

Преобразование тригонометрических выражений

**Формулы
Тригонометрии**



Содержание

- *Зависимость между синусом, косинусом, тангенсом и котангенсом одного и того же угла*
- *Синус и косинус суммы и разности*
- *Тангенс суммы и разности*
- *Формулы приведения*
- *Формулы двойного угла*
- *Формулы понижения степени*
- *Преобразование сумм тригонометрических функций в произведение*
- *Преобразование произведений тригонометрических функций в суммы*
- *Преобразование выражения $A\sin x + B\cos x$*



ВЫХОД

Зависимость между синусом, косинусом, тангенсом и котангенсом одного и того же угла

По теореме Пифагора:

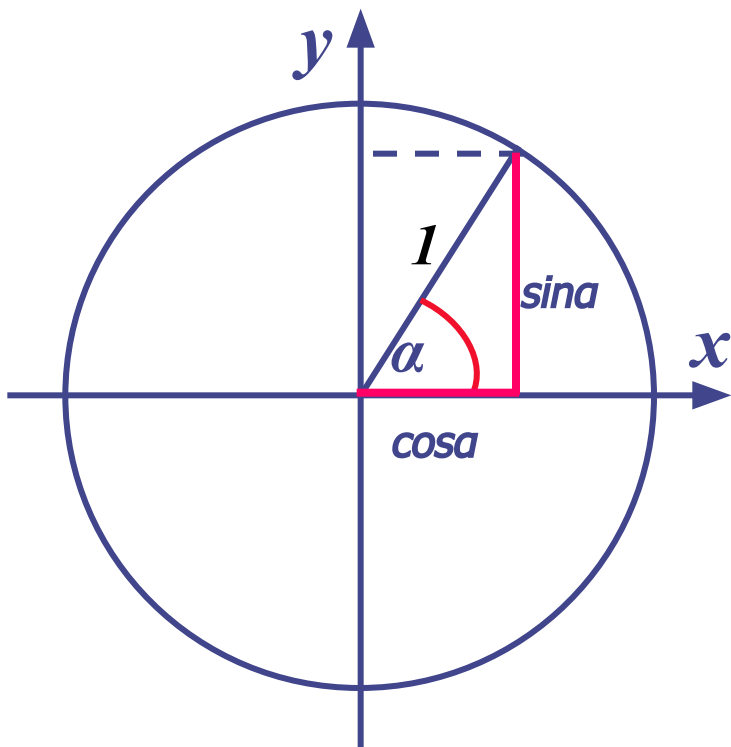
$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

Разделим обе части
равенства на $\sin^2 \alpha \neq 0$

$$1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$$

Разделим обе части
равенства на $\cos^2 \alpha \neq 0$

$$\operatorname{tg}^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$



**Зависимость между синусом, косинусом, тангенсом и
котангенсом одного и того же угла**

$$\mathit{tg}\alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

$$\mathit{ctg}\alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$$

$$\mathit{tg}\alpha \cdot \mathit{ctg}\alpha = 1$$

Пример 1

$\sin t = \frac{3}{5}$ и $0 < t < \frac{\pi}{2}$. Найдите $\cos t$, $\operatorname{tg} t$, $\operatorname{ctg} t$.

$$\sin^2 t + \cos^2 t = 1$$

$$\cos^2 t = 1 - \sin^2 t = 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{16}{25}$$

$$\cos t = \frac{4}{5} \text{ или } \cos t = -\frac{4}{5}$$

т.к. $0 < t < \frac{\pi}{2}$ (I четверть, $\cos t > 0$), то $\cos t = \frac{4}{5}$

$$\operatorname{tg} t = \frac{\sin t}{\cos t}$$

$$\operatorname{ctg} t = \frac{1}{\operatorname{tg} t}$$

$$\operatorname{tg} t = \frac{3}{5} : \frac{4}{5} = \frac{3}{4}$$

$$\operatorname{ctg} t = \frac{4}{3}$$

Пример 2

$\operatorname{tgt} t = -\frac{5}{12}$ и $\frac{\pi}{2} < t < \pi$. Найдите $\sin t$, $\cos t$, $\operatorname{ctgt} t$.

$$\operatorname{tg}^2 t + 1 = \frac{1}{\cos^2 t}$$

$$\frac{1}{\cos^2 t} = 1 + \left(-\frac{5}{12}\right)^2 = \frac{169}{144}$$

$$\cos t = \frac{12}{13} \quad \text{или} \quad \cos t = -\frac{12}{13}$$

т.к. $\frac{\pi}{2} < t < \pi$ (II четверть, $\cos t < 0$), то $\cos t = -\frac{12}{13}$

$$\operatorname{tgt} t = \frac{\sin t}{\cos t}$$

$$\sin t = \operatorname{tgt} t \cdot \cos t = \left(-\frac{5}{12}\right) \cdot \left(-\frac{12}{13}\right) = \frac{5}{13}$$

$$\operatorname{ctgt} t = \frac{1}{\operatorname{tgt} t}$$

$$\operatorname{ctgt} t = -\frac{12}{5}$$



Формулы приведения

«Правило»

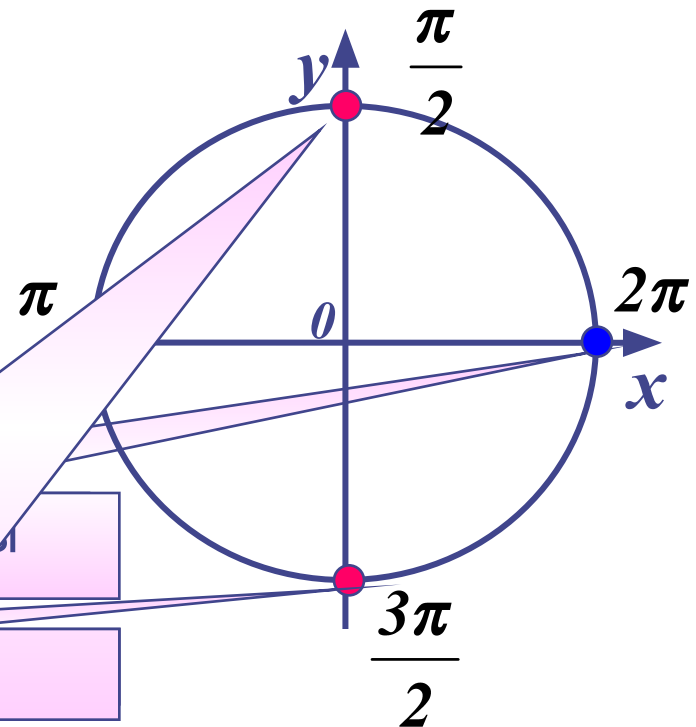
Определить знак функции в той четверти, которой принадлежит аргумент (угол α считаем **острым**)

«Горизонтальные» – «спящие» углы

«Вертикальные» – «рабочие» углы

Не изменяем функцию, если аргумент

Название функции **меняем** на кофункцию, если аргумент



$$\left(\pi \pm \alpha \right) \quad \left(2\pi \pm \alpha \right)$$

$$\left(\frac{\pi}{2} \pm \alpha \right) \quad \left(\frac{3\pi}{2} \pm \alpha \right)$$

содержание

Синус и косинус суммы и разности аргументов

$$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$$

$$\sin(x - y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$$

$$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

$$\cos(x - y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$$



Тангенс суммы и разности аргументов

$$tg(x \text{ ~~+~~ } y) = \frac{tgx + tgy}{1 \text{ ~~-~~ } tgx tgy}$$

$$tg(x \text{ ~~-~~ } y) = \frac{tgx - tgy}{1 \text{ ~~+~~ } tgx tgy}$$



Синус и косинус суммы и разности аргументов

$$\text{Решить уравнение : } \sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right) + \cos\left(\frac{\pi}{6} - x\right) = \sqrt{3}$$

$$\sin(x - y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$$

$$\cos(x - y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$$

$$\left(\sin \frac{\pi}{3} \cos x - \cos \frac{\pi}{3} \sin x\right) + \left(\cos \frac{\pi}{6} \cos x + \sin \frac{\pi}{6} \sin x\right) = \sqrt{3}$$

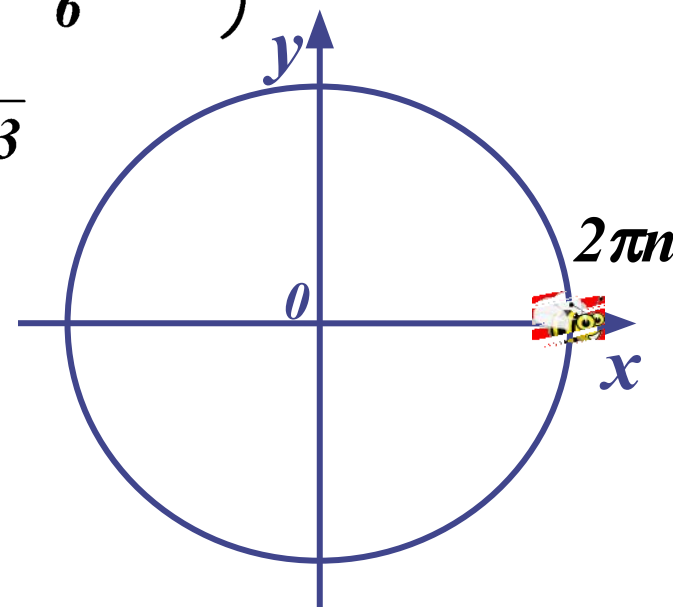
$$\frac{\sqrt{3}}{2} \cos x - \frac{1}{2} \sin x + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x + \frac{1}{2} \sin x = \sqrt{3}$$

$$\sqrt{3} \cos x = \sqrt{3}$$

$$\cos x = 1$$

$$x = 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

Ответ : $2\pi n, n \in \mathbb{Z}$



содержание

Формулы двойного угла

$$\sin 2x = \sin(x + x) = \sin x \cos x + \cos x \sin x = 2 \sin x \cos x$$

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$$

$$\cos 2x = \cos(x + x) = \cos x \cos x - \sin x \sin x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$\operatorname{tg} 2x = \operatorname{tg}(x + x) = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} x} = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}$$

$$\operatorname{tg} 2x = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}$$

Формулы двойного угла

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$$

$$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$$

$$\cos 2x = 1 - 2 \sin^2 x$$

$$\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1$$



Формулы понижения степени

$$\cos 2x = 1 - 2 \sin^2 x$$

Выразим

$\sin^2 x$

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$$

$$\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1$$

Выразим

$\cos^2 x$

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

Преобразование сумм тригонометрических функций в произведение

$$\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$$

$$\sin x - \sin y = 2 \sin \frac{x-y}{2} \cos \frac{x+y}{2}$$

$$\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$$

$$\cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$$



Преобразование суммы тригонометрических функций в произведение

Решите уравнение: $\sin 17x = \sin 7x$

$$\sin 17x - \sin 7x = 0$$

Применим формулу

$$\sin x - \sin y = 2 \sin \frac{x-y}{2} \cos \frac{x+y}{2}$$

$$2 \sin 5x \cos 12x = 0$$

$$\sin 5x = 0$$

ИЛИ

$$\cos 12x = 0$$

$$5x = \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$12x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

Ответ:

$$x = \frac{\pi n}{5}, n \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{\pi}{24} + \frac{\pi n}{12}, n \in \mathbb{Z}$$

Преобразование произведений тригонометрических функций в суммы

$$\cos x \cdot \cos y = \frac{1}{2} (\cos(x - y) + \cos(x + y))$$

$$\sin x \cdot \sin y = \frac{1}{2} (\cos(x - y) - \cos(x + y))$$

$$\sin x \cdot \cos x = \frac{1}{2} (\sin(x - y) + \sin(x + y))$$

Преобразование выражения $A\sin x + B\cos x$

$$\begin{aligned} a \sin x + b \cos x &= \sqrt{a^2 + b^2} \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin x + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos x \right) = \\ &= \sqrt{a^2 + b^2} (\cos t \sin x + \sin t \cos x) = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(x + t) \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} \cos t &= \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \\ \sin t &= \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}. \end{aligned} \right| \Rightarrow \operatorname{tg} t = \frac{b}{a}, \quad t = \operatorname{arctg} \frac{b}{a}$$

$$a \sin x + b \cos x = \sqrt{a^2 + b^2} \sin \left(x + \operatorname{arctg} \frac{b}{a} \right)$$



Преобразование выражения $A\sin x + B\cos x$

$$a \sin x + b \cos x = \sqrt{a^2 + b^2} \sin\left(x + \operatorname{arctg} \frac{b}{a}\right)$$

Найдите наибольшее и наименьшее значение функции

$$y = 5 \sin x - 12 \cos x$$

Применим формулу:

$$y = 13 \sin\left(x + \operatorname{arctg} \frac{-12}{5}\right)$$

$$y = 13 \sin(x - \operatorname{arctg} 2,4)$$

$$\text{т.к. } -1 < \sin \alpha < 1, \quad y_{\text{наим}} = -13, \quad y_{\text{наиб}} = 13.$$

$$\text{Ответ : } y_{\text{наим}} = -13, \quad y_{\text{наиб}} = 13.$$

