

# ДЕЛИМОСТЬ ЧИСЕЛ (ЧАСТЬ 1)

*Л. А. Янкина, канд. пед. наук,  
доцент кафедры методики начального образования*



# Отношение делимости и его свойства

Пусть даны натуральные числа **a** и **b**.

Говорят, что число **a** делится на число **b**,  
если существует такое натуральное  
число **c**, что

$$a \square b \Leftrightarrow a = b \cdot c$$

**b** – делитель числа **a**

**a** – кратное числа **b**

Пример:  $24 \square 8$ , так как  $24 = 8 \cdot 3$ .

8 – это делитель числа 24, а 24 есть  
кратное числа 8.

Замечание: понятие «**делитель данного числа**» следует отличать от понятия «**делитель**», обозначающего то число, на которое делят.

Пример:  $18 : 5$ .

Здесь число **5** – **делитель**, но **5** не является **делителем** числа **18**.

$18 : 6$ , **6** – **делитель**,

$18 \square 6$ , **6** – **делитель** числа **18**

# Свойства отношения делимости

1. Отношение делимости рефлексивно, т. е. любое натуральное число делится само на себя:

$$(\forall a \in \mathbb{N}) a \sqsubset a$$

2. Любое целое неотрицательное число делится на 1 (или 1 является делителем любого целого неотрицательного числа):

$$(\forall a \in \mathbb{N}_0) a \sqsubset 1$$

3. Делитель  $b$  данного числа  $a$  не превышает этого числа, т. е.

$$a \sqsubset b \Rightarrow b \leq a$$

4. Отношение делимости \_\_\_\_\_  
антисимметрично, т.е.

$$a \square b, a \neq b \Rightarrow b \not\square a$$

5. Отношение делимости транзитивно, т.  
е.

$$a \square b \text{ и } b \square c \Rightarrow a \square c$$

6. Число 0 делится на любое число:

$$(\forall b \in \mathbb{N}) 0 \square b$$

7. Число 0 не является делителем  
никакого натурального числа:

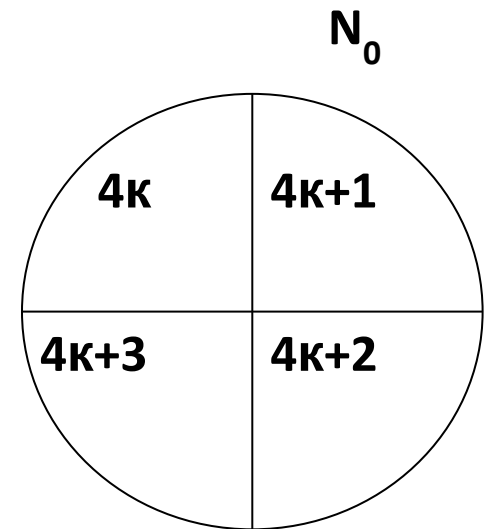
$$(\forall a \in \mathbb{N}) \quad \overline{a \not\square 0}$$

**Пример:**

$$a \equiv 4 \Rightarrow a = 4k, k \in \mathbb{N}$$

$$\overline{a \not\equiv 4} \Rightarrow a = 4k + 1 \vee a = 4k + 2 \vee a = 4k + 3.$$

**Числа  $4k, 4k+1, 4k+2, 4k+3$  образуют множества, которые попарно не пересекаются, а их объединение совпадает с множеством целых неотрицательных чисел (т. е. множество разбито на 4 класса)**



# Делимость суммы, разности,

**Теорема 1** (признак делимости суммы)

Если числа  $a$  и  $b$  делятся на  $c$ , то и их сумма делится на  $c$ :

$$a \square c \wedge b \square c \Rightarrow (a + b) \square c$$

Пример:  $(63 + 81) \square 9$ , так как  $63 \square 9 \wedge$

Обратное неверно:  $(5 + 6) \square 11$ , но  $5 \square 11 \wedge 6 \square 11$

**Теорема 2.** Если каждое из натуральных чисел  $a_1, a_2, \dots, a_n$  делится на натуральное число  $b$ , то и их сумма  $a_1 + a_2 + \dots + a_n$

делится на это число.  
Пример:  $(63 + 81 + 45 + 18) \square 9$ , так как

$$63 \square 9 \wedge 81 \square 9 \wedge 45 \square 9 \wedge 18 \square 9$$

### Теорема 3 (признак делимости разности)

Если числа  $a$  и  $b$  делятся на  $c$  и  $a > b$ , то их разность  $a - b$  делится на  $c$ :

$$a \square c \wedge b \square c \wedge a > b \Rightarrow (a - b) \square c$$

Пример:  $(66 - 48) \square 6$ , так как  $66 \square 6 \wedge 48$

Обратное неверно:  $(14 - 6) \square 8$ , но  $\overline{14 \square 8}$  и  $\overline{6 \square 8}$

Теорема 4. Если в сумме одно слагаемое не делится на число  $b$ , а все остальные слагаемые делятся на число  $b$ , то вся сумма на число  $b$  не делится.

Пример:  $(34 + 125 + 376 + 1024)$  не делится на 2, так как  $34 \square 2$ ,  $376 \square 2$ ,  $124 \square 2$ , но **125 не кратно 2**

## Теорема 5 (признак делимости произведения)

Если число  $a$  делится на  $b$ , то произведение вида  $ax$ , где  $x \in \mathbb{N}$ , делится на  $b$ .

Пример:  $24 \cdot 976 \cdot 305 \square 12$ , так как  $24 \square 12$

Обратное неверно:  $(5 \cdot 6) \square 15$ , но ни 5, ни 6 на 15 не делятся

**Делится ли произведение  $75 \cdot 12$  на 9?**

Теорема 6. Если в произведении  $ab$   $a \square m$ ,  $b \square n$ , то  $ab$  делится на  $mn$ .

**$75 \cdot 12 \square 9$ , так как  $75 \square 3$  и  $12 \square 3$**

**Теорема 7.** Если произведение  $ac$  делится на произведение  $bc$ , причем  $c$  – натуральное число, то и  $a$  делится на  $b$

**Пример:**  $360 \square 90$ , т.е.  $(180 \cdot 2) \square (45 \cdot 2)$ ,  
значит,  $180 \square 45$

Из теорем 2 и 5 следует:

**Теорема 8.** Если числа  $a_1, a_2, \dots, a_n$  делятся на натуральное число  $b$ , то каковы бы ни были числа  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , число  $a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n$  делится на  $b$

## Упражнения

**1.** Не выполняя сложения, установите, делится ли значение выражения на 3:

**а)**  $180 + 144$ ; **б)**  $720 + 308 + 603$ .

**2.** Не производя вычитания, укажите выражения, значения которых кратны 5:

**а)**  $535 - 413$ ; **б)**  $1215 - 470$ ; **в)**  $20147 - 1307$ .

**3.** Не производя умножения, установите, будет ли произведение  $75 \cdot 32 \cdot 27$  делиться на 5, 8, 9, 10, 18, 45?



# Признаки делимости

Признак делимости на число  $b$  –

это правило, позволяющее по записи числа  $a$  узнавать, делится ли оно на  $b$ ,

не выполняя непосредственно деления  $a$  на  $b$ .

## Признак делимости на 2

Для того чтобы число  $x$  делилось на 2, необходимо и достаточно, чтобы его десятичная запись оканчивалась одной из цифр 0, 2, 4, 6, 8

### Доказательство

Пусть число  $x$  записано в десятичной системе счисления, т.е.

$$x = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \dots + a_1 \cdot 10 + a_0$$

$\square$   $\square$   $\square$   
2 2 2  
 $\square$   
2

$a_0 \square 2$ , т.е. равно одной из цифр 0, 2, 4, 6, 8  $\Rightarrow$   
 $x \square 2$

$$\overline{a_0 \square 2} \Rightarrow \overline{x \square 2}$$

## Признак делимости на 5

Для того чтобы число  $x$  делилось на 5, необходимо и достаточно, чтобы его десятичная запись оканчивалась одной из цифр 0 или 5

Доказательство аналогично (самостоятельно)

$$2 \cdot 5 = 10 \quad 2^2 \cdot 5^2 = 10^2 \quad 2^3 \cdot 5^3 = 10^3 \quad \text{и т. д.}$$

## Признак делимости на 4

Для того чтобы число  $x$  делилось на 4, необходимо и достаточно, чтобы на 4 делилось двузначное число, образованное двумя последними цифрами десятичной

### Доказательство

Пусть число  $x$  записано в десятичной системе счисления, т.е.

$$x = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \dots + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0$$

$\square$   $\square$   $\square$   $\square$

4 4 4

$$\begin{aligned} (a_1 \cdot 10 + a_0) \square 4 &\Rightarrow x \square 4 \\ \hline (a_1 \cdot 10 + a_0) \boxtimes 4 &\Rightarrow x \boxtimes 4 \end{aligned}$$

## Признак делимости на 25

Для того чтобы число  $x$  делилось на **25**, необходимо и достаточно, чтобы оно заканчивалось либо на **00**, либо на **25**, либо на **50**, либо на **75**

Доказательство аналогично (самостоятельно)

## Признак делимости на 8

Для того чтобы число  $x$  делилось на 8, необходимо и достаточно, чтобы на 8 делилось трехзначное число, образованное тремя последними цифрами десятичной записи числа  $x$

## Признак делимости на 125

Для того чтобы число  $x$  делилось на 125, необходимо и достаточно, чтобы на 125 делилось трехзначное число, образованное тремя последними цифрами десятичной записи числа  $x$

Доказательство аналогично  
(самостоятельно)

## Признак делимости на 9

Для того чтобы число  $x$  делилось на 9, необходимо и достаточно, чтобы сумма цифр его десятичной записи делилась на 9

### Доказательство

Пусть число  $x$  записано в десятичной системе счисления, т.е.

$$x = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \dots + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0$$

$$10 = 9 + 1 \quad 10^2 = 99 + 1 \quad 10^3 = 999 + 1 \quad \dots$$

$$10^n = \underbrace{99 \dots 9}_n + 1$$

$$x = a_n \cdot \underbrace{(99 \dots 9 + 1)}_n + a_{n-1} \cdot \underbrace{(99 \dots 9 + 1)}_{n-1} + \dots + a_1 \cdot (9 + 1) + a_0$$

$$x = a_n \cdot 99 \dots 9 + a_{n-1} \cdot 99 \dots 9 + \dots + a_1 \cdot 9 + (a_n +$$

$$\underbrace{a_{n-1} + \dots + a_0}_{\square} \cdot 9$$

$$(a_n + a_{n-1} + \dots + a_0) \cdot 9 \Rightarrow x \cdot 9$$

$$(a_n + a_{n-1} + \dots + a_0) \cdot 9 \Rightarrow \overline{x \cdot 9}$$

### Признак делимости на 3

Для того чтобы число  $x$  делилось на 3, необходимо и достаточно, чтобы сумма цифр его десятичной записи делилась на 3

Доказательство аналогично (самостоятельно)

## Признак делимости на 7

Число  $x$  делится на 7 тогда и только тогда, когда на 7 делится число

$$p = a_0 + 3a_1 + 2a_2 - (a_3 + 3a_4 + 2a_5) + \dots,$$

где  $a_0, a_1, a_2, \dots$  - цифры единиц, десятков, сотен, ... числа  $x$

### Примеры:

1) число 1999 не делится на 7, так как на 7 не делится число  $p = 9 + 3 \cdot 9 + 2 \cdot 9 - 1 = 53$

2)  $36701 \div 7$ , так как  $p = 1 + 3 \cdot 0 + 2 \cdot 7 - (6 + 3 \cdot 3) = 0$  делится на 7

## Признак делимости на 11

Число  $x$  делится на 11 тогда и только тогда, когда на 11 делится разность между суммой цифр, стоящих на четных местах, и суммой цифр на нечетных местах

Примеры: Делится ли на 11 число

5482257,5630?

$$1) (5+8+2+7) - (4+2+5) = 22 - 11 = 11 \square 11 \Rightarrow 5482257$$

$\square 11$

$$2) (5+3) - (6+0) = 8 - 6 = 2 - \text{не кратно } 11 \Rightarrow 5630$$

не кратно 11

## Признак делимости на 13

Число  $x$  делится на 13 тогда и только тогда, когда на 13 делится число  $p$ , полученное из него зачеркиванием последней цифры и прибавлением к полученному числу учетверенного значения этой цифры

Пример: число 1105 делится на 13, так как число  $p = 110 + 4 \cdot 5 = 130$  делится на 13.

## Общий признак делимости на 7 и 13

Число  $x$  делится на 7(13) тогда и только тогда, когда на 7(13) делится разность числа тысяч и числа, образованного тремя последними цифрами числа  $x$

### Примеры:

1)  $825678 \div 7$ , т. к.  $825 - 678 = 147 \div 7$ .

2)  $9264996 \div 13$ , т.к.  $9264 - 996 = 8268$ ,  
 $8 - 268 = -260 \div 13$



**Спасибо за  
внимание!**