Элементарные преобразования матриц

Элементарные преобразования матриц

1.	Перестановка строк (столбцов).
2.	Умножение строки (столбца) на число, отличное от нуля.
3.	Прибавление к элементам строки (столбца) соответствующих элементов другой строки (столбца), предварительно умноженных на некоторое число.
4.	Транспонирование.
5.	Вычёркивание нулевой строки (вычеркивание одной из двух одинаковых строк).

Определение:

Две матрицы A и B называются *эквивалентными*, если одна из них получена из другой с помощью элементарных преобразований.

Замечание:

При проведении элементарных преобразований с матрицей знак равенства ставиться не может (матрицы не равны), ставится обычно знак *тильды* «~».

Пример:

Матрицу $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1 & 0\\ 3 & -1 & 2 & 2\\ 2 & 5 & -1 & 0\\ 1 & -1 & 0 & -2\end{pmatrix}$ с помощью элементарных преобразований привести к треугольному виду.

$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1 & 0\\ 3 & -1 & 2 & 2\\ 2 & 5 & -1 & 0\\ 1 & -1 & 0 & -2\end{pmatrix}\sim$	первую строку умножим на – 3 и прибавим ко второй; на – 2 и прибавим к третьей; на – 1 и прибавим к четвертой
$\sim\begin{pmatrix}1 & 2 & -1 & 0\\ 0 & -7 & 5 & 2\\ 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & -3 & 1 & -2\end{pmatrix}\sim$	поменяем местами вторую и третью строки
$\sim\begin{pmatrix}1 & 2 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & -7 & 5 & 2\\ 0 & -3 & 1 & -2\end{pmatrix}\sim$	вторую строку умножим на 7 и прибавим к третьей; на 3 и прибавим к четвертой

$\sim\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 12 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & -2 \end{pmatrix}\sim$	третью и четвертую строку разделим на 2
$\sim\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}\sim$	третью строку умножим на $-\frac{1}{3}$ и прибавим к четвертой
$\sim\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{4}{3} \end{pmatrix}\sim$	четвертую строку умножим на – 3
$\sim\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$	— верхняя треугольная матрица

Алгоритм правила «прямоугольника»
при выполнении элементарных преобразований матриц

1. На каждом шаге выбирается *разрешающий элемент* $a_{ij} \neq 0$ (любой элемент матрицы A, отличный от нуля);

Замечание: строку и столбец, содержащие разрешающий элемент будем называть *разрешающими*;

2. элементы разрешающей строки переписываем без изменения;

3. элементы разрешающего столбца, расположенные ниже (выше) разрешающего элемента, заменяем нулями,

4. все другие элементы вычисляем по правилу: $a'_{ks} = \dfrac{a_{ij} \cdot a_{ks} - a_{kj} \cdot a_{is}}{a_{ij}}$

$$\begin{array}{ccc} a_{ks} & \dots & a_{kj} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{is} & \dots & \boxed{a_{ij}} \end{array}$$

5. после получения новой матрицы выбирается новый, отличный от нуля, разрешающий элемент в другой строке, вычисляется новая матрица и т.д.

Пример:

Матрицу $B=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 8 & 3 & -6\\ -4 & -1 & 3\end{pmatrix}$ с помощью правила прямоугольника привести к ступенчатому виду.

$$B=\begin{pmatrix}\mathbf{1} & 1 & -1\\ 8 & 3 & -6\\ -4 & -1 & 3\end{pmatrix}\sim$$

элемент $a_{11}=1$ — разрешающий элемент, первую строку переписываем без изменения; элементы разрешающего столбца заменяем нулями, остальные элементы матрицы пересчитываем по правилу «прямоугольника»:

$$a_{22}=\frac{1\cdot 3-8\cdot 1}{1}=-5;$$

$$a_{23}=\frac{1\cdot 2-0\cdot(-1)}{1}=2;$$

$$a_{32}=\frac{1\cdot(-1)-(-4)\cdot 1}{1}=3;$$

$$a_{33}=\frac{1\cdot 3-(-4)\cdot(-1)}{1}=-1;$$

$$\sim\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & \mathbf{-5} & 2 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}\sim$$

элемент $a_{22} = -5$ — разрешающий элемент, вторую строку переписываем без изменения; элемент a_{32} заменяем нулем, элемент a_{33} матрицы пересчитываем по правилу «прямоугольника»: $a_{33} = \dfrac{-5\cdot(-1)-3\cdot 2}{-5} = \dfrac{1}{5}$;

$$\sim\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} \end{pmatrix}\sim$$

третью строку умножим на 5;

$$\sim\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

— верхняя треугольная матрица.

Определители

Основные определения

Определение:

Квадратной матрице $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ можно сопоставить *число*, называемое *её определителем* (*детерминантом* $\det A$) n-го порядка и обозначаемое $\Delta A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$.

Определение:

Диагональ, идущую из верхнего левого угла определителя, называют *главной диагональю*, а диагональ, идущую из правого верхнего угла — *побочная диагональ*.

Определение:

Минором $M_{i\,j}$ элемента $a_{i\,j}$ называется *определитель* $(n-1)$-го порядка, полученный из данного определителя путём вычёркивания в нём строки и столбца, на пересечении которых находится элемент $a_{i\,j}$.

Определение:

Алгебраическим дополнением $A_{i\,j}$ *элемента* $a_{i\,j}$ данного определителя, называется *минор* этого элемента $M_{i\,j}$, умноженный на число $(-1)^{i+j}$, т.е. $A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$.

Теорема Лапласа

Определитель равен сумме произведений элементов любой его строки (столбца) на их алгебраические дополнения

1. *разложение определителя по элементам* i-й строки

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + a_{in}A_{in} = \sum_{i=1}^{n} a_{ik}A_{ik} \, ,$$

2. *разложение определителя по элементам* j-го столбца.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \dots + a_{pj}A_{pj} = \sum_{j=1}^{n} a_{pj}A_{pj}$$

Замечание: Определитель треугольной матрицы равен произведению элементов главной диагонали, т.е. $\Delta = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \dots \cdot a_{nn}$.

Определение: *Определителем первого порядка* называется число $|a_{11}| = a_{11}$.

Пример: для матрицы $A = (-3)$ определитель $\Delta A = |-3| = -3$.

Определитель второго порядка $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$

Разложим данный определитель по первой строке:

$$\Delta = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} = a_{11}(-1)^{1+1}M_{11} + a_{12}(-1)^{1+2}M_{12} = a_{11}M_{11} - a_{12}M_{12} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Определение:

Определителем второго порядка называется число, вычисляемое по формуле:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}.$$

Знаки перед произведениями, расставляются по схеме:

$+ \qquad -$

Пример: Вычислить определитель $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}$.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-3) - 1 \cdot 4 = -6 - 4 = -10$$

Определитель третьего порядка $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

Разложим данный определитель по первой строке:

$$\Delta = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} = a_{11}(-1)^{1+1}M_{11} + a_{12}(-1)^{1+2}M_{12} + a_{13}(-1)^{1+3}M_{13} =$$

$$= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}) =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}\,.$$

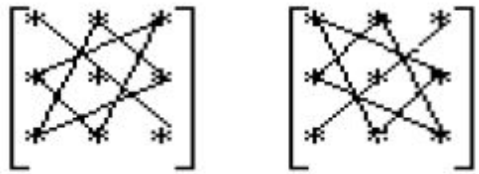
Определение:

Определителем третьего порядка называется число, вычисляемое по формуле:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}\,.$$

Для запоминания полученной формулы удобно пользоваться

- *правилом треугольников*



$+$ $-$

- *правилом Саррюса*

$$\underline{\Delta} = \left|\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}\right| =$$

$-$ $+$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}$$

Пример:

Вычислить определитель: $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$.

Вычислим определитель

- разложив его по элементам первой строки:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 1\cdot(-1)^{1+1}M_{11} + 2\cdot(-1)^{1+2}M_{12} + 3\cdot(-1)^{1+3}M_{13} =$$

$$= 1\cdot\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} - 2\cdot\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} + 3\cdot\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = 1\cdot(5\cdot9-8\cdot6) - 2(4\cdot9-7\cdot6) + 3(4\cdot8-7\cdot5) =$$

$$= -3 + 12 - 9 = 0;$$

- воспользуемся *правилом треугольников*:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 1\cdot5\cdot9 + 2\cdot6\cdot7 + 4\cdot8\cdot3 - 7\cdot5\cdot3 - 4\cdot2\cdot9 - 8\cdot6\cdot1 =$$

$$= 45 + 84 + 96 - 105 - 72 - 48 = 0;$$

- воспользуемся *правилом Саррюса*:

$$\Delta = \left|\begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{matrix}\right|\begin{matrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{matrix}\right| = 1\cdot5\cdot9 + 2\cdot6\cdot7 + 4\cdot8\cdot3 - 7\cdot5\cdot3 - 4\cdot2\cdot9 - 8\cdot6\cdot1 = 0.$$

Пример:

Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -5 \end{vmatrix}$, разложением его по элементам второй строки.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -5 \end{vmatrix} = a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23} + a_{24}A_{24} =$$

$$=1 \cdot (-1)^{2+1} M_{21} + 0 \cdot M_{22} + 1 \cdot (-1)^{2+3} M_{23} + 2 \cdot (-1)^{2+4} M_{24} =$$

$$= -\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -5 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -5 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -3 - 63 + 2 \cdot 21 = -24.$$

Свойства определителей

1. Значение определителя не изменится от замены его строк столбцами, и наоборот (*транспонирование*).

2. Если поменять местами две любые строки (столбца), то определитель меняет знак.

3. Если все элементы какой-нибудь строки (столбца) определителя умножить на одно и тоже ненулевое число « λ », то значение определителя от этого увеличится (уменьшится) в « λ » раз.

Замечание:

За знак определителя можно выносить общий множитель любой строки или столбца в отличие от матрицы, за знак которой можно выносить общий множитель всех элементов.

4. Определитель не меняет своего значения от прибавления (вычитания) ко всем элементам какой-нибудь строки (столбца) соответствующих элементов любой другой строки (столбца), умноженных на одно и то же ненулевое число.

5. Определитель равен нулю, если две любые строки (столбца) одинаковы.

$$\begin{vmatrix} \mathbf{-3} & \mathbf{1} & \mathbf{2} \\ 5 & 6 & 7 \\ \mathbf{-3} & \mathbf{1} & \mathbf{2} \end{vmatrix} = 0.$$

6. Определитель равен нулю, если все элементы некоторой строки (столбца) равны нулю.

$$\begin{vmatrix} 1 & 6 & 0 \\ -7 & 4 & 0 \\ 5 & -3 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

7. Определитель равен нулю, если элементы любых двух строк (столбцов) соответственно пропорциональны.

$\begin{vmatrix} -1 & 4 & 2 \\ 2 & 0 & -4 \\ 3 & 1 & -6 \end{vmatrix} = 0$ элементы первого и третьего столбцов соответственно пропорциональны, т.е. $\begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ -6 \end{bmatrix} = (-2) \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$.