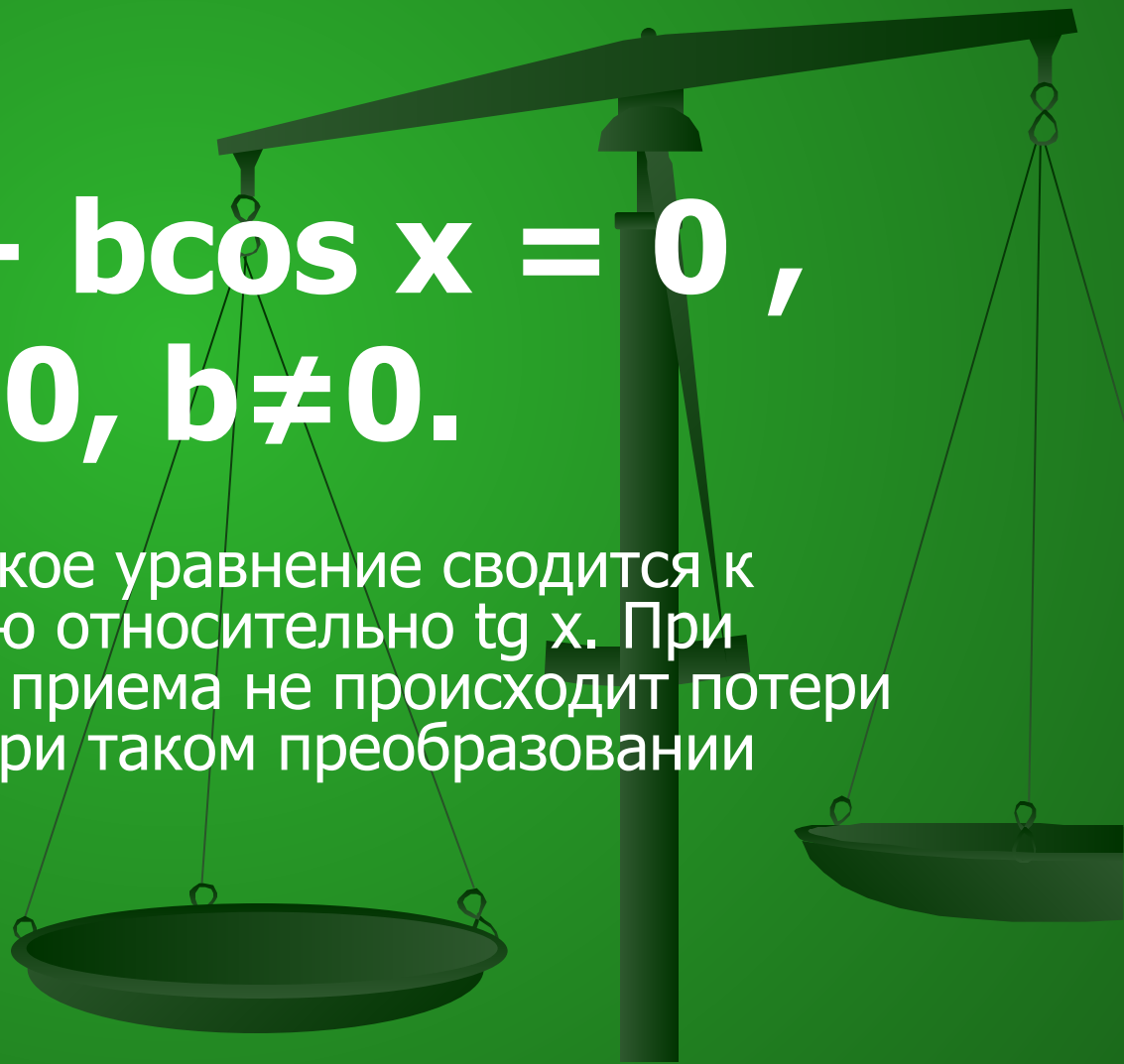
Ответ: $\pi/36 + \pi n/3$, n -целое число.



Однородные тригонометрические уравнения первой степени

$$a \sin x + b \cos x = 0, \\ a \neq 0, b \neq 0.$$

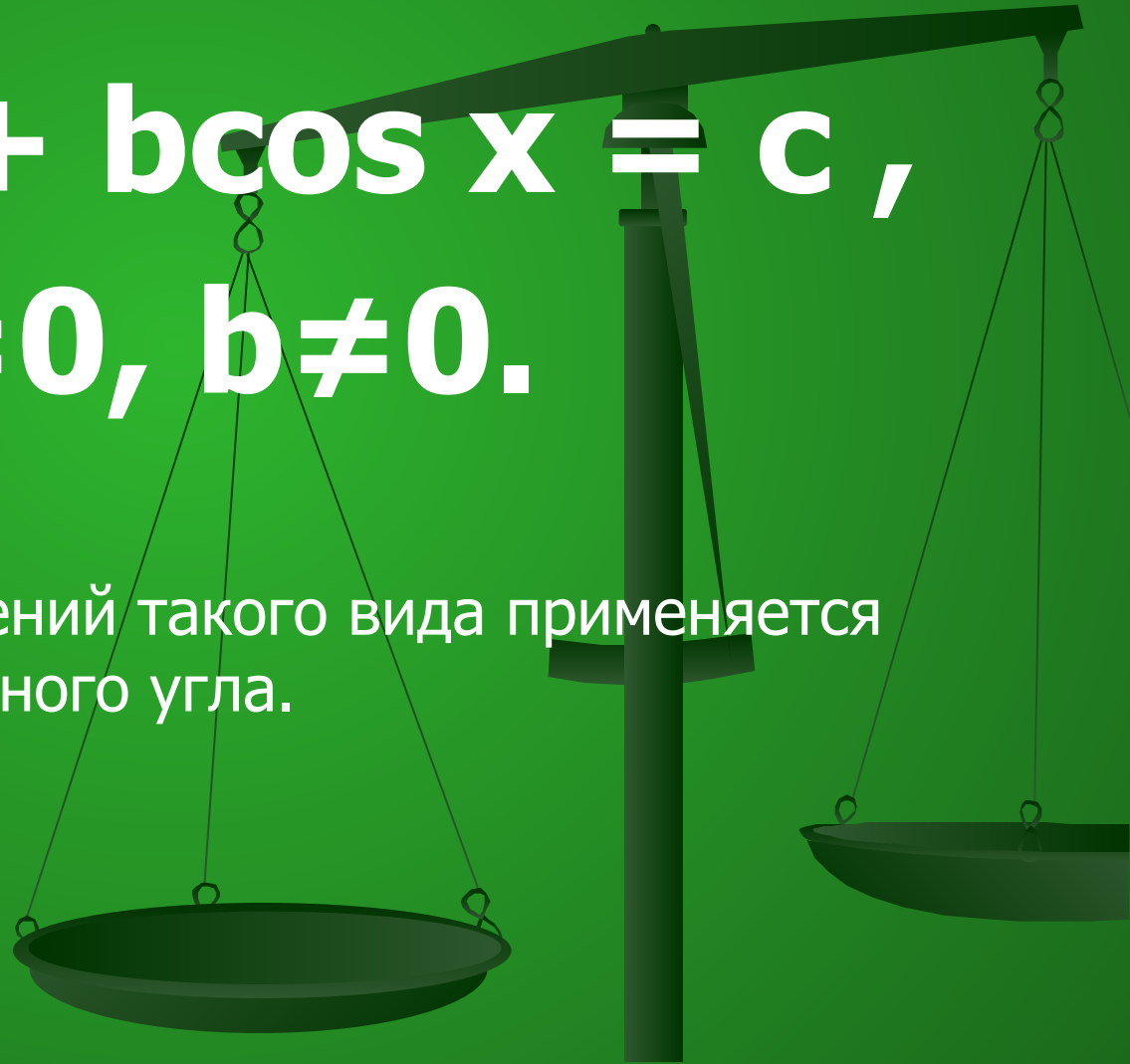
Делением на $\cos x$ такое уравнение сводится к линейному уравнению относительно $\operatorname{tg} x$. При использовании этого приема не происходит потери решения, хотя ОДЗ при таком преобразовании сужается.



Неоднородные тригонометрические уравнения первой степени

$$a \sin x + b \cos x = c, \\ a \neq 0, b \neq 0.$$

При решении уравнений такого вида применяется метод вспомогательного угла.



Однородные уравнения второй степени и
уравнения, приводящиеся к ним

$$a \sin^2 x + b \sin x \cos x + c \cos^2 x = 0$$
$$a \neq 0, c \neq 0.$$

Делением на $\cos^2 x \neq 0$ это уравнение приводится к
квадратному относительно функции $\operatorname{tg} x$:

$$a \operatorname{tg}^2 x + b \operatorname{tg} x + c = 0.$$

Метод введения новой переменной

$$\operatorname{tg} x/2 + 3 \operatorname{ctg} x/2 = 4.$$

$$y = \operatorname{tg} x/2,$$

$$y + 3/y = 4,$$

$$y^2 + 3 = 4y,$$

$$y^2 - 4y + 3 = 0,$$

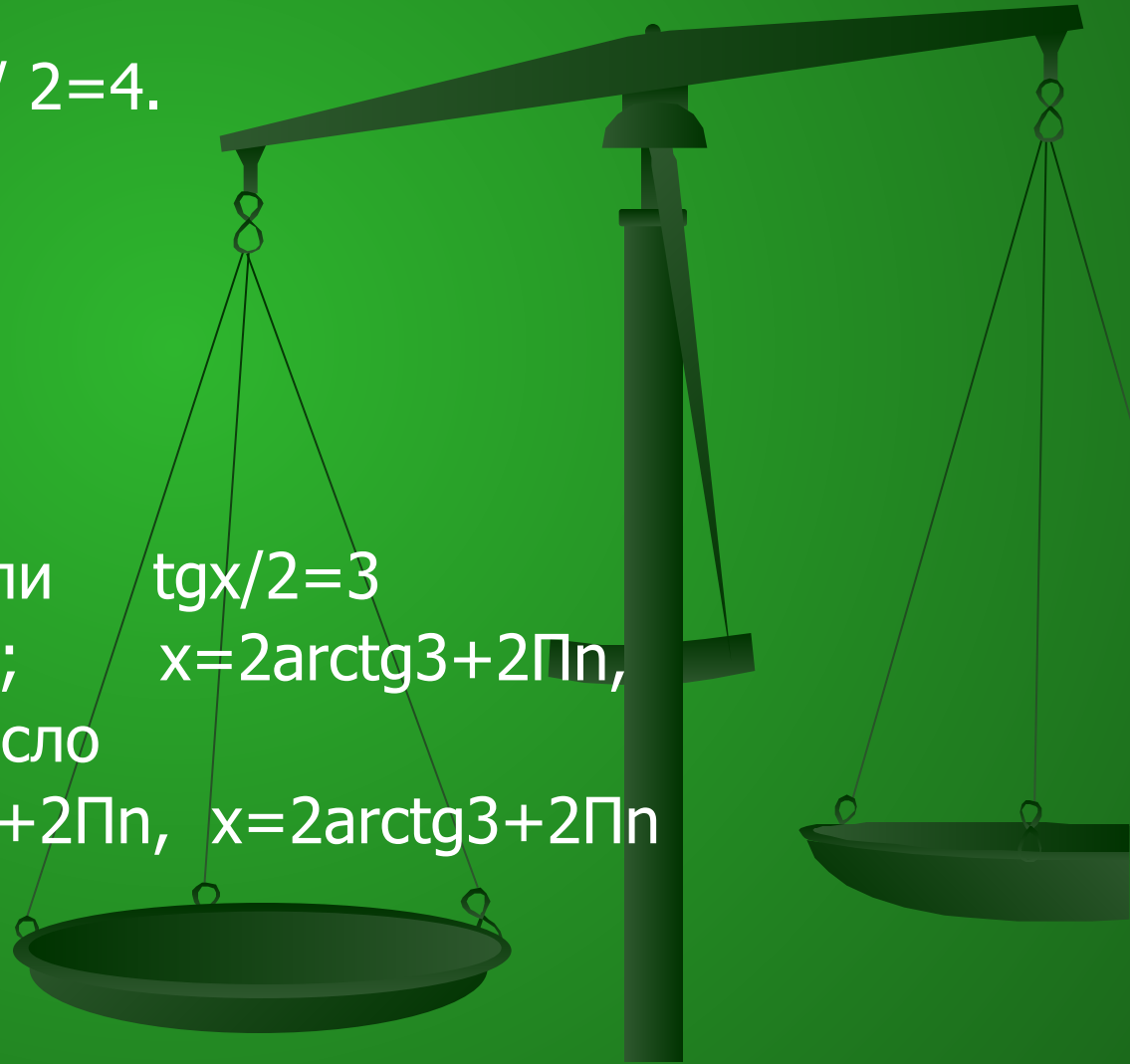
$$y = 1, y = 3.$$

$$\operatorname{tg} x/2 = 1 \quad \text{или} \quad \operatorname{tg} x/2 = 3$$

$$x = \pi/2 + 2\pi n; \quad x = 2 \arctg 3 + 2\pi n,$$

n -целое число

Ответ: $x = \pi/2 + 2\pi n, \quad x = 2 \arctg 3 + 2\pi n$



МЕТОД РАЗЛОЖЕНИЯ НА МНОЖИТЕЛИ.

Решить уравнение $2\sin x \cos 5x - \cos 5x = 0$.

Решение.

$$2\sin x \cos 5x - \cos 5x = 0$$

$$\cos 5x (2\sin x - 1) = 0$$

$$\cos 5x = 0;$$

$$\sin x = 1/2,$$

$$5x = \pi/2 + \pi n;$$

$$x = (-1)^n \pi/6 + \pi n,$$

$$x = \pi/10 + \pi n/5;$$

$$x = (-1)^n \pi/6 + \pi n, \text{ -целое}$$

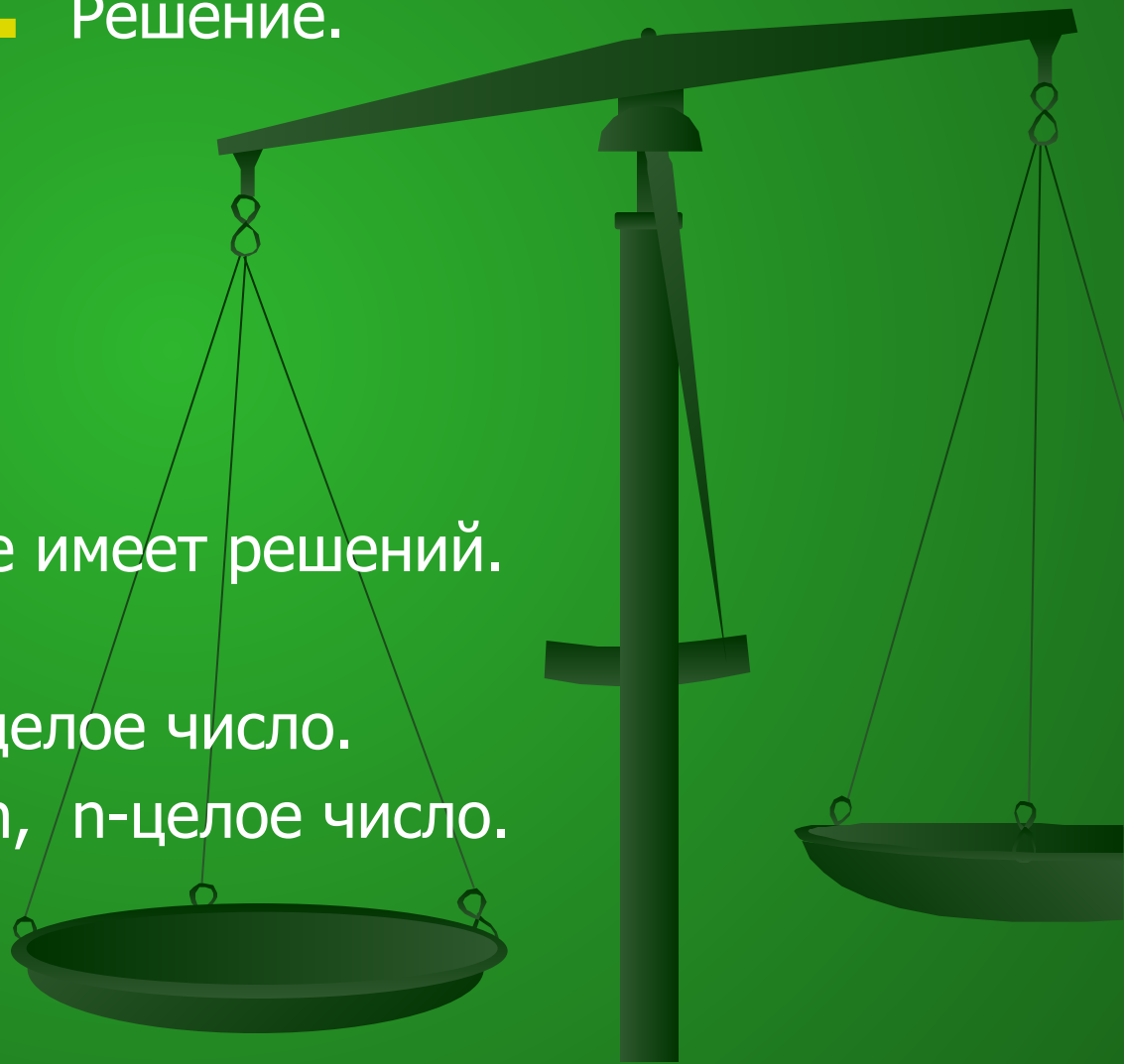
число.

Ответ: $x = \pi/10 + \pi n/5, x = (-1)^n \pi/6 + \pi n, \text{ -целое}$
число.

Решить уравнение $2\sin^2 x - 5\sin x + 2 = 0$.

■ Решение.

- $2\sin^2 x - 5\sin x + 2 = 0$
- $\sin x = t$
- $2t^2 - 5t + 2 = 0$
- $t = 2, t = 1/2$
- $\sin x = 2, \sin x = 1/2$.
- Уравнение $\sin x = 2$ не имеет решений.
- $\sin x = 1/2$
- $x = (-1)^n \pi/6 + \pi n, n$ -целое число.
- Ответ: $(-1)^n \pi/6 + \pi n, n$ -целое число.



Решение простейших тригонометрических неравенств



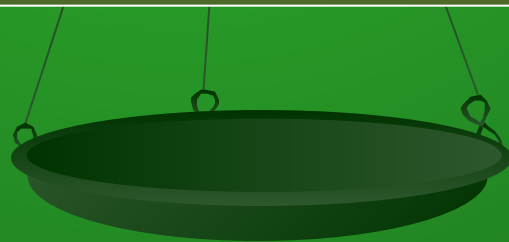
Простейшими тригонометрическими
неравенствами называют неравенства
вида

$$\sin t \geq a \ (\sin t \leq a)$$

$$\cos t \geq a \ (\cos t \leq a)$$

$$\operatorname{tg} t \geq a \ (\operatorname{tg} t \leq a)$$

$$\operatorname{ctg} t \geq a \ (\operatorname{ctg} t \leq a)$$



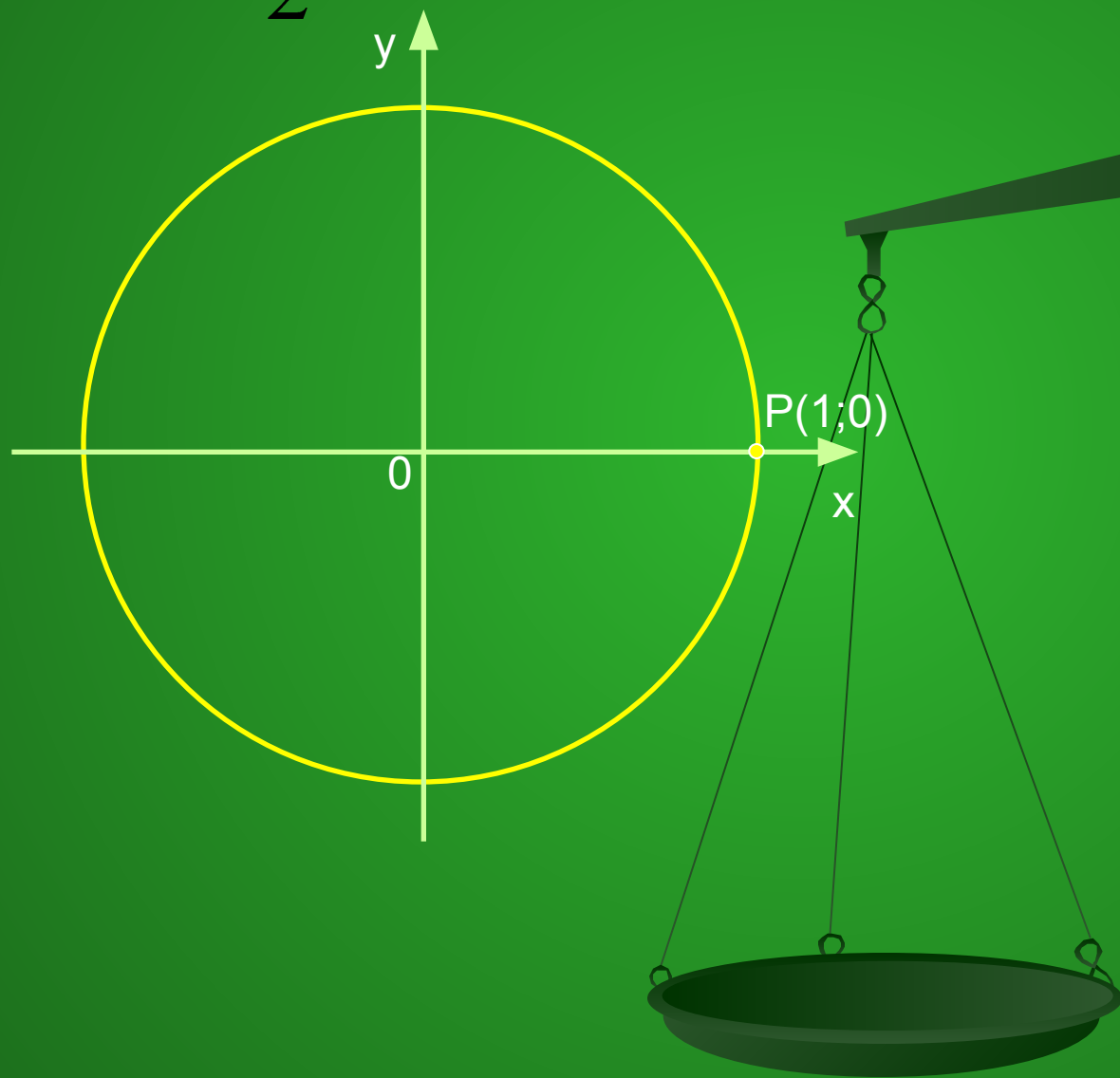
Рассмотрим решения неравенств вида:

$$\cos t \geq \frac{1}{2} \quad \text{и} \quad \cos t < \frac{1}{2}$$

$$\sin t < \frac{1}{2}$$

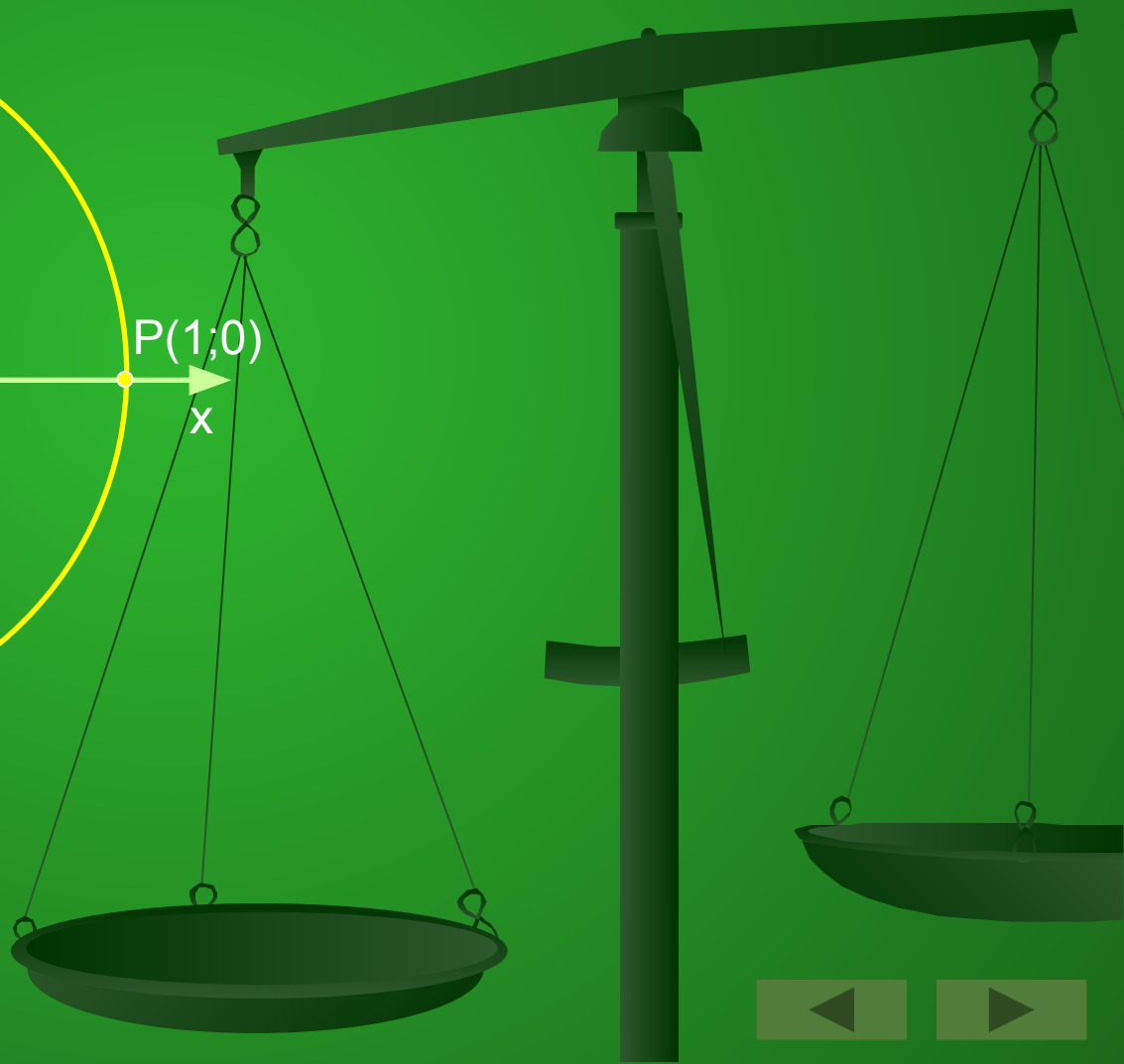
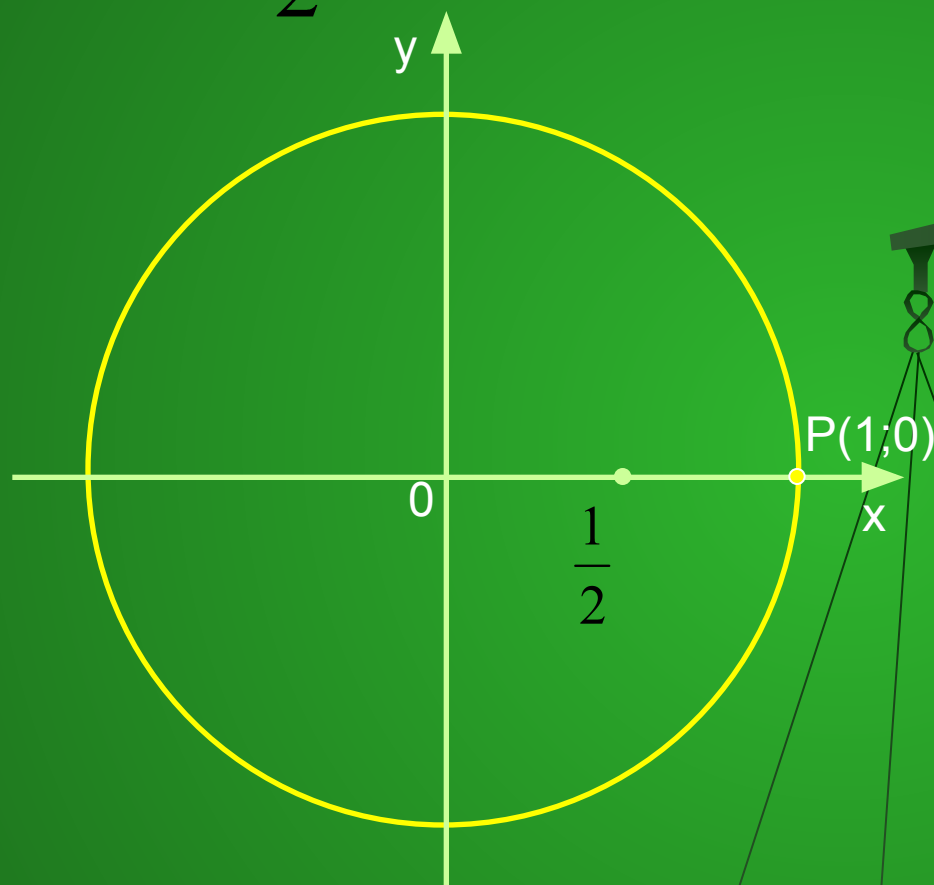
$$\cos t \geq \frac{1}{2}$$

Шаг 1



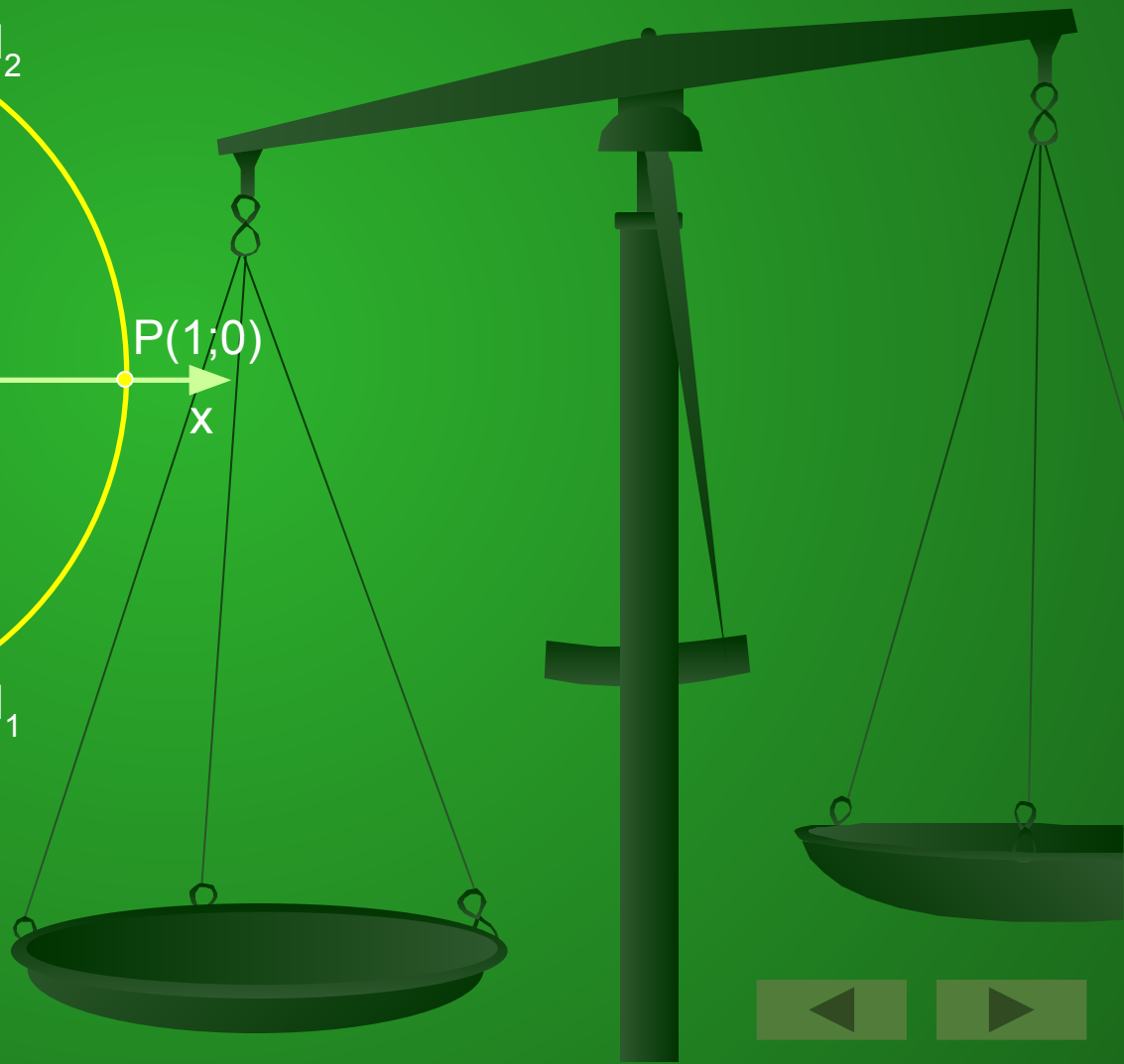
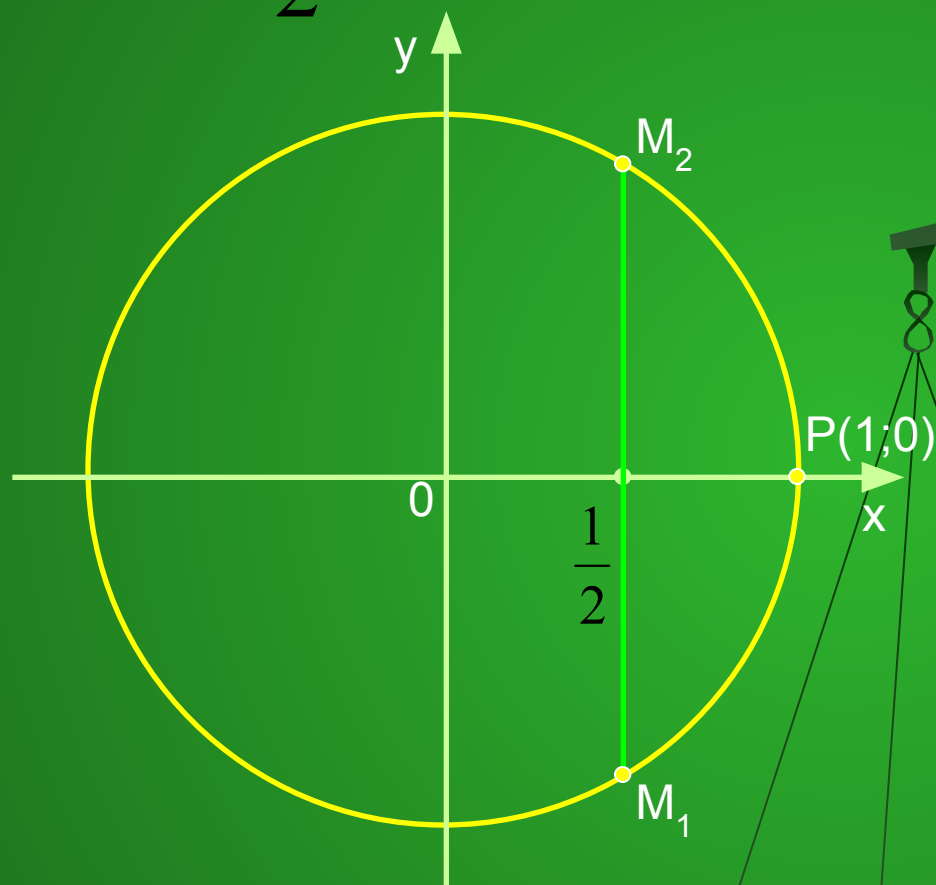
$$\cos t \geq \frac{1}{2}$$

Шаг 2



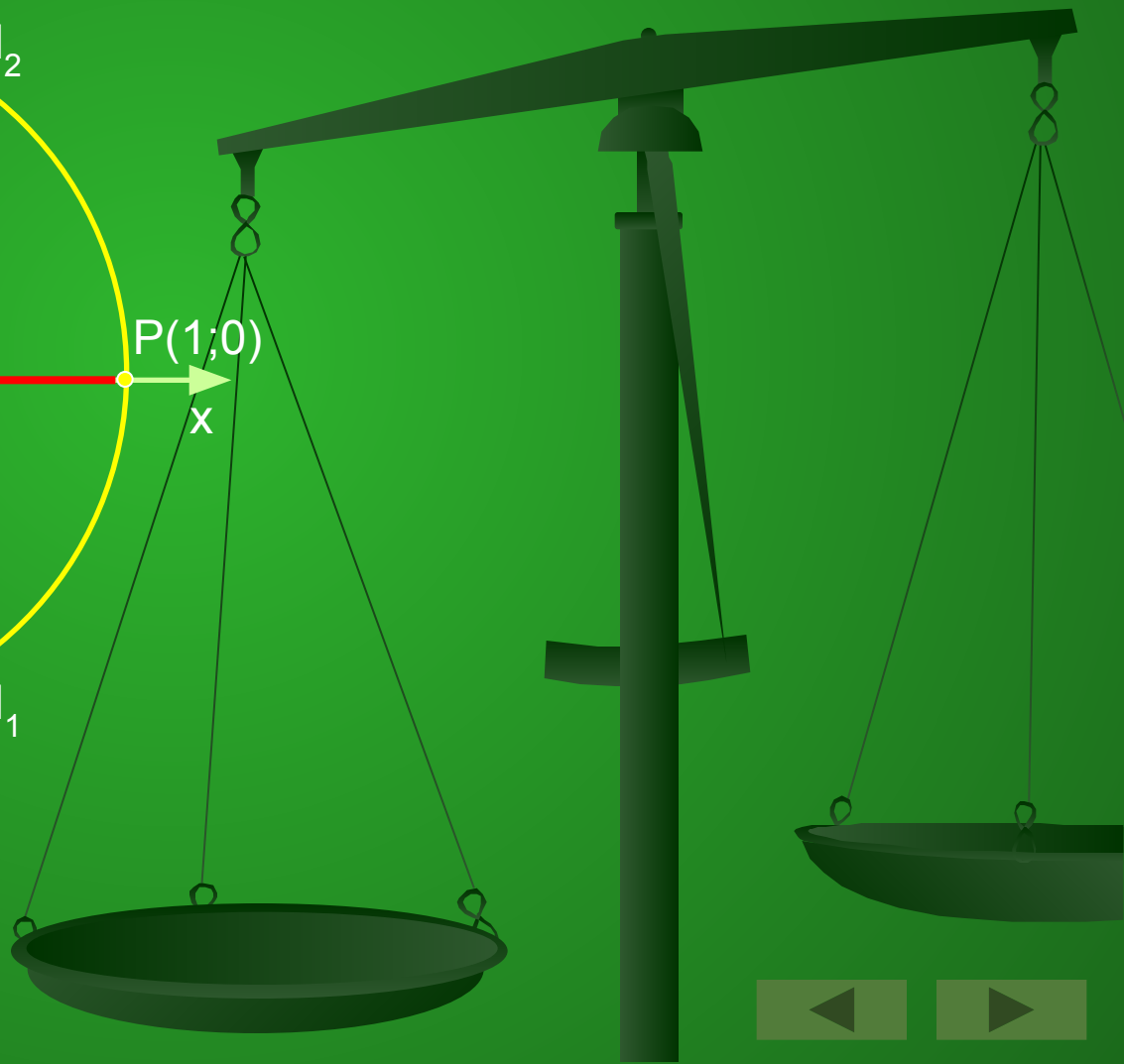
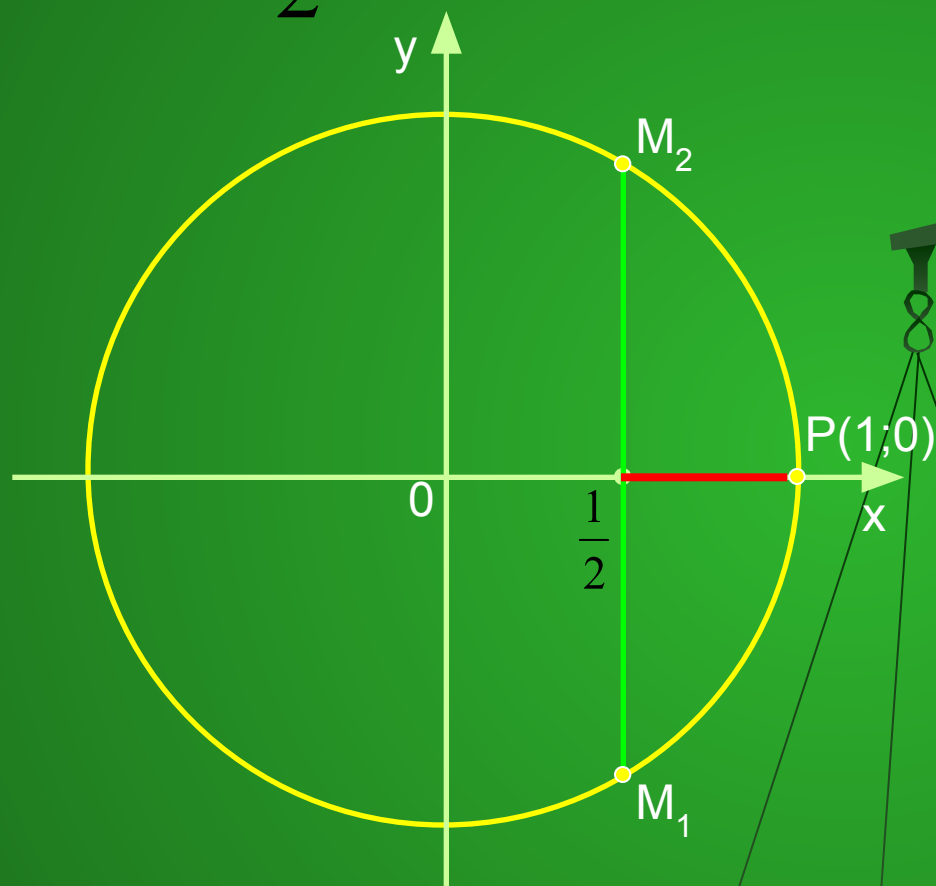
$$\cos t \geq \frac{1}{2}$$

Шаг 3



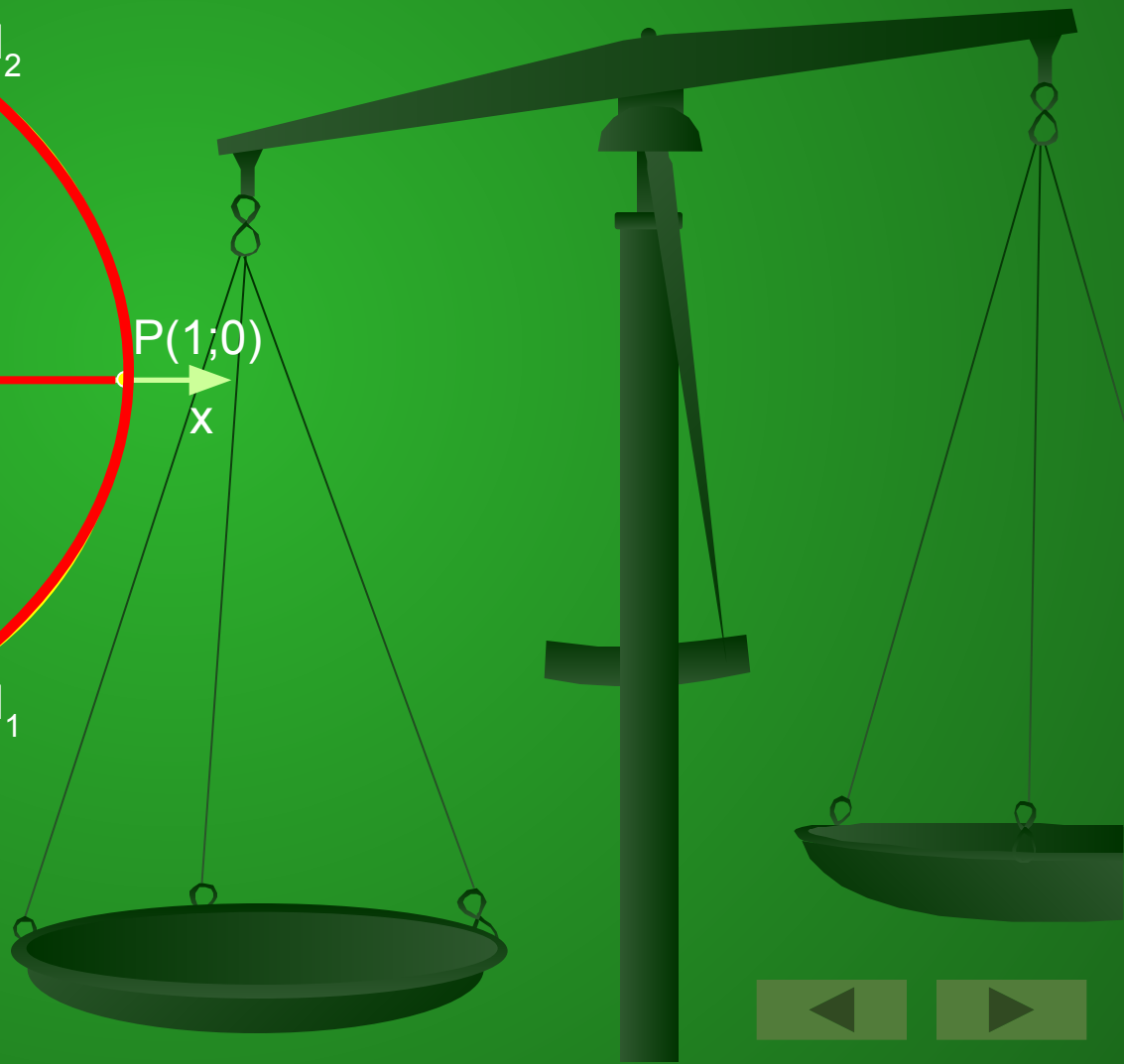
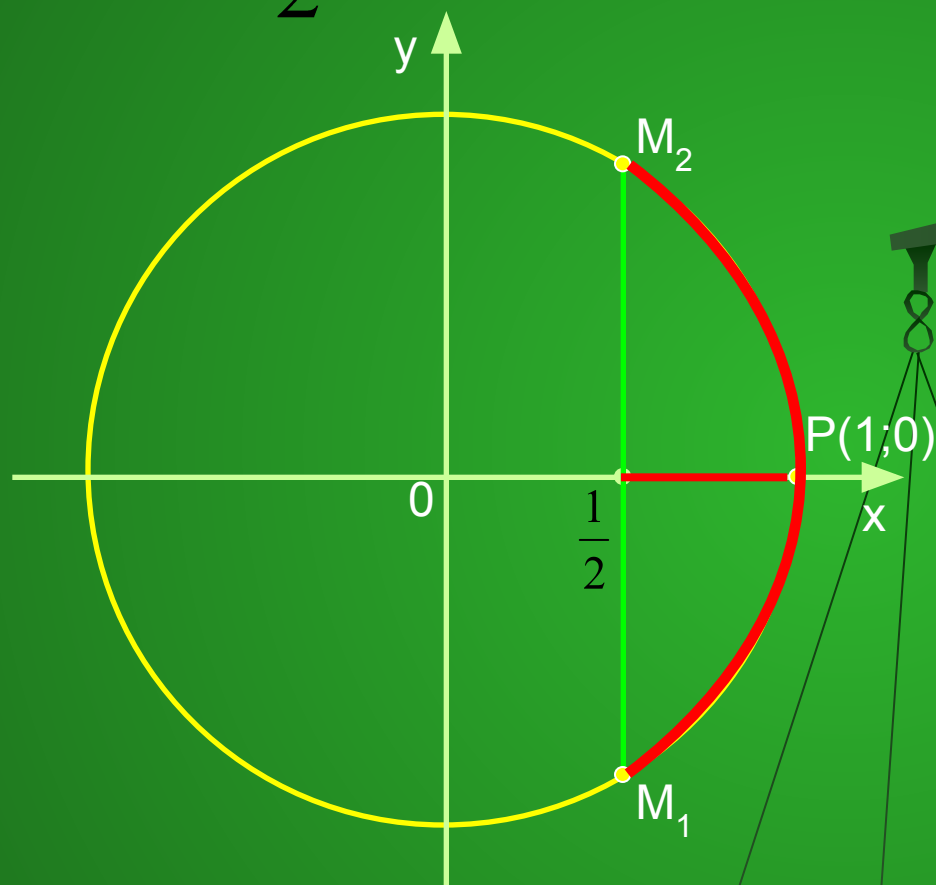
$$\cos t \geq \frac{1}{2}$$

Шаг 4



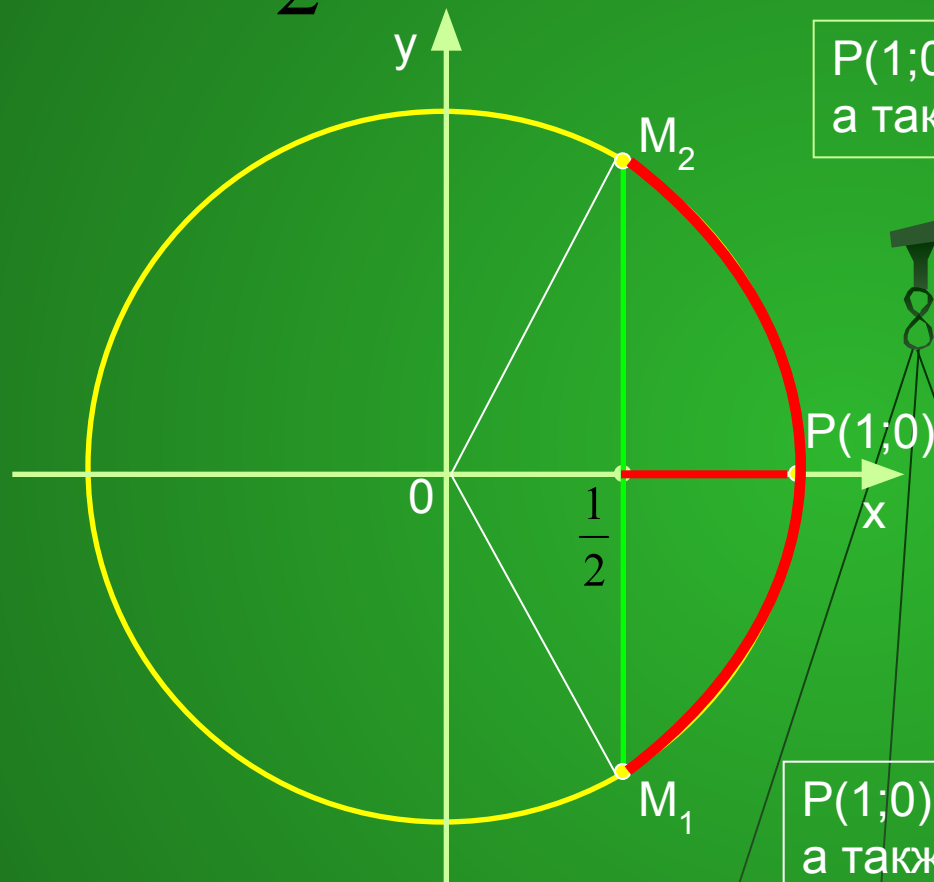
$$\cos t \geq \frac{1}{2}$$

Шаг 5



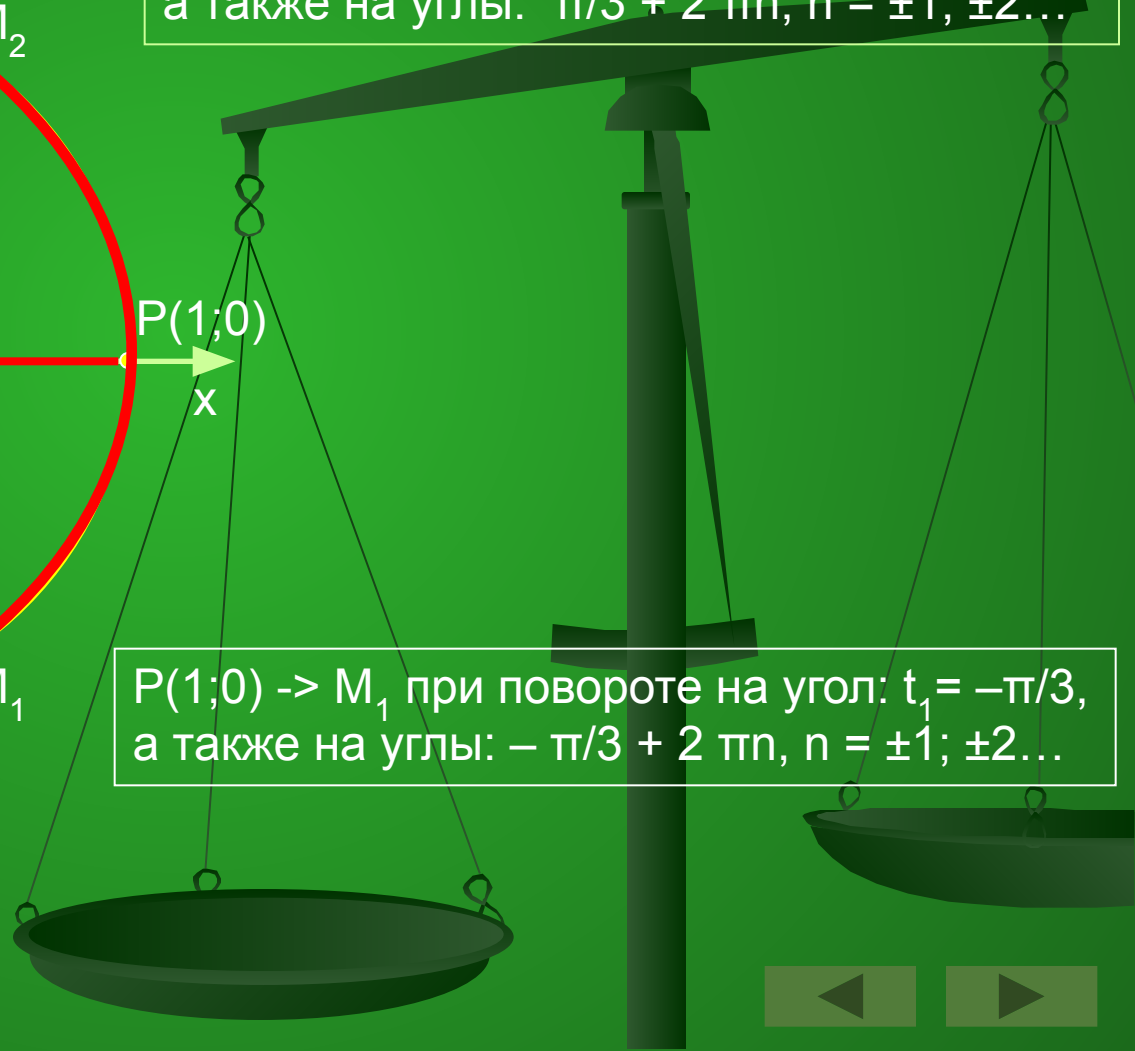
$$\cos t \geq \frac{1}{2}$$

Шаг 6



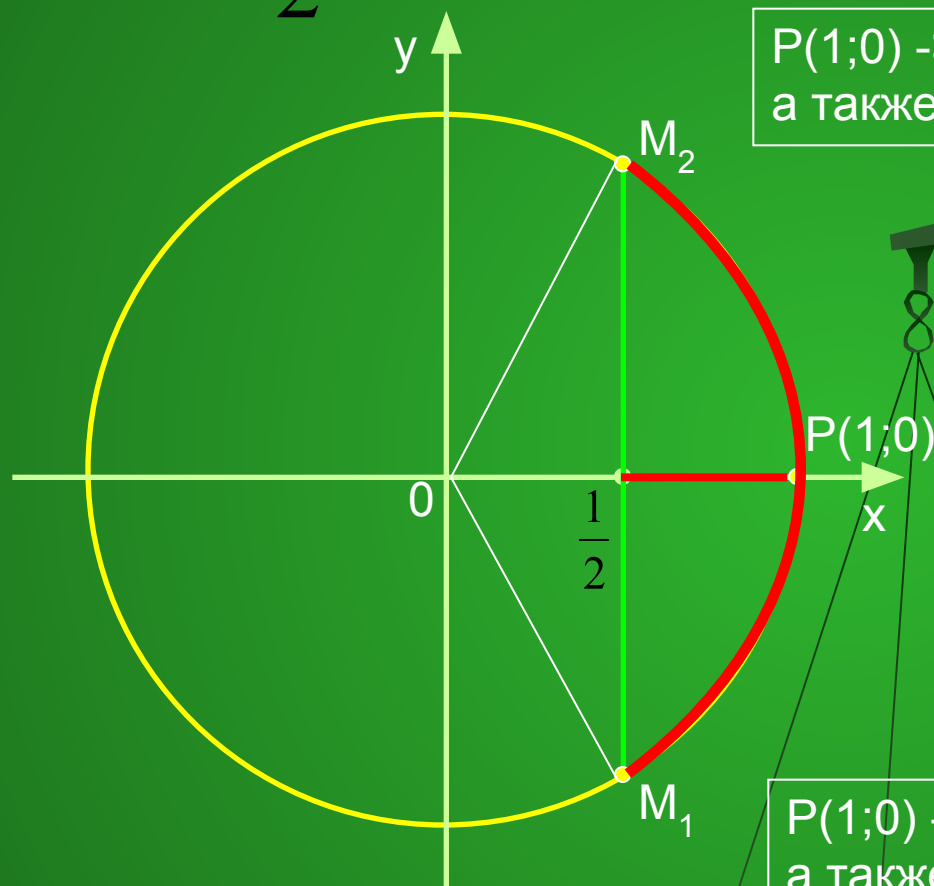
$P(1;0) \rightarrow M_2$ при повороте на угол: $t_2 = \pi/3$,
а также на углы: $\pi/3 + 2\pi n$, $n = \pm 1; \pm 2 \dots$

$P(1;0) \rightarrow M_1$ при повороте на угол: $t_1 = -\pi/3$,
а также на углы: $-\pi/3 + 2\pi n$, $n = \pm 1; \pm 2 \dots$



$$\cos t \geq \frac{1}{2}$$

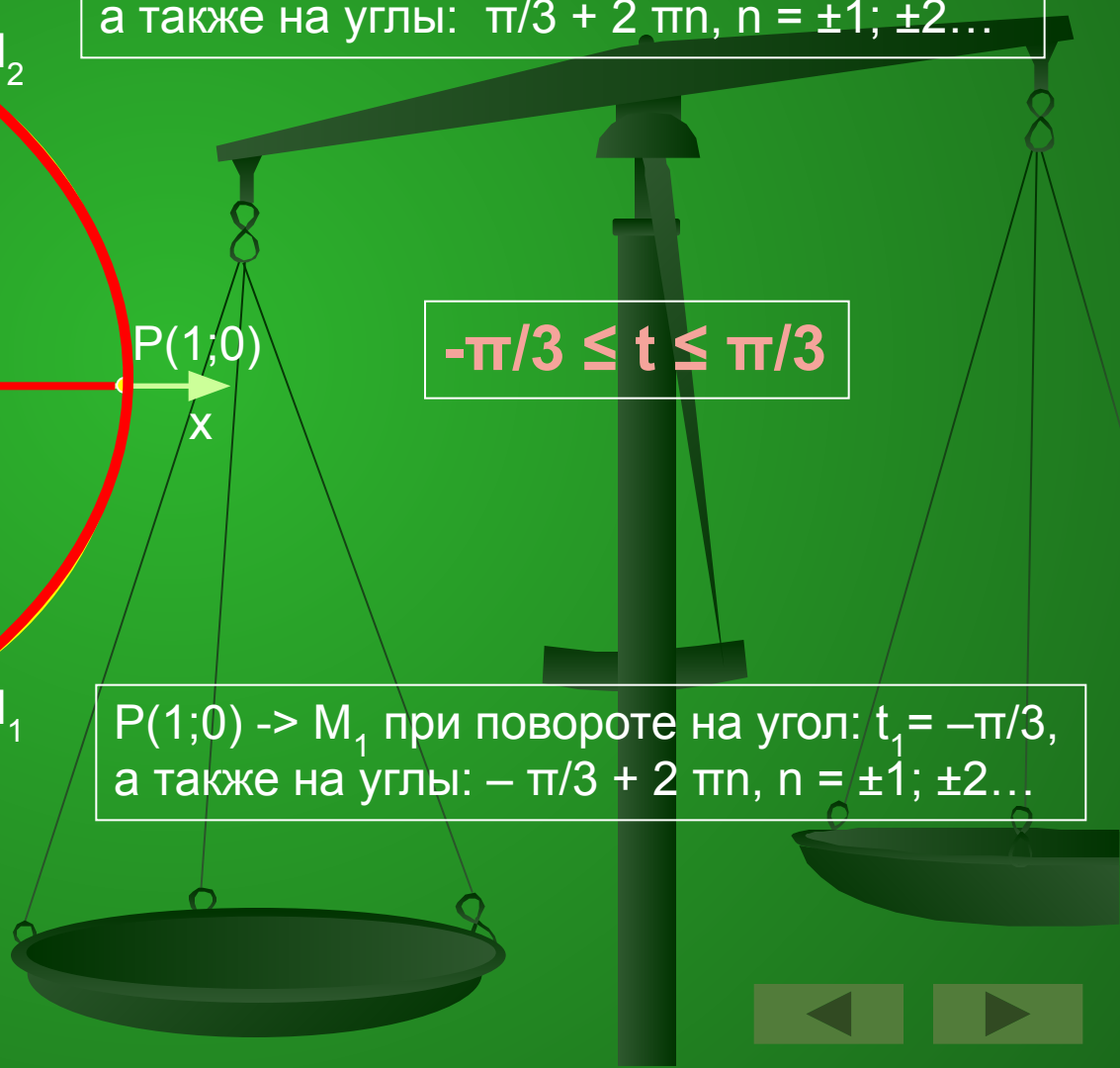
Шаг 7



$P(1;0) \rightarrow M_2$ при повороте на угол: $t_2 = \pi/3$,
а также на углы: $\pi/3 + 2\pi n$, $n = \pm 1; \pm 2 \dots$

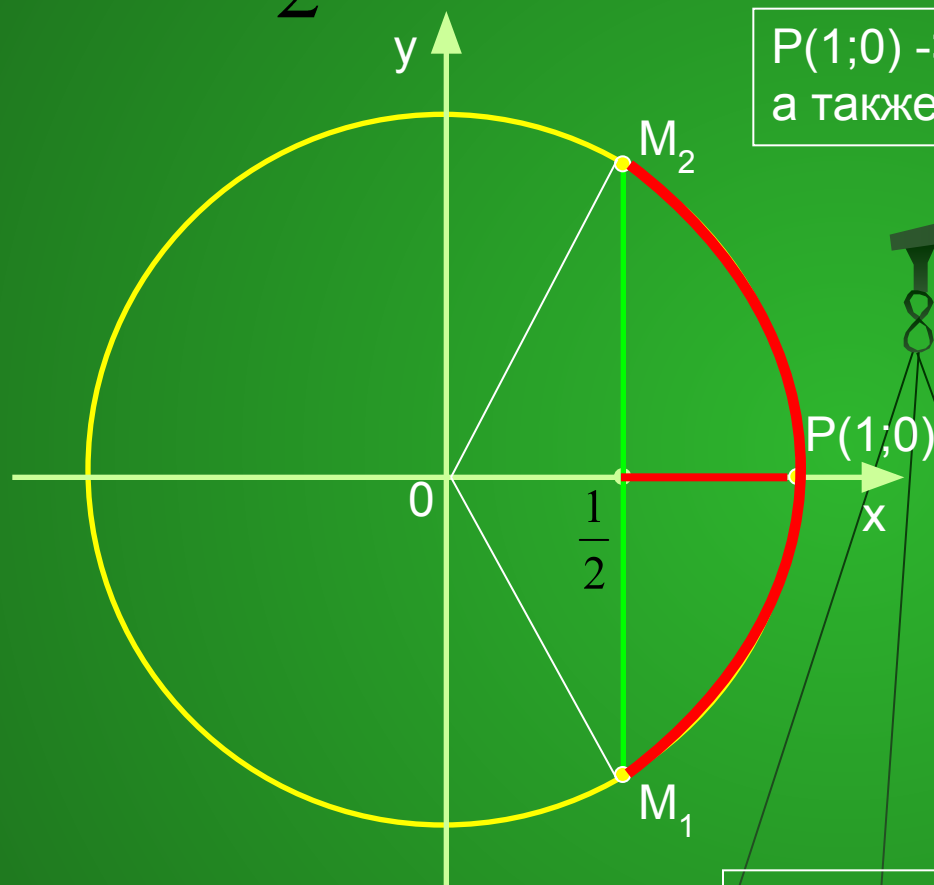
$$-\pi/3 \leq t \leq \pi/3$$

$P(1;0) \rightarrow M_1$ при повороте на угол: $t_1 = -\pi/3$,
а также на углы: $-\pi/3 + 2\pi n$, $n = \pm 1; \pm 2 \dots$



$$\cos t \geq \frac{1}{2}$$

Шаг 8



$P(1;0) \rightarrow M_2$ при повороте на угол: $t_2 = \pi/3$,
а также на углы: $\pi/3 + 2\pi n$, $n = \pm 1; \pm 2 \dots$

$$-\pi/3 \leq t \leq \pi/3$$

Все решения данного
неравенства – множество
промежутков

$$-\pi/3 + 2\pi n \leq t \leq \pi/3 + 2\pi n,$$

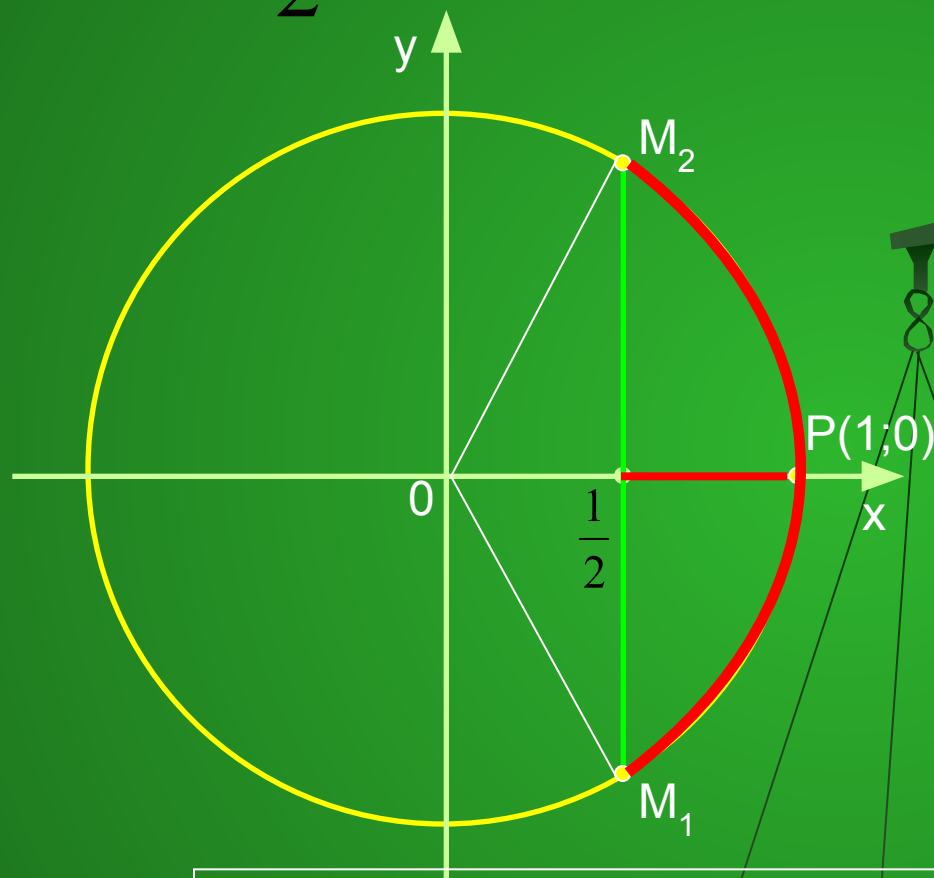
n – целое число.

$P(1;0) \rightarrow M_1$ при повороте на угол: $t_1 = -\pi/3$,
а также на углы: $-\pi/3 + 2\pi n$, $n = \pm 1; \pm 2 \dots$



$$\cos t \geq \frac{1}{2}$$

Шаг 9



Все решения данного неравенства – множество промежутков

$$-\pi/3 + 2\pi n \leq t \leq \pi/3 + 2\pi n,$$

n – целое число.

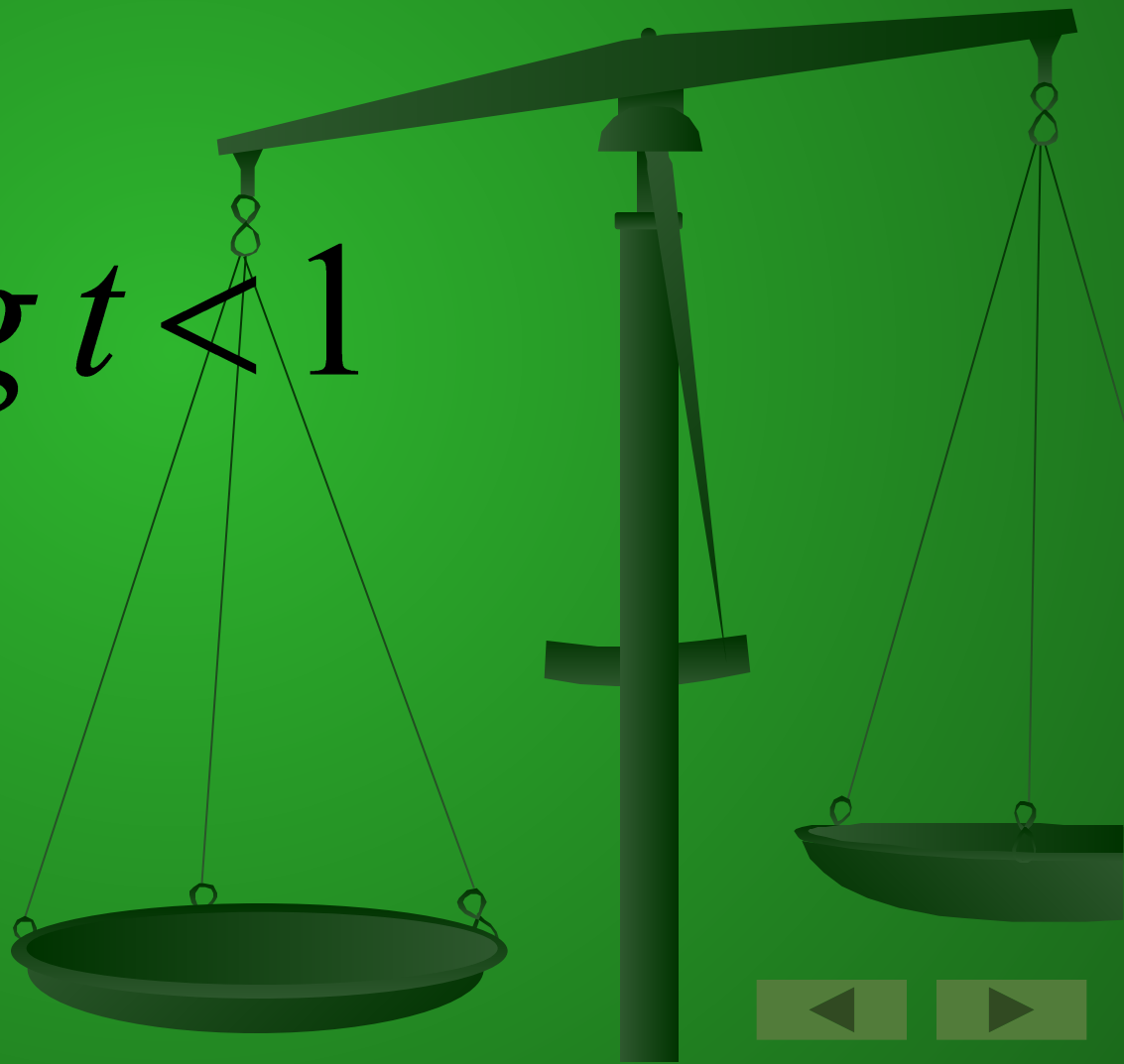
Ответ: $-\pi/3 + 2\pi n \leq t \leq \pi/3 + 2\pi n$, n – целое число.

Ответ: $[-\pi/3 + 2\pi n; \pi/3 + 2\pi n]$, n – целое число.

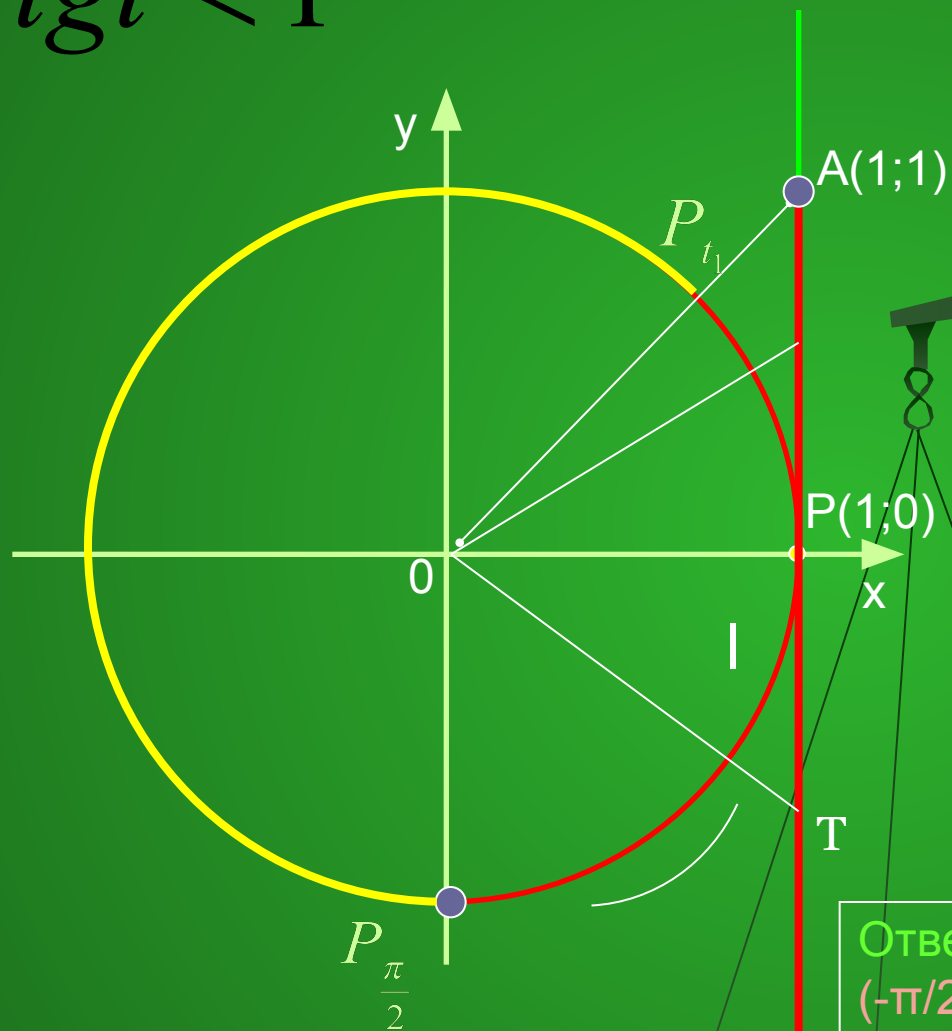


Решите неравенство

$$\operatorname{tg} t < 1$$



$$\operatorname{tg} t < 1$$



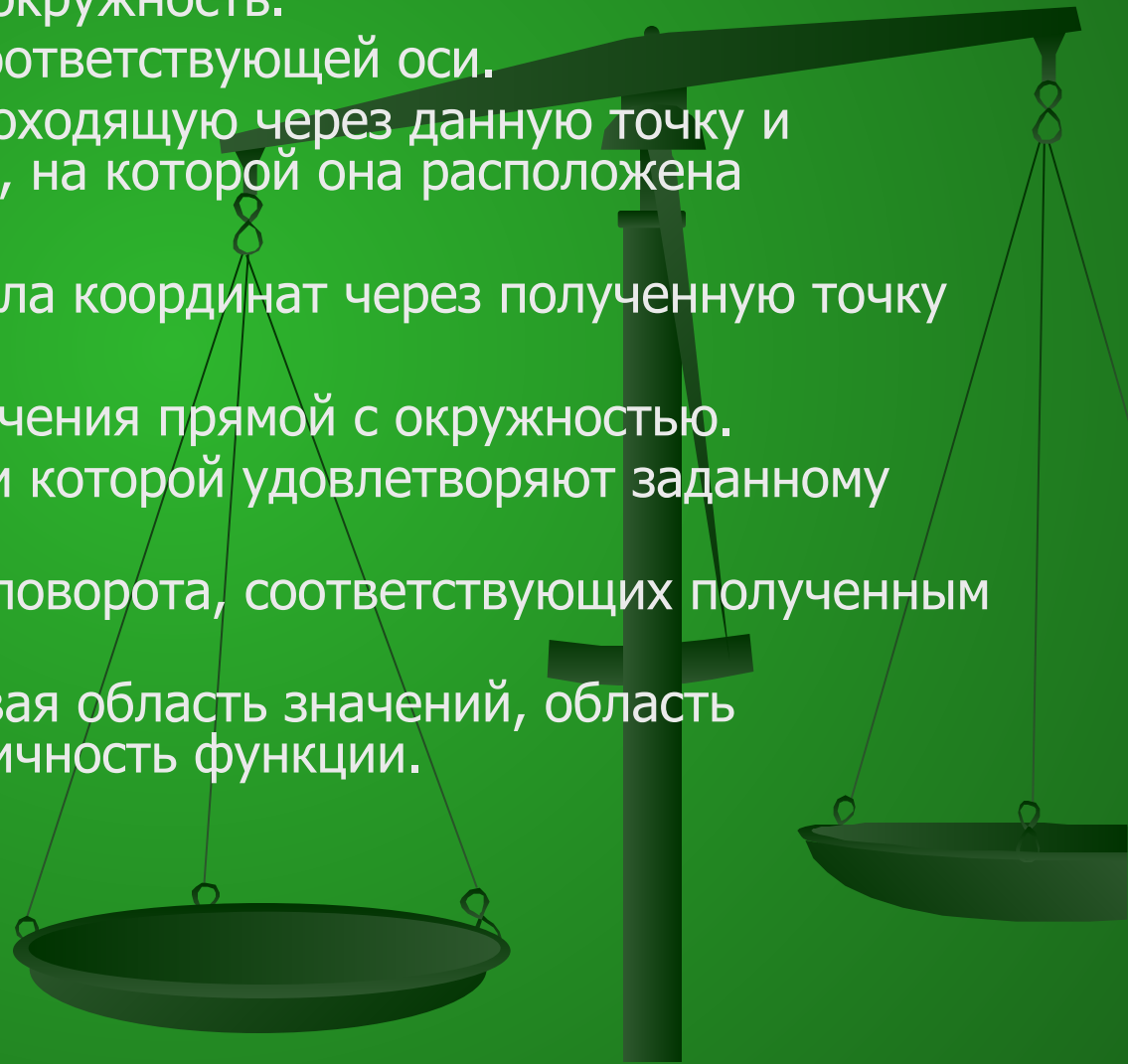
Ответ:

$(-\pi/2 + \pi n; \pi/4 + \pi n)$, n – целое число.



Алгоритм решения простейших тригонометрических неравенств

1. Построить единичную окружность.
2. Отметить число a на соответствующей оси.
3. - Провести прямую, проходящую через данную точку и перпендикулярную оси, на которой она расположена ($\sin t$, $\cos t$).
- Провести луч из начала координат через полученную точку ($\operatorname{tg} t$).
4. Отметить точки пересечения прямой с окружностью.
5. Определить дугу, точки которой удовлетворяют заданному неравенству.
6. Найти значение углов поворота, соответствующих полученным точкам.
7. Записать ответ, учитывая область значений, область определения и периодичность функции.



Логарифмические уравнения

Уравнения, содержащие переменную под знаком логарифма (в частности, в основании логарифма), называются *логарифмическими*.

$$\log_a f(x) = \log_a g(x) \quad (a > 0, a \neq 1)$$

Решение этих уравнений основано на следующей теореме.

Теорема 1. Уравнение равносильно системе

$$\log_a f(x) = \log_a g(x) \quad (a > 0, a \neq 1)$$

$$\begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0, \\ f(x) = g(x) \end{cases}$$

Метод потенцирования

Решить уравнение:

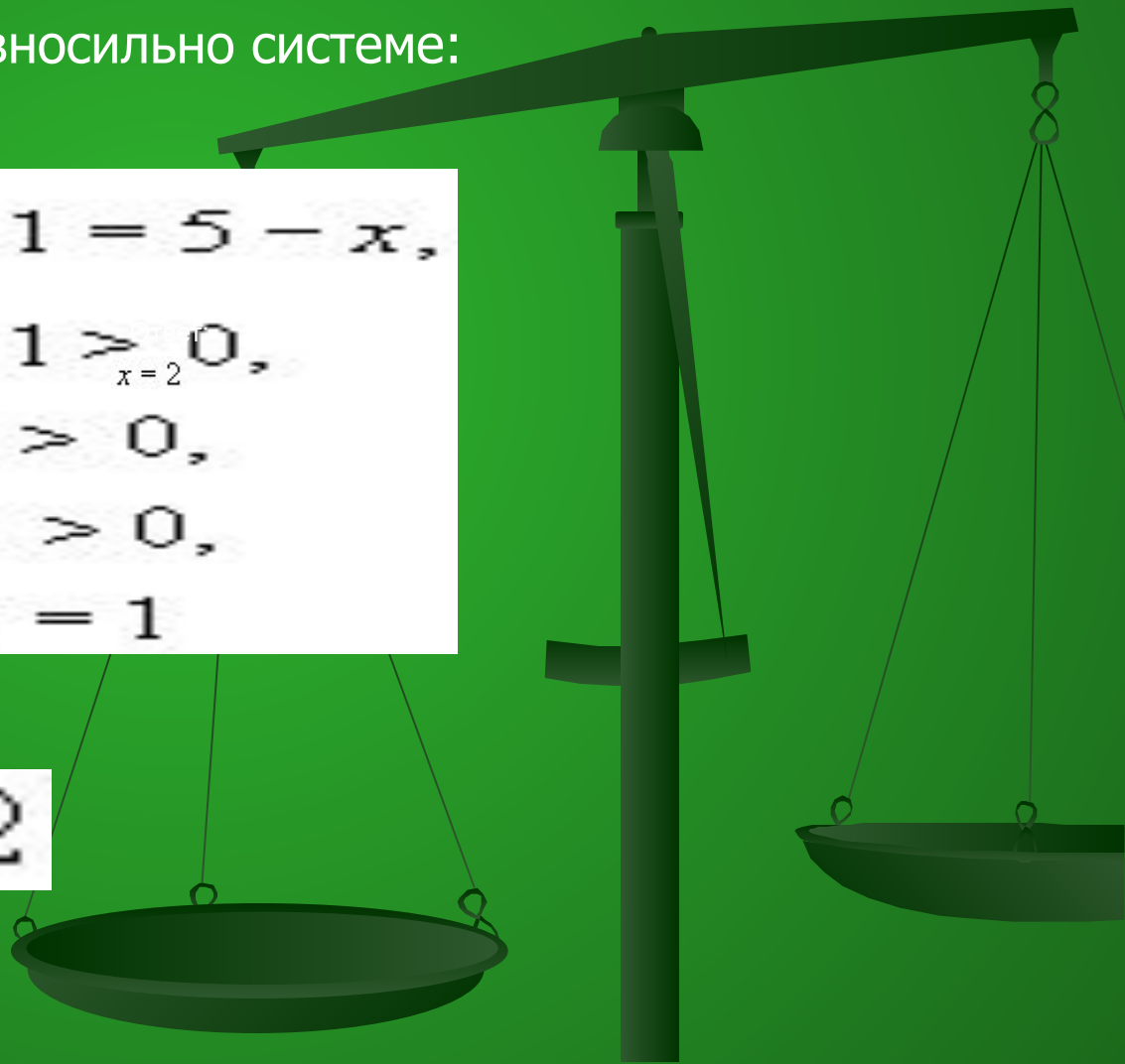
$$\log_{x+4} (x^2 - 1) = \log_{x+4} (5 - x)$$

Данное уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases} x^2 - 1 = 5 - x, \\ x^2 - 1 > 0, \\ 5 - x > 0, \\ x + 4 > 0, \\ x + 4 \neq 1 \end{cases}$$

Ответ:

$$x = 2$$



Использование определения

$$\left\{ \log_a b = c, a^c = b \right\}$$

Решим уравнение:

$$\log_{x-1} (x^2 - 5x + 10) = 2$$

Решение.

$$(x-1)^2 = x^2 - 5x + 10, (x-1)^2 = x^2 - 5x + 10 \Leftrightarrow x = 3$$

$$\begin{cases} x - 1 > 0, \\ x^2 - 5x + 10 > 0, \\ x - 1 \end{cases}$$

Ответ: 3

Приведение к квадратному

Решить уравнение

$$\frac{\lg x^3 - 12}{\lg x} = 5$$

Решение.

$$\frac{3\lg x - 12}{\lg x} = 5 \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 3\lg^2 x - 12 = 5\lg x \\ \lg x = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3\lg^2 x - 5\lg x - 12 = 0 \\ \lg x = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lg x = 3 \\ \lg x = -4/3 \\ \lg x = 0 \\ x = 10^{-4/3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 1000 \\ x = 10^{-4/3} \end{cases}$$

Ответ:

$$x = 1000; x = 10^{-4/3}$$

Метод логарифмирования

Решить уравнение

$$x^{\lg x - 1} = 100$$

Решение.

$$\lg x^{\lg x - 1} = \lg 100 \Leftrightarrow (\lg x - 1) \cdot \lg x = \lg 100 \Leftrightarrow \lg^2 x - \lg x - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \lg x = 2, \\ \lg x = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 100 \\ x = 0.1 \end{cases}$$

Ответ: 0,1; 100

Метод введения новой переменной

Решить уравнение

$$\log_{16} x + \log_4 x + \log_2 x = 7$$

Решение

Пусть

$$\log_{16} x = z$$

, тогда

$$16^z = x \Leftrightarrow 4^{2z} = x \Leftrightarrow 2^{4z} = x$$

$$\log_4 x = \log_4 4^{2z} = 2z$$

$$\log_2 x = \log_2 2^{4z} = 4z$$

Учитывая, что

Получим уравнение

$$z + 2z + 4z = 7 \Leftrightarrow z = 1 \Leftrightarrow \log_{16} x = 1 \Leftrightarrow x = 16$$

Ответ: 16

Функционально-графический метод

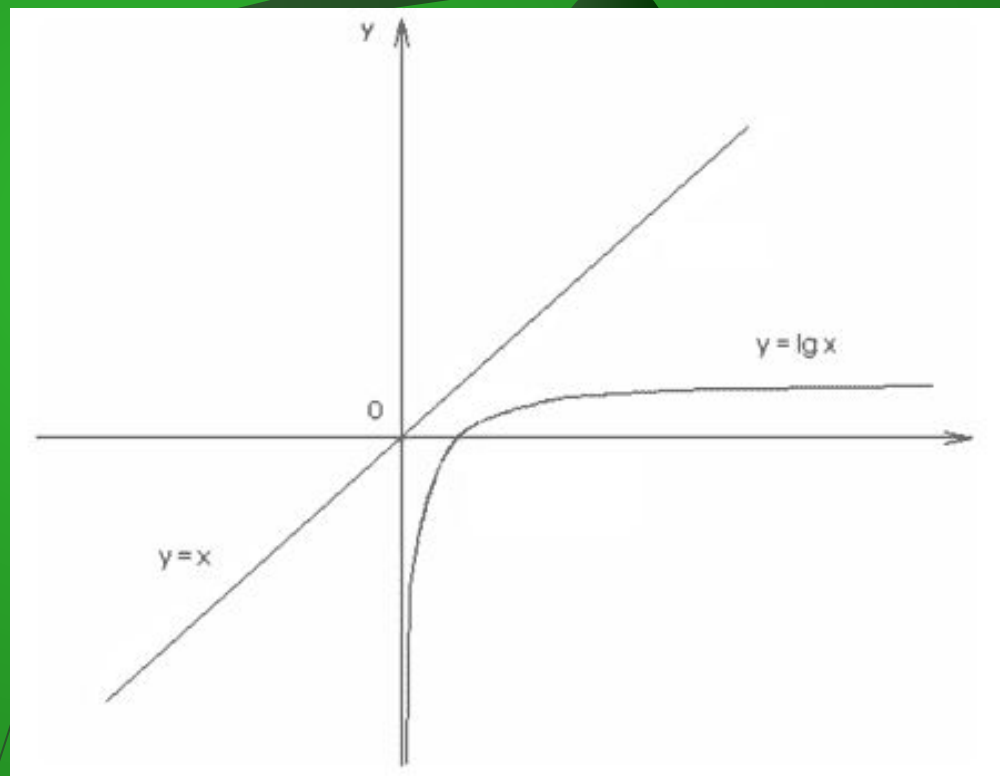
Решить уравнение

$$\lg x = x$$

Решение.

Построим графики
функций

$$Y = \lg x \text{ и } y = x$$



Ответ: корней нет.

Логарифмические неравенства

$$\log_a f(x) < A$$

$$a > 1$$

$$\begin{cases} f(x) > 0 \\ f(x) < a^A \end{cases}$$

$$0 < a < 1$$

$$\begin{cases} f(x) > 0 \\ f(x) > a^A \end{cases}$$

$$\log_{f(x)} a < A$$

$$a > 0$$

$$\begin{cases} f(x) > 1 \\ a < f^A(x); \\ 0 < f(x) < 1 \\ a > f^A(x). \end{cases}$$

$$\log_a f(x) < \log_a g(x)$$

$$a > 1$$

$$\begin{cases} f(x) < g(x), \\ f(x) > 0 \end{cases}$$

$$0 < a < 1$$

$$\begin{cases} f(x) > g(x), \\ g(x) > 0 \end{cases}$$

Логарифмические неравенства

Если $a > 1$, то функция $y = \log_a x$ возрастающая, значит, неравенство $\log_a f(x) > b$ равносильно системе

$$\begin{cases} f(x) > a^b & (\text{знак исходного неравенства сохраняется}) \\ f(x) > 0 & (\text{ОДЗ}) \end{cases}$$

Пример: $\log_2(7x+1) > 3$.

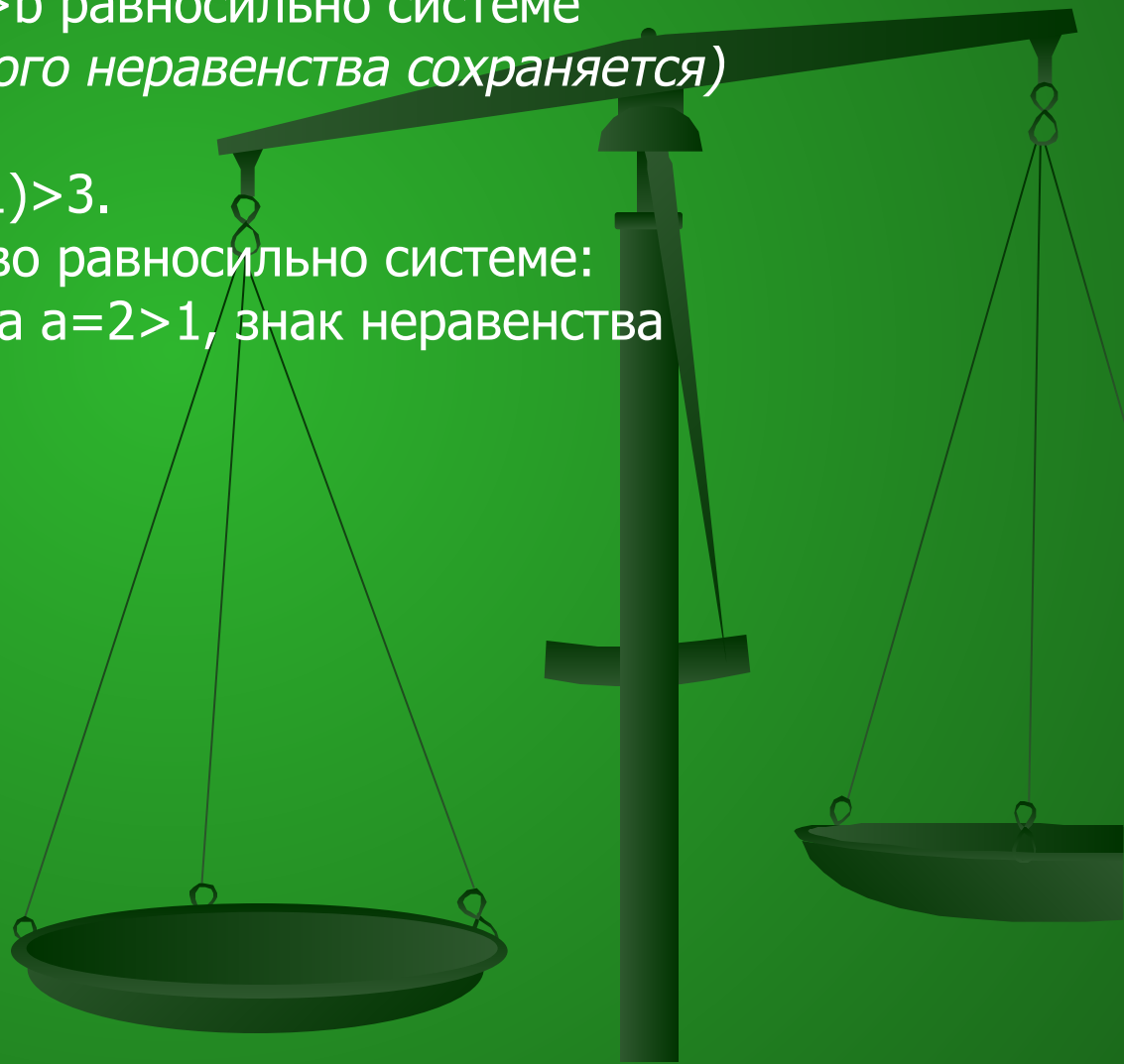
Данное неравенство равносильно системе:
(Основание логарифма $a = 2 > 1$, знак неравенства сохраняем.)

$$\begin{cases} 7x + 1 > 2^3, \\ 7x + 1 > 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 7x > 7, \\ 7x > -1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > 1, \\ x > -1/7. \end{cases}$$

Ответ: $(1; \infty)$.



Если $0 < a < 1$, то функция $y = \log_a x$ убывающая, значит, неравенство $\log_a f(x) > b$ равносильно системе

$$\begin{cases} f(x) < a^b & (\text{знак исходного неравенства меняется}) \\ f(x) > 0 & (\text{ОДЗ}) \end{cases}$$

Пример: $\log_{0,2} (4x+5) > -2$.

Данное неравенство равносильно системе:

$$\begin{cases} 4x+5 < (0,2)^{-2}, \\ 4x+5 > 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x < 25 - 5, \\ 4x > -5; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x < 5, \\ x > -1,25. \end{cases}$$

Ответ: $(-1,25; 5)$.



Показательные уравнения

Уравнения вида

$$a^x = b$$

где

$a > 0, a \neq 1, x$ – переменная

Называется показательным



Способы решения показательных уравнений

-приведение степеней к одному основанию в уравнении ;

$$a^{x_1} = a^{x_2} \Leftrightarrow x_1 = x_2$$

-разложение на множители;

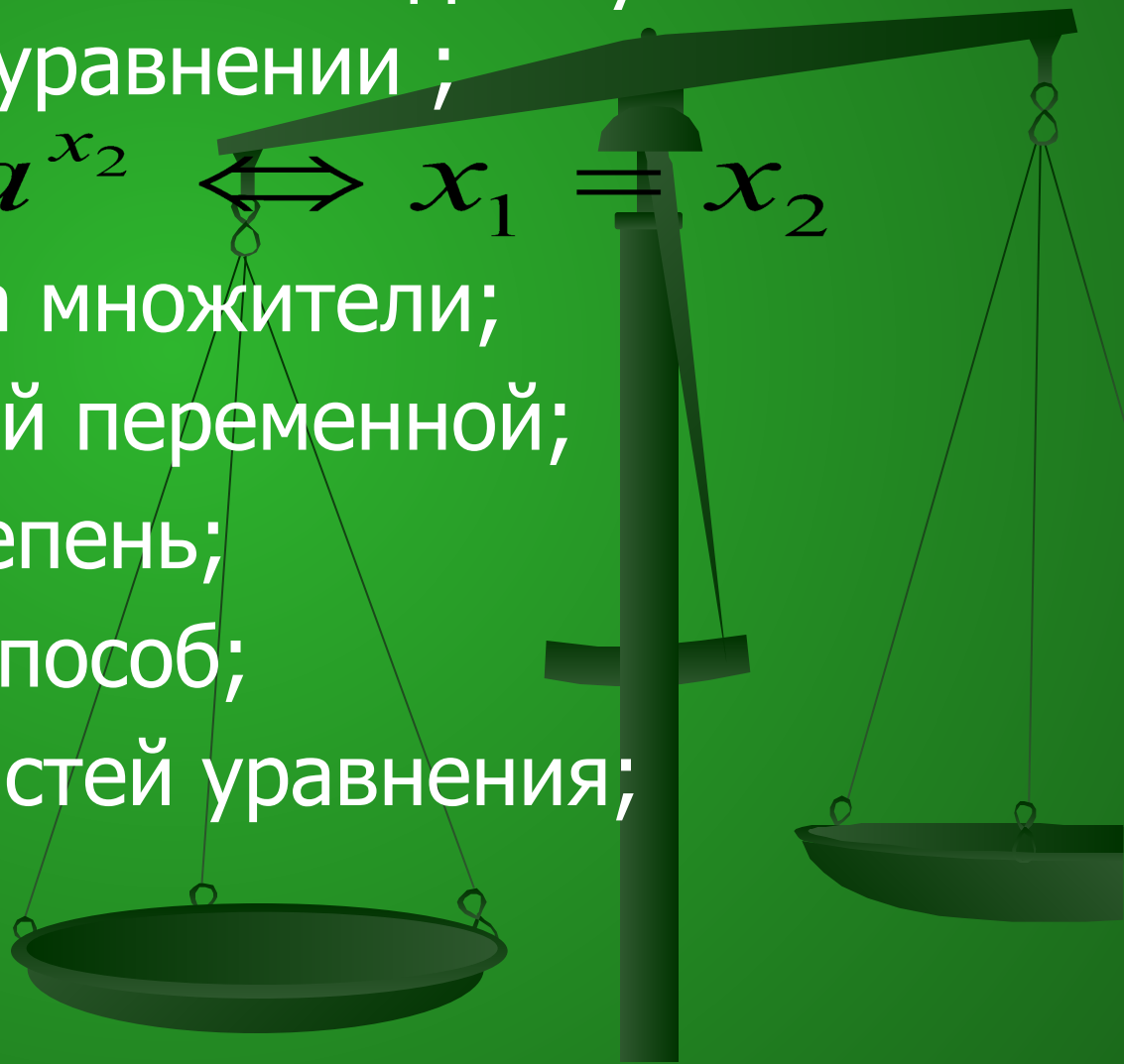
-введение новой переменной;

-деление на степень;

-графический способ;

-оценивание частей уравнения;

-подбор корня.



Приведение к одному основанию

$$3) \left(\frac{1}{5}\right)^x = 25$$

$$5^{-x} = 5^2$$

$$x = -2$$

$$4) \left(\frac{1}{3}\right)^x = \frac{1}{81}$$

$$x = 4$$

Разложение на множители

$$3) 5^{3x} + 3 * 5^{3x-2} = 140$$

$$5^{3x-2} * (5^2 + 3) = 140$$

$$5^{3x-2} * 28 = 140$$

$$5^{3x-2} = 5$$

$$3x - 2 = 1$$

$$x = 1$$

$$4) 2^{x+1} + 3 * 2^{x-1} - 5 * 2^x + 6 = 0$$

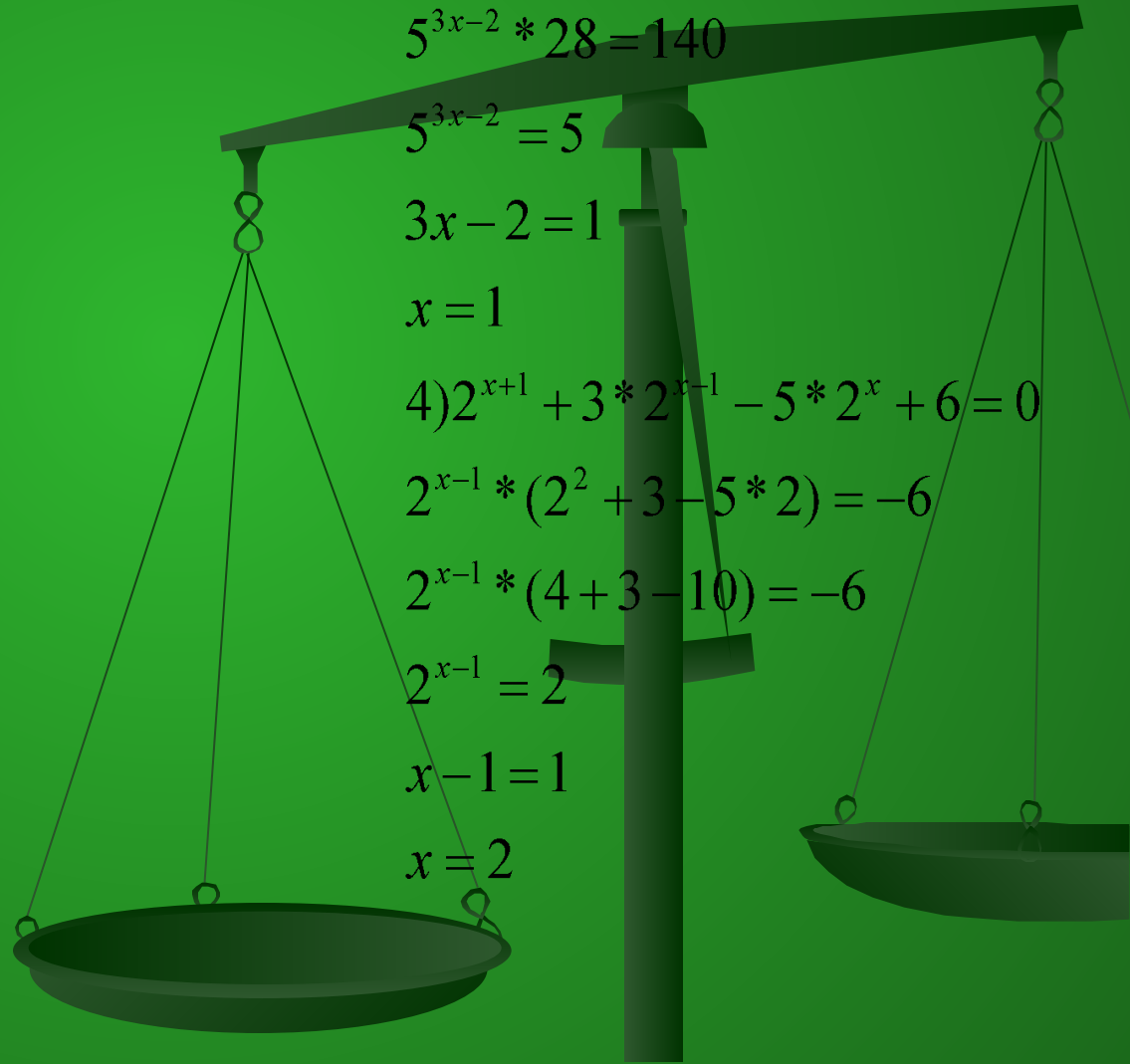
$$2^{x-1} * (2^2 + 3 - 5 * 2) = -6$$

$$2^{x-1} * (4 + 3 - 10) = -6$$

$$2^{x-1} = 2$$

$$x - 1 = 1$$

$$x = 2$$



Подбор корня

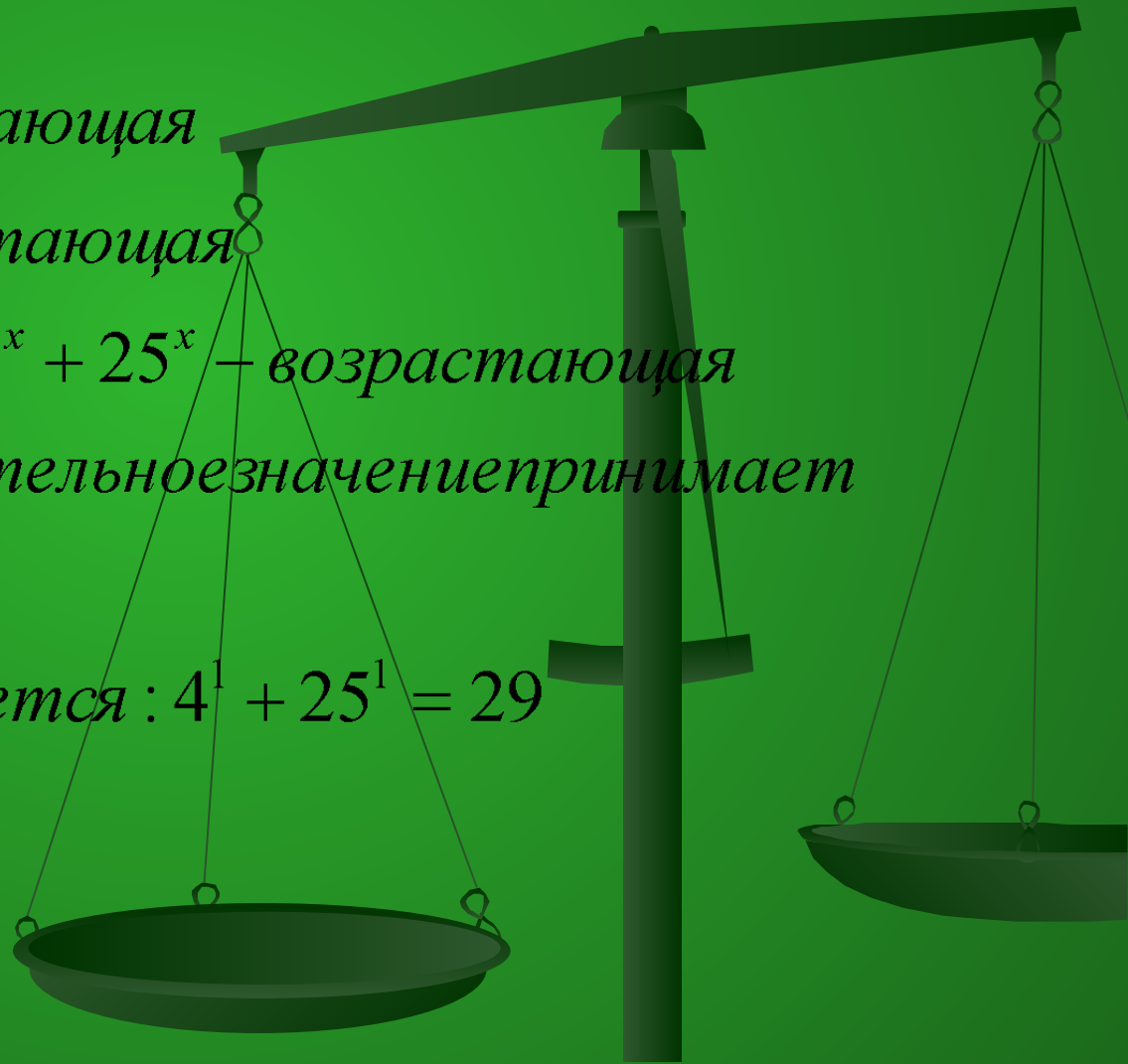
$$1) 4^x + 25^x = 29$$

$y = 4^x$ – возрастающая

$g = 25^x$ – возрастающая

значит, $y + g = 4^x + 25^x$ – возрастающая
каждое положительное значение принимает
только один раз

при $x = 1$ выполняется: $4^1 + 25^1 = 29$



Введение новой переменной

$$9^x - 4 \cdot 3^x + 3 = 0$$

$$3^{2x} - 4 \cdot 3^x + 3 = 0$$

$$t = 3^x$$

$$t^2 - 4t + 3 = 0$$

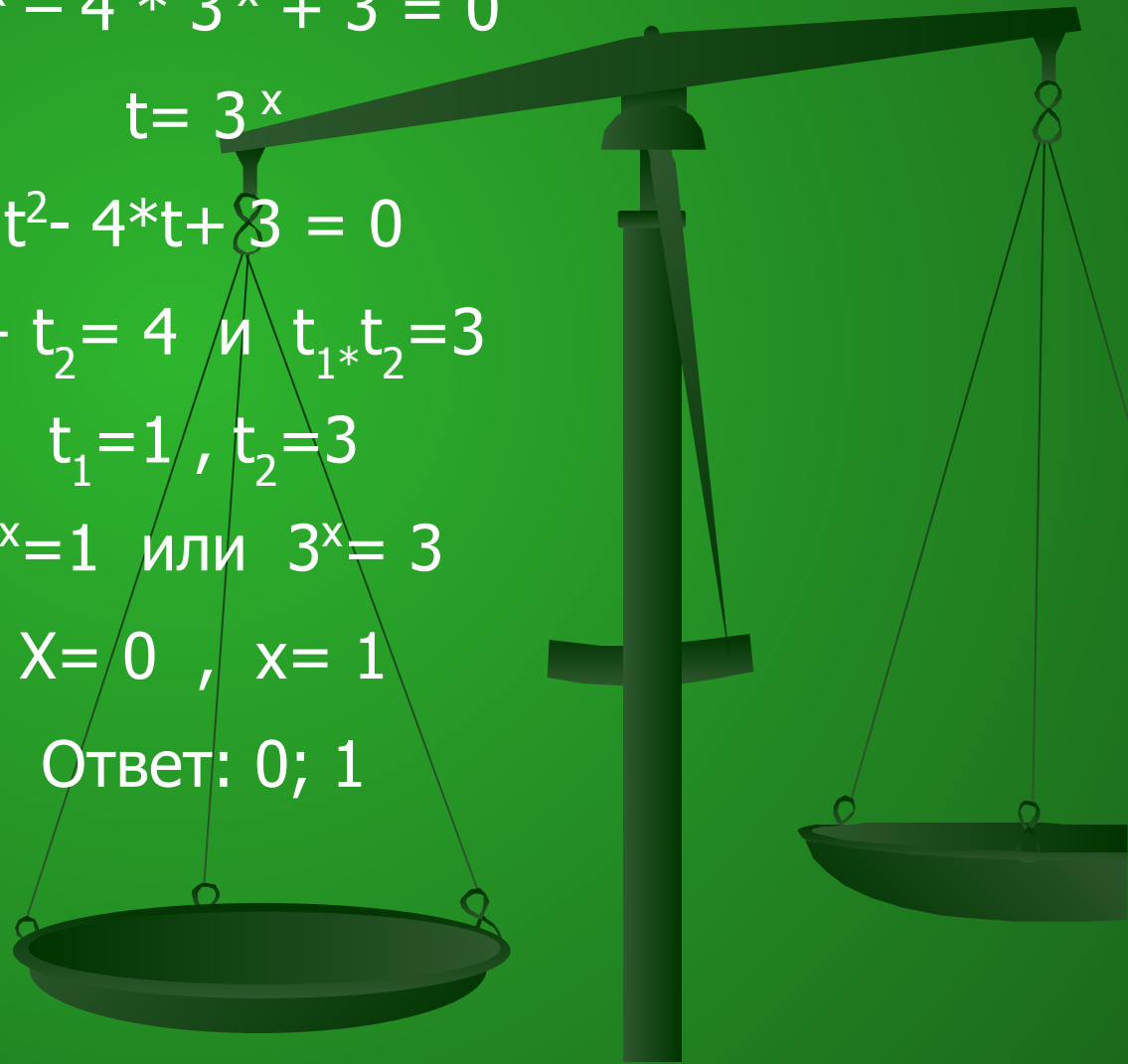
$$t_1 + t_2 = 4 \text{ и } t_1 \cdot t_2 = 3$$

$$t_1 = 1, t_2 = 3$$

$$3^x = 1 \text{ или } 3^x = 3$$

$$x = 0, x = 1$$

Ответ: 0; 1



Показательные неравенства

Решить неравенство $2^x > 1$

При каких x график функции $y = 2^x$ выше прямой $y = 1$?

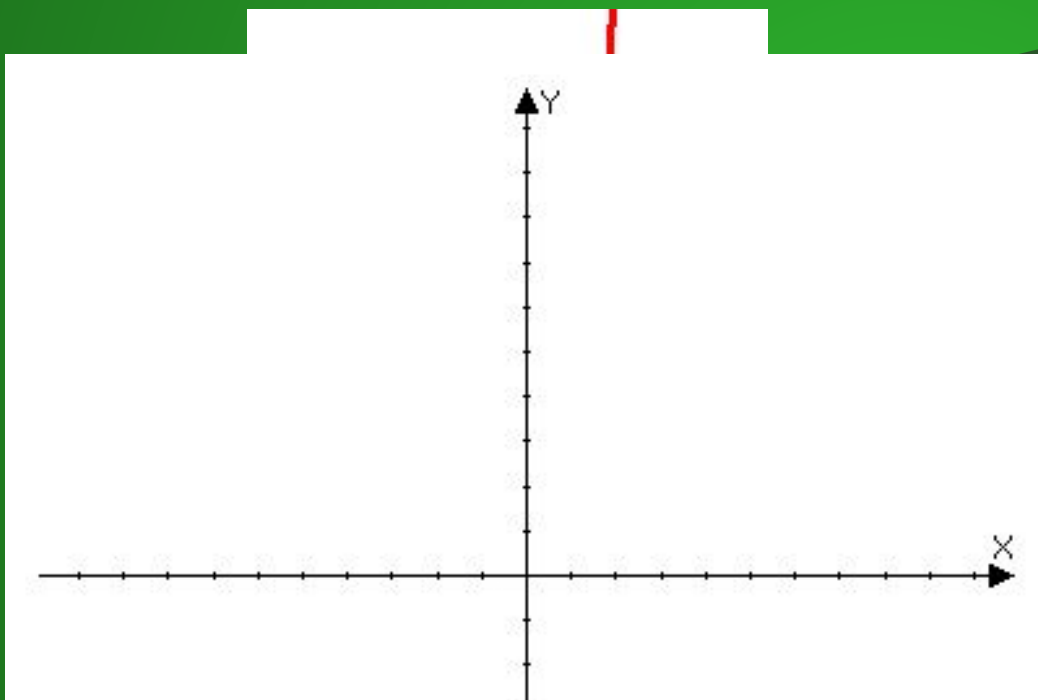


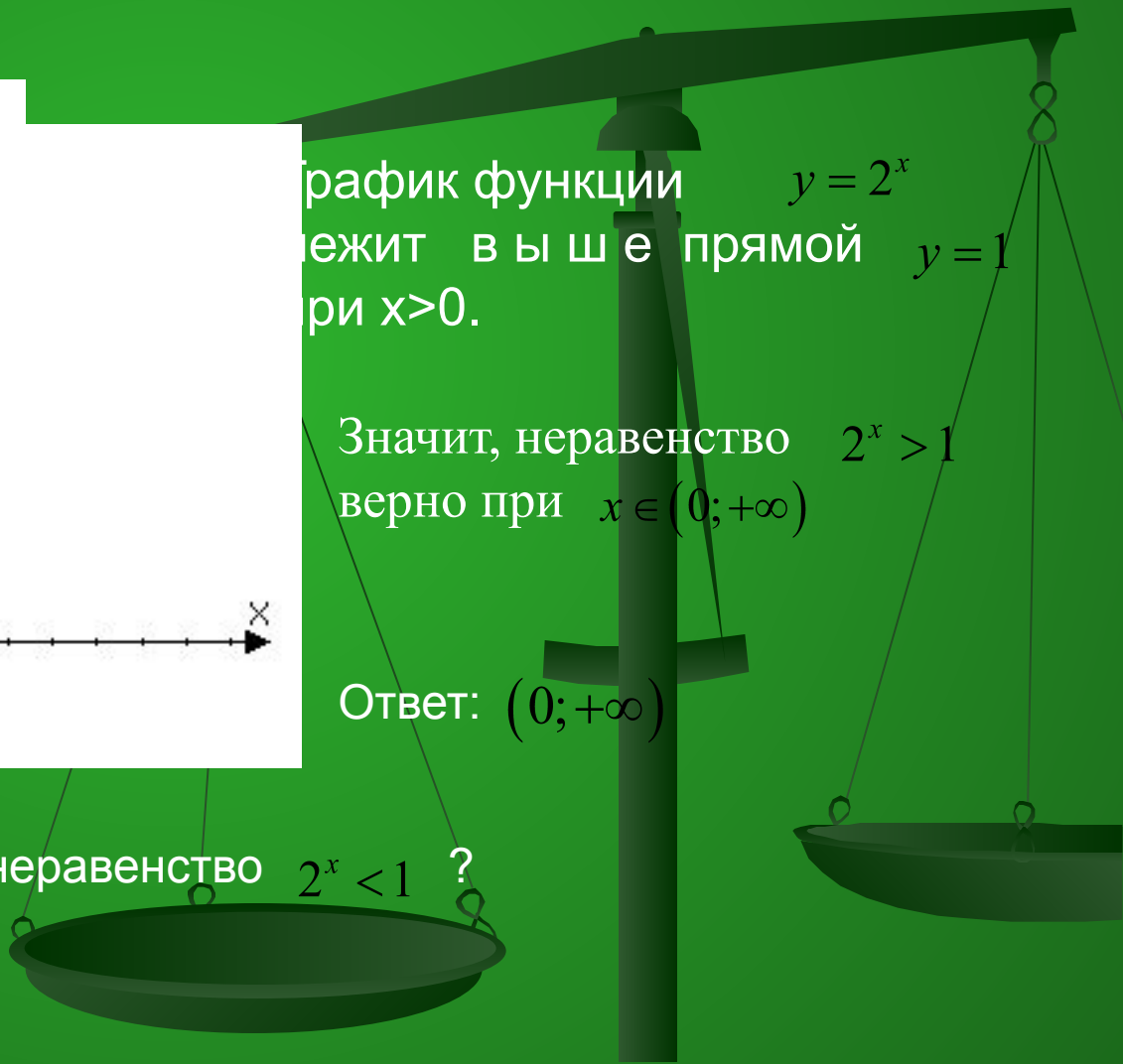
График функции $y = 2^x$ лежит выше прямой $y = 1$ при $x > 0$.

Значит, неравенство $2^x > 1$ верно при $x \in (0; +\infty)$

Ответ: $(0; +\infty)$



При каких x верно неравенство $2^x < 1$?



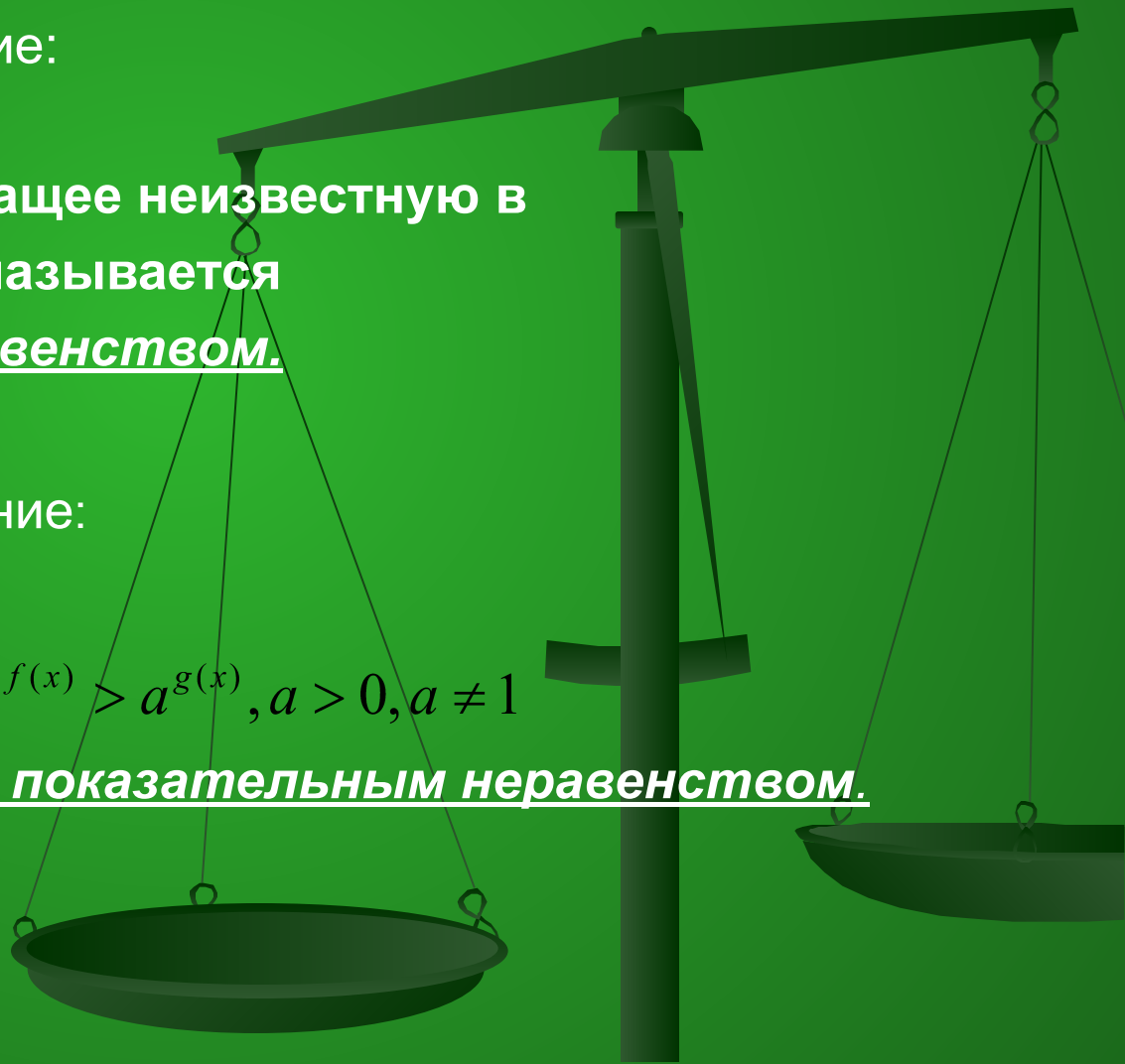
Простейшие показательные неравенства

Определение:

Неравенство, содержащее неизвестную в показателе степени, называется показательным неравенством.

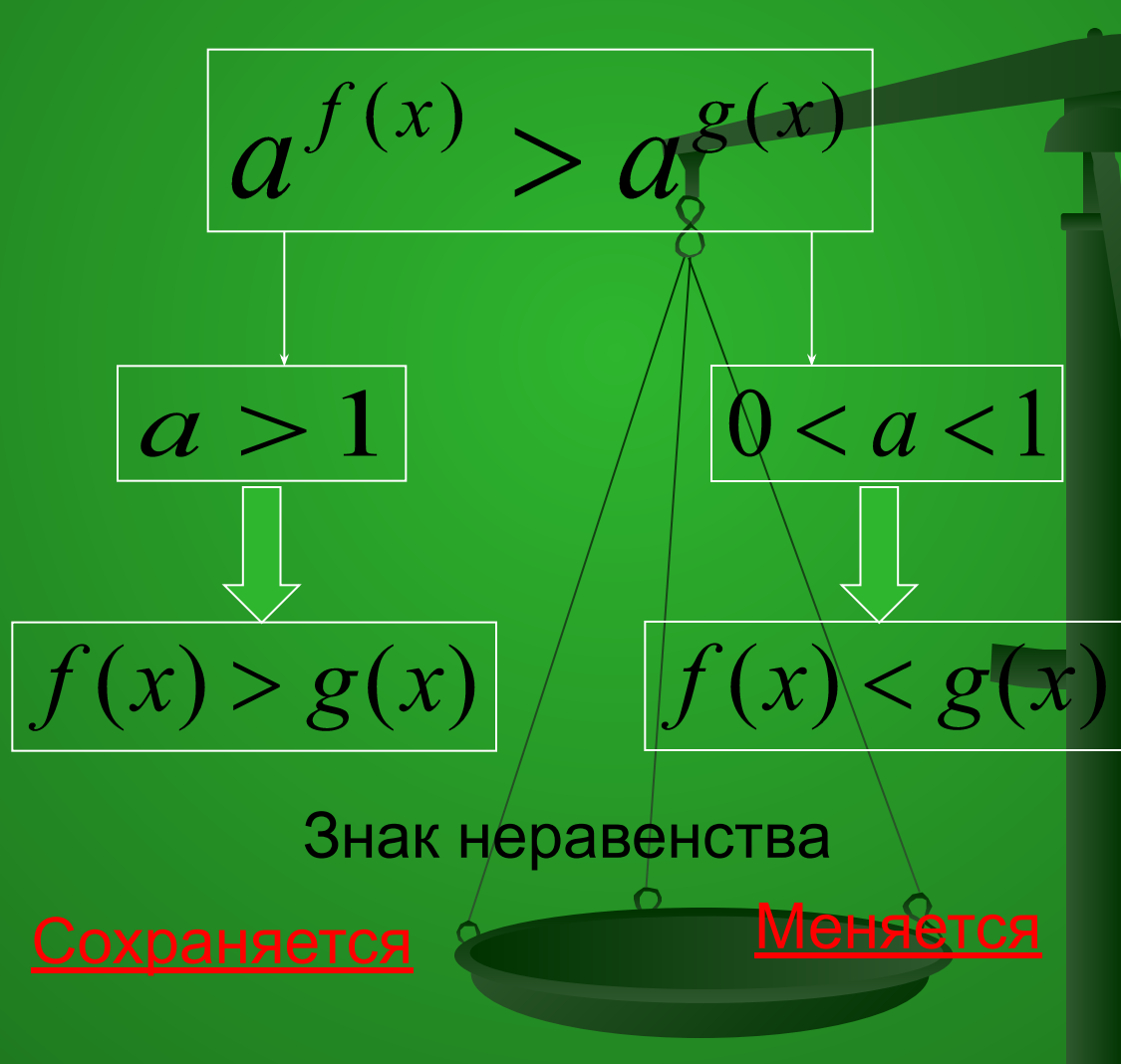
Определение:

Неравенство в и д а $a^{f(x)} > a^{g(x)}, a > 0, a \neq 1$ называется простейшим показательным неравенством.



Решение простейших показательных неравенств

$$a > 0, a \neq 1$$



Что нужно учесть при решении показательных неравенств ?

Решить неравенство $2^x > 1$

$$2^x > 1 \Leftrightarrow 2^x > 2^0 \Leftrightarrow x > 0.$$



Что нужно учесть при решении простейших показательных неравенств ?

- 1. Привести основания степени к одинаковому основанию**
- 2. Использовать свойства монотонной функции**



Решите неравенство

$$25^{-x+3} \geq \left(\frac{1}{5}\right)^{3x-1}$$

$$(5^2)^{-x+3} \geq (5^{-1})^{3x-1}$$

$$5^{-2x+6} \geq 5^{-3x+1}$$

$$-2x+6 \geq -3x+1$$

$$-2x+3x \geq 1-6$$

$$x \geq -5$$



Ответ: $[-5; +\infty)$

$x \in [-5; +\infty)$

Решите неравенство

$$0,36^{\frac{7x+1}{2-x}} < 1$$

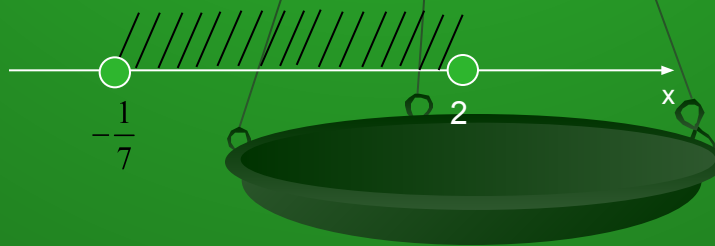
$$0,36^{\frac{7x+1}{2-x}} < 0,36^0$$

$$\frac{7x+1}{2-x} > 0$$

$$(7x+1)(2-x) > 0$$

$$(7x+1)(x-2) < 0$$

$$-\frac{1}{7} < x < 2$$



Ответ: $\left(-\frac{1}{7}; 2\right)$

Литература.

- А.Г.Мордкович. Алгебра и начала анализа 10-11 класс.
- А.Н.Колмогоров. Алгебра и начала анализа 10-11 класс.
- Н.Я.Виленин. Алгебра и математический анализ 9, 10 класс.
- Ф.Ф.Лысенко. Тематические тесты 10-11 класс. Часть 1.
- Т.А.Корешкова. Математика. ЕГЭ. Типовые тестовые задания. Издательство «Экзамен» 2009г.
- А.Г. Цыпкин. Справочник по методам решения задач по математике. Москва, изд. «Наука», 1989г.
- В.В. Вавилов. Задачи по математике. Уравнения и неравенства. Москва, изд. «Наука», 1987г.

■ Интернет-ресурсы.

- www.wiki.ruwww.wiki.ruwww.school.ru
- www.a-nomalia.narod.ru
- www.egypet-best.ru
- www.pyramids.ru

