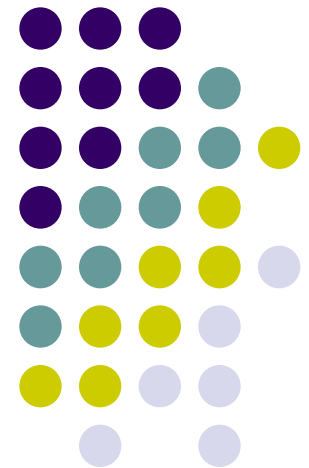
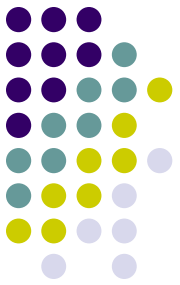


Производная функции. Правила  
дифференцирования. Основные  
свойства дифференцируемых  
функций. Производные основных  
элементарных функций.  
Производная сложной функции

ЛЕКЦИЯ

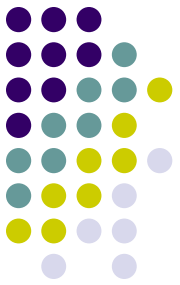


Калабухова  
Галина Валентиновна  
*кандидат социологических наук, доцент*

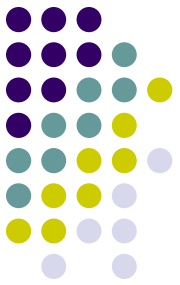


# Вопросы темы

- Производная функции. Геометрический смысл производной.
- Уравнение касательной и нормали к кривой.
- Производная с точки зрения механики.
- Дифференцируемость функции. Основные свойства дифференцируемых функций.
- Дифференциал функции.
- Дифференцирование суммы, произведения и частного.
- Производные основных элементарных функций.
- Производная сложной функции.
- Понятие обратной функции. Производная обратной функции.



# ПРОИЗВОДНАЯ ФУНКЦИИ. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ ПРОИЗВОДНОЙ



# Определение

Пусть функция  $y=f(x)$  определена в точке  $x$  и некоторой её окрестности. Придадим значению аргумента  $x$  приращение  $\Delta x$  (положительное или отрицательное, но не выводящее за пределы этой окрестности) и найдем соответствующее приращение функции  $\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$ .

Предел отношения приращения функции  $\Delta y$  к приращению аргумента  $\Delta x$  при  $\Delta x \rightarrow 0$  называется *производной* функции  $y=f(x)$  в точке  $x$ :

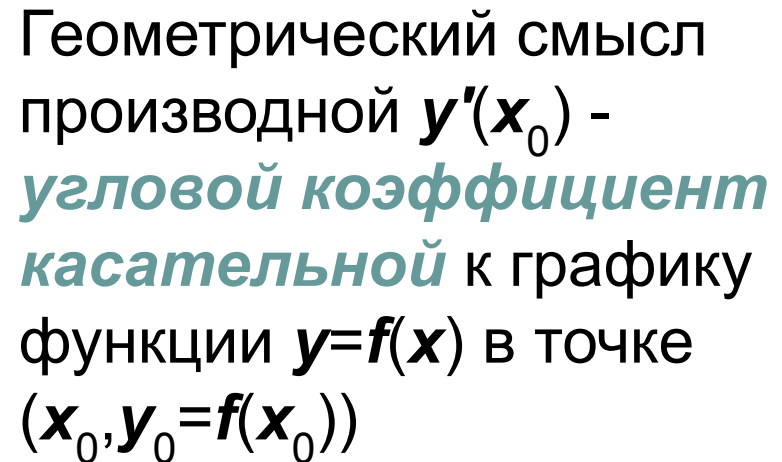
$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

# Обозначения



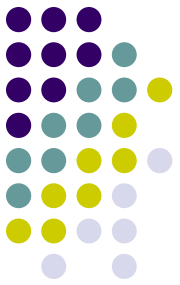
$$y', f'(x), \frac{dy}{dx}, \frac{df(x)}{dx}, y'_x$$

## A decorative graphic in the bottom right corner consisting of a grid of colored dots in shades of purple, teal, yellow, and light blue, arranged in a pattern that tapers to the right.

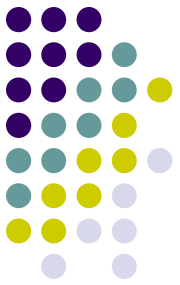


предела,  $k(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$

т.е. существование производной



# УРАВНЕНИЕ КАСАТЕЛЬНОЙ К НОРМАЛИ И КРИВОЙ



Уравнение прямой с заданным угловым коэффициентом, проходящей через данную точку:

$$y - y_0 = k (x - x_0)$$

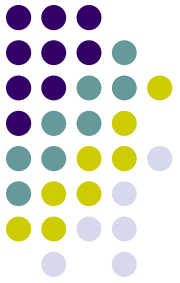
Уравнение касательной в точке  $(x_0, y_0 = f(x_0))$ :

$$y = y'(x_0)(x - x_0) + y(x_0)$$

Уравнение нормали к графику функции в точке  $(x_0, y_0 = f(x_0))$  (при условии, что  $y'(x_0) \neq 0$ ):

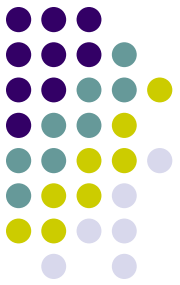
$$y = -\frac{1}{y'(x_0)}(x - x_0) + y(x_0)$$





# ПРОИЗВОДНАЯ С ТОЧКИ ЗРЕНИЯ МЕХАНИКИ

# Вычисление скорости неравномерно движущегося тела



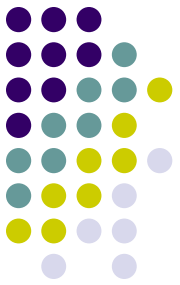
Пусть материальная точка неравномерно движется вдоль оси  $Ox$ . Известна зависимость пути  $s(t)$ , пройденного к моменту времени  $t$  от времени  $t_0$ , требуется найти значение скорости точки в момент  $t_1$ .

Если мы возьмём любое  $t_1 \neq t_0$  и найдём отношение  $\frac{s(t_1) - s(t_0)}{t_1 - t_0}$

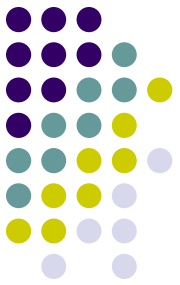
то будет получено среднее значение скорости на отрезке  $[t_0, t_1]$ . Чтобы получить мгновенное значение скорости в момент  $t_0$ , мы должны устремить  $t_1$  к  $t_0$ , т.е. найти предел ,

$$v(t_0) = \lim_{t_1 \rightarrow t_0} \frac{s(t_1) - s(t_0)}{t_1 - t_0} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

где  $\Delta t = t_1 - t_0$ ,  $\Delta s = s(t_1) - s(t_0)$



# **ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОСТЬ ФУНКЦИИ. ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ**

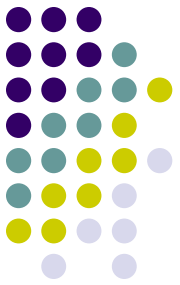


# Определение

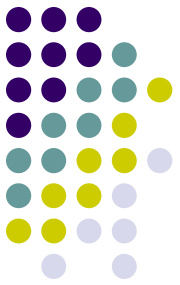
Если функция имеет в точке  $x$  конечную производную, то функция называется *дифференцируемой* в этой *точке*.

Функция, дифференцируемая во всех точках промежутка  $X$ , называется *дифференцируемой* на этом *промежутке*

Операция нахождения производной называется *дифференцированием*



# ДИФФЕРЕНЦИАЛ ФУНКЦИИ



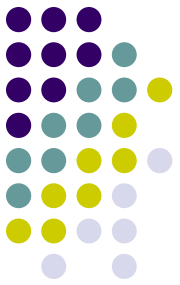
# Определение

Функция  $y = f(x)$  называется *дифференцируемой в точке  $x$* , если её приращение  $\Delta y$  в этой точке можно представить в виде ,

$$\Delta y = A \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x)$$

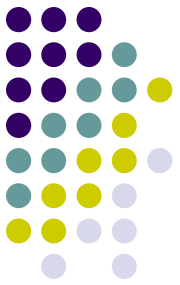
где  $A$  - не зависящая от  $\Delta x$  величина,  
 $\alpha(\Delta x)$  – бесконечно малая высшего порядка по сравнению с  $\Delta x$ :

$$\frac{\alpha(\Delta x)}{\Delta x} \xrightarrow{\text{при } \Delta x \rightarrow 0} 0$$



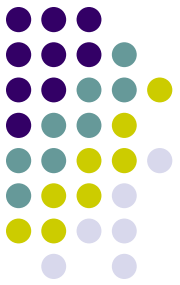
# Определение

Главная часть приращения  $\Delta y$  дифференцируемой функции, линейная относительно приращения  $\Delta x$  аргумента (т.е.  $A \cdot \Delta x$ ), называется *дифференциалом* функции и обозначается  **$dy$**  (или  **$df(x)$** ).



# ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОСТЬ СУММЫ, ПРОИЗВЕДЕНИЯ И ЧАСТНОГО





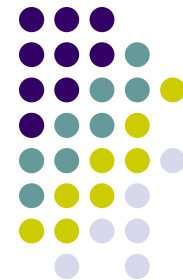
# Дифференцируемость суммы

Пусть функции  $u(x)$  и  $v(x)$  имеют производные в точке  $x$ .

Тогда в этой точке имеют производные функции  $y = (u(x) \pm v(x))$ , и

$$(u(x) \pm v(x))' = u'(x) \pm v'(x)$$

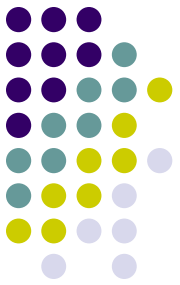
# Дифференцируемость произведения



Пусть функции  $u(x)$  и  $v(x)$  имеют производные в точке  $x$ .

Тогда в этой точке имеет производную функция  $y = (u(x) \cdot v(x))$ , и

$$(u(x) \cdot v(x))' = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x).$$

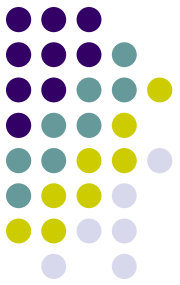


Пусть функции  $u(x)$  имеет производную в точке  $x$ ,  $C$  - константа.

Тогда в этой точке имеет производную функция  $y = Cu(x)$ , и

$$(Cu(x))' = Cu'(x).$$

# Дифференцируемость частного

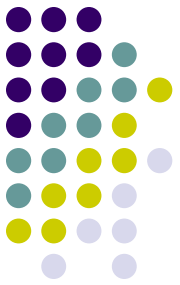


Пусть функции  $u(x)$  и  $v(x)$  имеют производные в точке  $x$ , причём  $v(x) \neq 0$ .

Тогда в этой точке имеет производную функция

$$y(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$$

$$\left( \frac{u(x)}{v(x)} \right)' = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)}$$

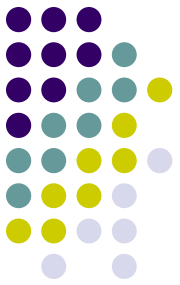


# ПРОИЗВОДНЫЕ ОСНОВНЫХ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ФУНКЦИЙ

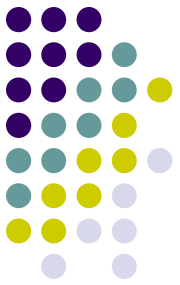
# Таблица производных



|                                                                              |                                                           |
|------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------|
| $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$                                                   | $(\cos x)' = -\sin x$                                     |
| $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad (x > 0)$                            | $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$             |
| $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a} = \frac{\log_a e}{x}, \quad (x > 0, a > 0)$ | $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$           |
| $(\ln x)' = \frac{1}{x}, \quad (x > 0)$                                      | $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad ( x  < 1)$   |
| $(a^x)' = a^x \ln a$                                                         | $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad ( x  < 1)$ |
| $(e^x)' = e^x$                                                               | $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$             |
| $(\sin x)' = \cos x$                                                         | $(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$           |



# ПРОИЗВОДНАЯ СЛОЖНОЙ ФУНКЦИИ

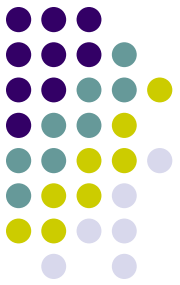


Пусть функция  $u=g(x)$  имеет в точке  $x$  производную  $u'_x=g'(x)$ , функция  $y=f(u)$  имеет в точке  $u$  производную  $y'_u=f'(u)$ .

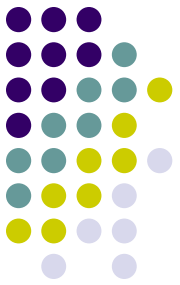
Тогда сложная функция  **$y=f(g(x))$**  имеет в точке  **$x$**  производную, равную произведению производных функций  **$f(u)$**  и  **$g(x)$**  и:

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x$$





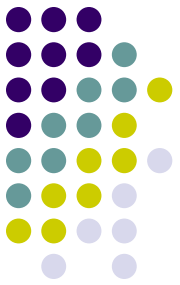
# ПОНЯТИЕ ОБРАТНОЙ ФУНКЦИИ. ПРОИЗВОДНАЯ ОБРАТНОЙ ФУНКЦИИ



# Определение

Пусть  $y=f(x)$  – дифференцируемая и строго монотонная функция на некотором промежутке  $X$ .  
имеет в точке  $u$  производную  $y_u=f'(u)$ .

Если переменную  $y$  рассматривать как аргумент, а переменную  $x$  – как функцию, то новая функция  $x=g(y)$  является **обратной** к данной и непрерывной на соответствующем промежутке  $Y$ .



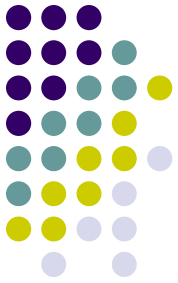
Для дифференцируемой функции с производной, не равной нулю, производная обратной функции равна величине производной данной функции, т.е.

$$x'_y = \frac{1}{y'_x}$$

# Пример 1

Найти производную функции:

$$y = \frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}$$



# Решение



функция представляет собой частное, воспользуемся формулой нахождения производной частного:

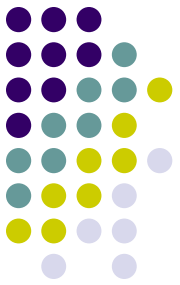
# Решение



функция представляет собой частное, воспользуемся формулой нахождения производной частного:

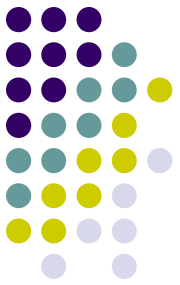
$$y' = \left( \frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x} \right)' =$$

# Решение



функция представляет собой частное, воспользуемся формулой нахождения производной частного:

$$y' = \left( \frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x} \right)' = \frac{(\sin x + \cos x)' \cdot (\sin x - \cos x) - (\sin x + \cos x) \cdot (\sin x - \cos x)'}{(\sin x - \cos x)^2} =$$

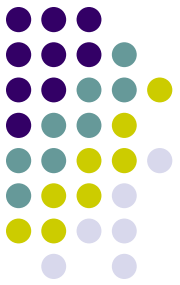


# Решение

функция представляет собой частное, воспользуемся формулой нахождения производной частного:

$$\begin{aligned} y' &= \left( \frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x} \right)' = \frac{(\sin x + \cos x)' \cdot (\sin x - \cos x) - (\sin x + \cos x) \cdot (\sin x - \cos x)'}{(\sin x - \cos x)^2} = \\ &= \frac{(\cos x - \sin x) \cdot (\sin x - \cos x) - (\sin x + \cos x) \cdot (\cos x + \sin x)}{(\sin x - \cos x)^2} = \end{aligned}$$

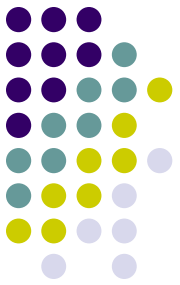




# Решение

функция представляет собой частное, воспользуемся формулой нахождения производной частного:

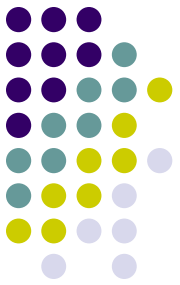
$$\begin{aligned} y' &= \left( \frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x} \right)' = \frac{(\sin x + \cos x)' \cdot (\sin x - \cos x) - (\sin x + \cos x) \cdot (\sin x - \cos x)'}{(\sin x - \cos x)^2} = \\ &= \frac{(\cos x - \sin x) \cdot (\sin x - \cos x) - (\sin x + \cos x) \cdot (\cos x + \sin x)}{(\sin x - \cos x)^2} = \\ &= \frac{\cos x \cdot \sin x - \cos^2 x - \sin^2 x + \sin x \cdot \cos x - \sin^2 x - 2 \cdot \sin x \cdot \cos x - \cos^2 x}{(\sin x - \cos x)^2} = \end{aligned}$$



# Решение

функция представляет собой частное, воспользуемся формулой нахождения производной частного:

$$\begin{aligned} y' &= \left( \frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x} \right)' = \frac{(\sin x + \cos x)' \cdot (\sin x - \cos x) - (\sin x + \cos x) \cdot (\sin x - \cos x)'}{(\sin x - \cos x)^2} = \\ &= \frac{(\cos x - \sin x) \cdot (\sin x - \cos x) - (\sin x + \cos x) \cdot (\cos x + \sin x)}{(\sin x - \cos x)^2} = \\ &= \frac{\cos x \cdot \sin x - \cos^2 x - \sin^2 x + \sin x \cdot \cos x - \sin^2 x - 2 \cdot \sin x \cdot \cos x - \cos^2 x}{(\sin x - \cos x)^2} = \\ &= \frac{-1 - 1}{(\sin x - \cos x)^2} = \end{aligned}$$



# Решение

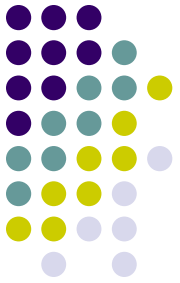
функция представляет собой частное, воспользуемся формулой нахождения производной частного:

$$\begin{aligned} y' &= \left( \frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x} \right)' = \frac{(\sin x + \cos x)' \cdot (\sin x - \cos x) - (\sin x + \cos x) \cdot (\sin x - \cos x)'}{(\sin x - \cos x)^2} = \\ &= \frac{(\cos x - \sin x) \cdot (\sin x - \cos x) - (\sin x + \cos x) \cdot (\cos x + \sin x)}{(\sin x - \cos x)^2} = \\ &= \frac{\cos x \cdot \sin x - \cos^2 x - \sin^2 x + \sin x \cdot \cos x - \sin^2 x - 2 \cdot \sin x \cdot \cos x - \cos^2 x}{(\sin x - \cos x)^2} = \\ &= \frac{-1 - 1}{(\sin x - \cos x)^2} = -\frac{2}{(\sin x - \cos x)^2} \end{aligned}$$

## Пример 2

Найти производную функции:

$$y = \log_3(2x^3 + 1)$$



# Решение

Сложная функция:

$$y' = (\log_3(2x^3 + 1))' =$$



# Решение

Сложная функция:

$$y' = (\log_3(2x^3 + 1))' = \frac{1}{(2x^3 + 1) \cdot \ln 3} \cdot (2x^3 + 1)' =$$



# Решение



Сложная функция:

$$y' = (\log_3(2x^3 + 1))' = \frac{1}{(2x^3 + 1) \cdot \ln 3} \cdot (2x^3 + 1)' = \frac{3 \cdot 2x^2}{(2x^3 + 1) \cdot \ln 3} =$$

# Решение



Сложная функция:

$$y' = (\log_3(2x^3 + 1))' = \frac{1}{(2x^3 + 1) \cdot \ln 3} \cdot (2x^3 + 1)' = \frac{3 \cdot 2x^2}{(2x^3 + 1) \cdot \ln 3} = \frac{6x^2}{(2x^3 + 1) \cdot \ln 3}$$