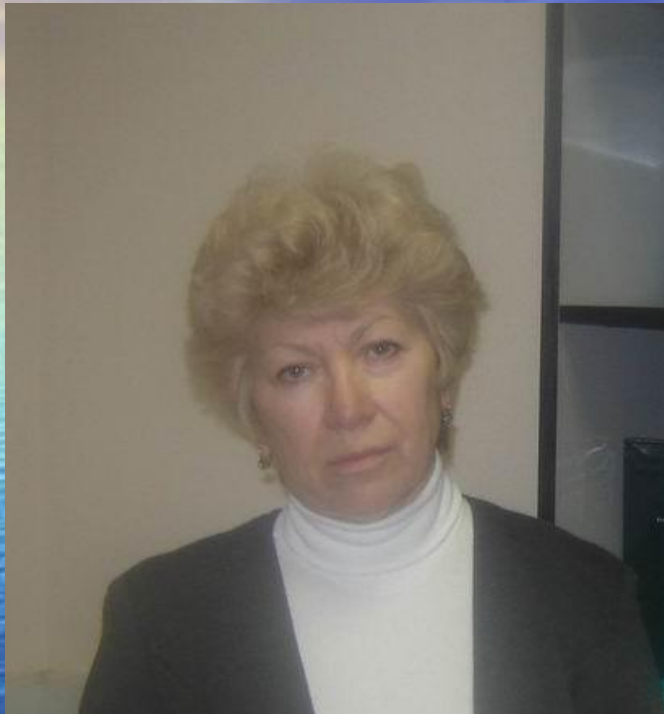




ПРОКОФЬЕВА
Тамара Валентиновна
доцент, к.т.н.



ФЕДОРОВА
Елена Борисовна
ассистент, к.т.н.

Основы прикладной гидравлики

Для студентов факультета химической
технологии и экологии

Основы прикладной гидравлики

Основные понятия и определения

Физические свойства жидкостей

Элементы гидростатики

Элементы гидродинамики



Гидромеханика

 - наука, изучающая равновесие и движение жидкости, а также взаимодействие между жидкостью и твердыми частицами, погруженными в жидкость полностью или частично.

 По принципу целенаправленности гидромеханические процессы химической технологии можно разделить на:

1. Процессы перемещения потоков в трубопроводах и аппаратах;
2. Процессы, протекающие **с разделением** неоднородных систем (осаждение, фильтрование, центрифугирование)
3. Процессы, протекающие **с образованием** неоднородных систем (перемешивание, псевдоожижение и др.)



Законы гидромеханики и их практические приложения изучают в

ГИДРАВЛИКЕ



Гидравлика

```
graph TD; A[Гидравлика] --> B["- наука, изучающая законы равновесия и движения жидкостей"]; B --> C[Гидростатика]; B --> D[Гидродинамика]; C --> E["Учение о равновесии жидкостей"]; D --> F["Учение о движении жидкостей"];
```

- наука, изучающая
законы равновесия
и движения жидкостей

Гидростатика

Учение о
равновесии
жидкостей

Гидродинамика

Учение о
движении
жидкостей

Жидкости

- физические тела, которые легко изменяют свою форму под действием приложенных сил.
Для решения задач гидравлики используют

понятие об идеальной жидкости, т.е. жидкости абсолютно несжимаемой и не обладающей вязкостью.

Капельные Газообразные

изменяют свой объем при воздействии сил и изменении температуры.

Силы, действующие на жидкость

Внешние

Поверхностные

- сила поверхностного натяжения
- сила давления на свободной поверхности
- силы реакции стенок сосуда

Внутренние

Объемные

межмолекулярного

- сила тяжести
- центробежная сила

Физические свойства жидкостей

Плотность

Уравнение Уравнение состояния идеального газа

Сжимаемость

Поверхностное натяжение

Вязкость

Неньютоновские жидкости

Практические задачи



Плотность

- масса жидкости, заключенная
в
единице ее объема

$$\rho = \frac{m}{V}$$

$$[\rho] = \left[\frac{m}{L^3} \right]$$

кг/м³ (СИ)

Уравнение Д.И.Менделеева

$$\rho_t = \rho_{20} - \alpha_\rho (t - 20)$$

$$\rho_4^t = \rho_4^{20} - \alpha(t - 20)$$

Удельный вес

- вес единицы объема жидкости.

$$\gamma = \frac{G}{V}$$

$$[\gamma] = \left[\frac{G}{L^3} \right]$$

Н/м³
(СИ).

$$G = mg$$

$$\gamma = \rho g$$

Относительная плотность –
безразмерная единица!!!

При изменении давления и температуры
объем и плотность газа рассчитывают
по следующим соотношениям:

$$V = V_0 \frac{p_0}{T_0} \cdot \frac{T}{p} \quad \rho = \rho_0 \cdot \frac{T_0}{p_0} \cdot \frac{p}{T}$$

При нормальных условиях плотность газа
определяется из уравнения:

$$\rho_0 = M \frac{p}{RT} = M \cdot \frac{101300}{8314 \cdot 273} = \frac{M}{22,4}$$

Число
Авогадро

Мольная масса воздуха:

$$M = 0,79 \cdot 28 + 0,21 \cdot 32 = 28,8 \text{ кг/кмоль}$$

Плотность воздуха при заданных условиях:

$$\rho = \frac{M}{22,4} \cdot \frac{273 \cdot p}{T \cdot p_0} = \frac{28,8}{22,4} \cdot \frac{273(750 - 440)}{(273 - 40) \cdot 750} =$$
$$= 0,615 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$$

воздуха
(и)

С.

ит

рода.

ст.



• Сжимаемость

жидкостей характеризуется коэффициентом сжимаемости

$$\beta_V$$

который равен отношению изменения относительного объема жидкости к изменению давления:

$$\beta_V = -\frac{1}{V} \cdot \frac{\Delta V}{\Delta p}$$

$$[\beta_V] = \text{Па}^{-1} \quad (\text{м}^2/\text{Н}).$$

• Температурное расширение

$$\beta_t = -\frac{\Delta V}{V} \cdot \frac{1}{\Delta t} \quad (\text{град}^{-1})$$

• Модуль упругости

величина, обратная коэффициенту сжимаемости.

- Коэффициент сжимаемости и модуль упругости изменяются в зависимости от температуры и давления.

- Для нефтепродуктов в среднем

$$\beta_V = 7,41 \cdot 10^{-10} \frac{\text{м}^2}{\text{Н}}$$

- для глинистых растворов

$$\beta_V = 4,0 \cdot 10^{-10} \frac{\text{м}^2}{\text{Н}}$$

- В гидравлических расчетах величиной

$$\beta_V$$

можно пренебречь, кроме тех случаев, когда имеет место гидравлический удар.

Поверхностное натяжение.

- Механические свойства жидкостей обусловлены силами поверхностного натяжения или капиллярности. Поверхностное натяжение со стороны атмосферы и капиллярности возникает из-за того, что на поверхности возникает избыточное давление.

Размерность поверхностного натяжения в СИ:

$$[\sigma] = \left[\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \mathcal{A}} \right] = \left[\frac{\text{Н} \cdot \text{м}}{\text{м}^2} \right] = \left[\frac{\text{Н}}{\text{м}} \right]$$

Размерность в системе СГС:

$$[\sigma] = \left[\frac{\text{эрг}}{\text{см}^2} \right] = \left[\frac{\text{дин}}{\text{см}} \right]$$

$$1 \frac{\text{кГ}}{\text{м}} = 9810 \frac{\text{дин}}{\text{см}}$$

- Поверхностное натяжение обусловлено силами молекулярного сцепления. Силы поверхностного натяжения определяют форму жидкости в капиллярах, при

Силы поверхностного натяжения оказывают на жидкость дополнительное давление, перпендикулярное к ее поверхности, величина которого определяется уравнением **Лапласа**:

$$p = \sigma \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right)$$

где r_1 и r_2 - главные радиусы кривизны поверхности элемента жидкости.



Вязкость

Вязкость является результатом действия трения между соприкасающимися слоями жидкости, вследствие чего эти слои движутся с различными скоростями.

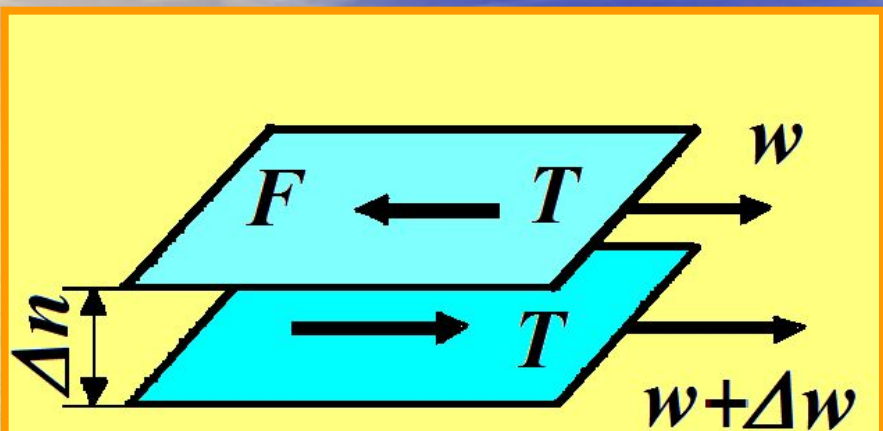
Для расчета силы трения обычно используют закон *Ньютона*.

Этот закон обобщенно характеризует механические свойства сплошных сред и распространяется на воду, воздух, спирты и многие другие жидкости и газы.

Ньютоновскими называются жидкости, удовлетворяющие обобщенному закону Ньютона в форме:

$$T_{тр} = \mu F \frac{\Delta w}{\Delta n}$$

Вязкость



F - площадь слоя

Δn - расстояние между слоями

T - приложенная сила

w - скорость
жидкости

Динамический
коэффициент вязкости
(вязкость)

- Вязкостью называется свойство жидкости оказывать сопротивление ее движению, т.е. взаимному перемещению ее частиц.

- Напряжение внутреннего трения (сдвига) $\tau = \frac{T}{F}$

- Напряжение внутреннего трения, возникающее между слоями жидкости при ее течении, прямо пропорционально градиенту скорости

$$\tau = -\mu \cdot \frac{\Delta w}{\Delta n}$$

- Единицы измерения вязкости μ :

$$[\mu] = \left[\frac{\text{дин} \cdot \text{с}}{\text{см}^2} \right] = \left[\frac{\frac{\text{Н} \cdot \text{с}}{\text{м}^2}}{\text{с}^2} \right] = \left[\frac{\frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}^2} \cdot \text{с}}{\text{м}^2} \right] = \left[\frac{\text{кг}}{\text{м} \cdot \text{с}} \right]$$

- Соотношение между Па*с и П: $1 \text{ Па} \cdot \text{с} = 10 \text{ П}$

- Кинематический коэффициент вязкости или кинематическая вязкость ν :

$$\nu = \frac{\mu}{\rho}$$

- Единицы измерения кинематической вязкости :

$$[\nu] = \frac{\text{м}^2}{\text{с}}$$

$$[\nu] = \text{стокс (Ст)} = 1 \frac{\text{см}^2}{\text{с}}$$

$$1 \frac{\text{м}^2}{\text{с}} = 10^4 \text{ Ст}$$

$$1 \text{ Ст} = 0,01 \text{ Ст}$$

Разл

Вязкость жидкостей
повышается с
температурой
уменьшается
газов – уве

Динамический коэффициент вязкости
для газов при температурах,
отличных от 0°C,
рассчитывают по формуле:

$$\mu_t = \mu_0 \frac{273 + C}{T + C} \left(\frac{T}{273} \right)^{3/2}$$

формула **Гросса**

$$\lg \frac{v_{t_1}}{v_{t_2}} = k \cdot \lg \frac{t_2}{t_1}$$

$$\lg(v_t + 0,8) = a + b \cdot \lg(t + 273)$$

Зад

$$k = \frac{\lg \frac{v_{t_1}}{v_{t_2}}}{\lg \frac{t_2}{t_1}} = \frac{\lg \frac{0,758}{0,176}}{\lg \frac{50}{20}} = 1,595$$

$$\lg \frac{0,758}{v_t} = 1,595 \lg \frac{105}{20}$$

$$v_t = 0,0572$$

bmu

/c.
05°C. cm^2/c



Одним из важных эмпирических показателей, характеризующих качество смазочных материалов, является вязкостно-весовая константа, определяемая **формулой Пинкевича**

$$\eta = \frac{\rho_{15}^{15} - 0,24 - 0,038 \lg \nu_{100}}{0,755 - 0,011 \lg \nu_{100}}$$



Неньютоновские жидкости

- Закон трения Ньютона справедлив для всех газов и многих жидкостей с низкой молекулярной массой (*ньютоновские жидкости*). Однако, ряд жидкостей (растворы полимеров, коллоидные растворы, пасты, суспензии и др) обнаруживают более сложные вязкостные свойства, которые не могут быть описаны законом Ньютона (*неньютоновские жидкости*). Для неньютоновских жидкостей вязкость зависит не только от параметров состояния, но и от условий течения.



Пластичные жидкости

Зависимость между касательным напряжением сдвига и градиентом скорости может быть представлена графически и называется *кривой течения*.

При τ , большей некоторого значения τ_0 , начинается течение этих жидкостей.

Уравнение кривой течения:

$$\tau - \tau_0 = \eta \frac{\Delta w}{\Delta n}$$

пластичная вязкость



Пластичные

Кривая течения вязкой
(ньютоновской) жидкости
движущейся

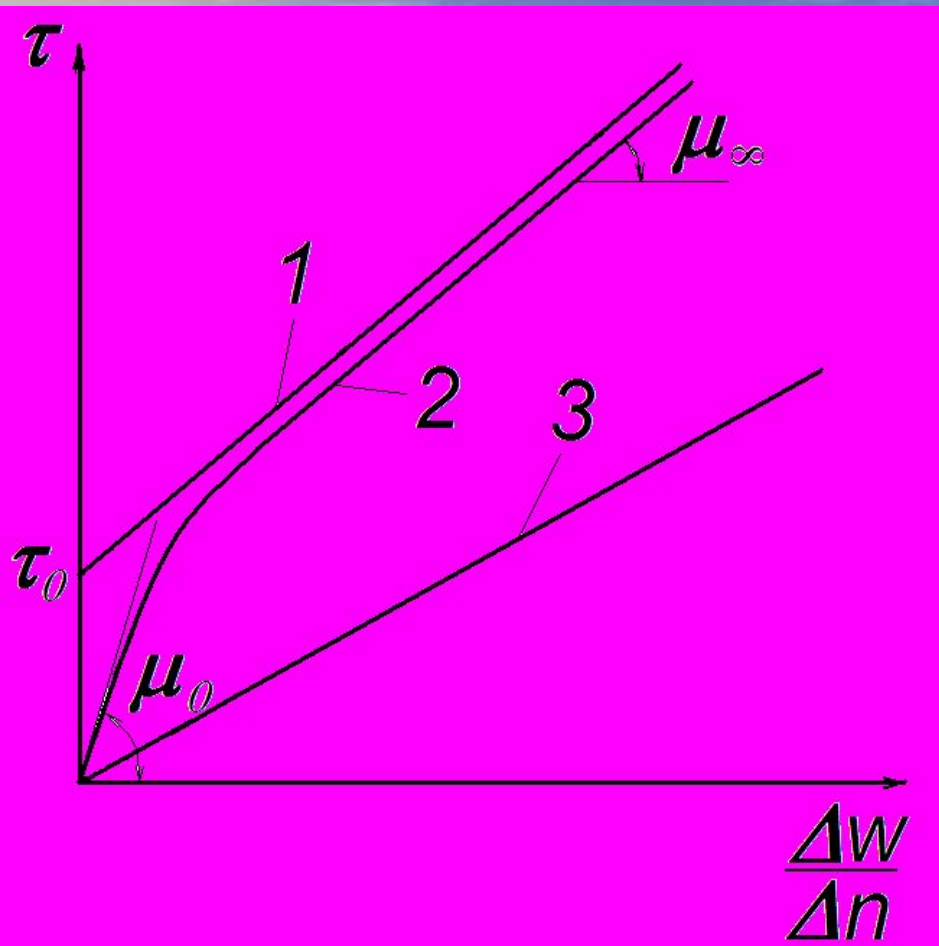
Вязкость пластичной жидкости,
движущейся по трубопроводу,
выражается следующей формулой:

$$\mu = \frac{d\tau_0}{6w} + \eta$$

где d - диаметр трубопровода, м;
 w - средняя скорость жидкости
в трубопроводе, м/с.

пластичной вязкости η .

Псевдопластичные жидкости



В отличие от пластичных жидкостей **псевдопластичные** жидкости начинают течь при самых малых значениях τ , но вязкость этих жидкостей изменяется от μ_0 до μ_∞ , приближаясь с возрастанием τ к вязкости пластичной жидкости.

Практические задачи



К расчету динамического коэффициента вязкости

- Для смеси нормальных (неассоциированных) жидкостей значение $\mu_{см}$ может быть вычислено по формуле:

$$\lg \mu_{см} = x'_1 \lg \mu_1 + x'_2 \lg \mu_2 + \dots$$

где $\mu_1, \mu_2, \dots$ - динамические коэффициенты вязкости отдельных компонентов;
 $x'_1, x'_2, \dots$ - мольные доли компонентов в смеси.

- В соответствии с аддитивностью текучестей компонентов динамический коэффициент вязкости смеси нормальных жидкостей определяется уравнением:

$$\frac{1}{\mu_{см}} = \frac{x_{v1}}{\mu_1} + \frac{x_{v2}}{\mu_2} + \dots,$$

где $x_{v1}, x_{v2}, \dots$ - объемные доли компонентов в смеси.

- Динамический коэффициент вязкости разбавленных суспензий μ_c может быть рассчитан по формулам:

при концентрации твердой фазы менее 10% (об)

$$\mu_c = \mu_{жс} (1 + 2,5\varphi)$$

при концентрации твердой фазы до 30% (об)

$$\mu_c = \mu_{жс} \frac{0,59}{(0,77 - \varphi)^2}$$

где $\mu_{жс}$ - динамический коэффициент вязкости чистой жидкости, φ - объемная доля твердой фазы в суспензии.



Задача 3.

Определить кинематический коэффициент вязкости жидкости, имеющей состав: 70% мол. кислорода и 30% мол. азота при $T=84\text{ К}$ и $p_{\text{абс}}=1\text{ атм.}$ Считать кислород и азот нормальными жидкостями.

Вязкость кислорода: $\mu_1=22,6 \cdot 10^{-5}\text{ Па}\cdot\text{с}$

азота: $\mu_2=11,8 \cdot 10^{-5}\text{ Па}\cdot\text{с}$

Плотность жидкого кислорода: $\rho_1=1180\text{ кг/м}^3$

азота: $\rho_2=780\text{ кг/м}^3$



Решение.

1. Динамический коэффициент вязкости для нормальных жидкостей:

$$\lg \mu_{см} = x'_1 \lg \mu_1 + x'_2 \lg \mu_2 + \dots$$

$$\lg \mu_{см} = 0,7 \lg 22,6 \cdot 10^{-5} + 0,3 \lg 11,8 \cdot 10^{-5} = -3,74$$

$$\mu_{см} = 18,2 \cdot 10^{-5}$$

2. Массовые доли компонентов в смеси:

$$x_1 = \frac{0,7 \cdot 32}{0,7 \cdot 32 + 0,3 \cdot 28} = 0,727 \quad x_2 = \frac{0,3 \cdot 28}{0,7 \cdot 32 + 0,3 \cdot 28} = 0,273$$

3. Плотность смеси: $\rho_{см} = \frac{1}{\frac{0,727}{1180} + \frac{0,273}{780}} = 1035 \text{ кг / м}^3$

4. Кинематическая вязкость:

$$\nu_{см} = \frac{\mu_{см}}{\rho_{см}} = \frac{18,2 \cdot 10^{-5}}{1035} = 0,18 \cdot 10^{-6}$$



Задача 4.

- Вычислить динамический коэффициент вязкости суспензии бензидина в воде, если в чан загружено на 10 м^3 воды 1 т бензидина. Температура суспензии 20°C относительная плотность твердой фазы 1,2.



Решение.

1. Объем твердой фазы:

$$V = \frac{m}{\rho} = \frac{1000}{1,2 \cdot 1000} = 0,833 \text{ м}^3$$

2. Объемная концентрация твердой фазы в суспензии:

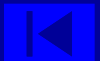
$$\varphi = \frac{0,833}{10 + 0,833} = 0,077 \text{ м}^3 / \text{м}^3$$

3. При 20°C динамический коэффициент вязкости воды равен 10^{-3} Па*с или 1 сП. Динамический коэффициент вязкости суспензии определяется по формуле:

$$\mu_c = \mu_{жс} (1 + 2,5\varphi) = 1(1 + 2,5 \cdot 0,077) = 1,19 \text{ сП} = 1,19 \cdot 10^{-3} \text{ Па} \cdot \text{с}$$

или

$$\mu_c = \mu_{жс} \frac{0,59}{(0,77 - \varphi)^2} = \frac{1 \cdot 0,59}{(0,77 - 0,077)^2} = 1,23 \text{ сП} = 1,23 \cdot 10^{-3} \text{ Па} \cdot \text{с}$$



ЭЛЕМЕНТЫ ГИДРОСТАТИКИ

- Гидростатическое давление
 - Атмосферное давление
- Дифференциальные уравнения равновесия Эйлера
- Равновесие тела в покоящейся жидкости
 - Давление на плоскую стенку
 - Давление на криволинейную стенку
 - Практические задачи





Не для конспекта

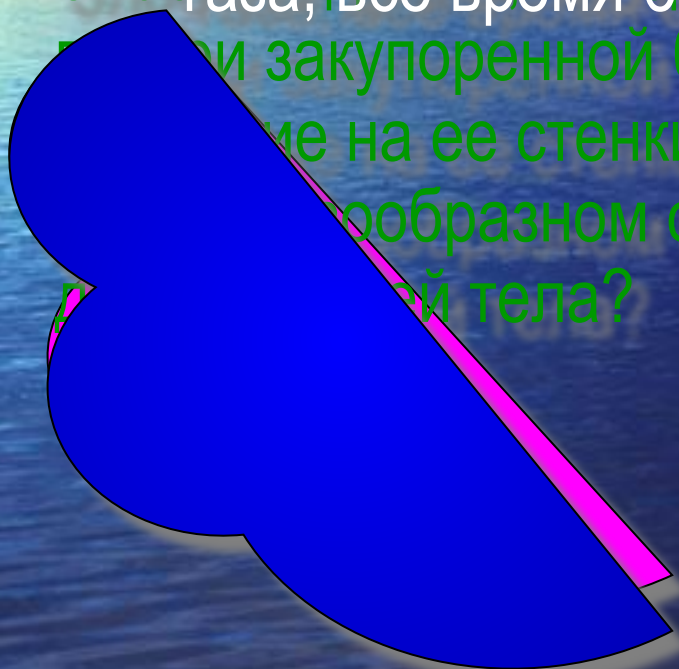
Ответ. Злобный джинн, находящийся в газообразном состоянии внутри бутылки, весь состоит из маленьких злобных молекул, которые, как и молекулы любого другого

газа, все время беспорядочно движутся. Ими джинн и лупит во все стороны!

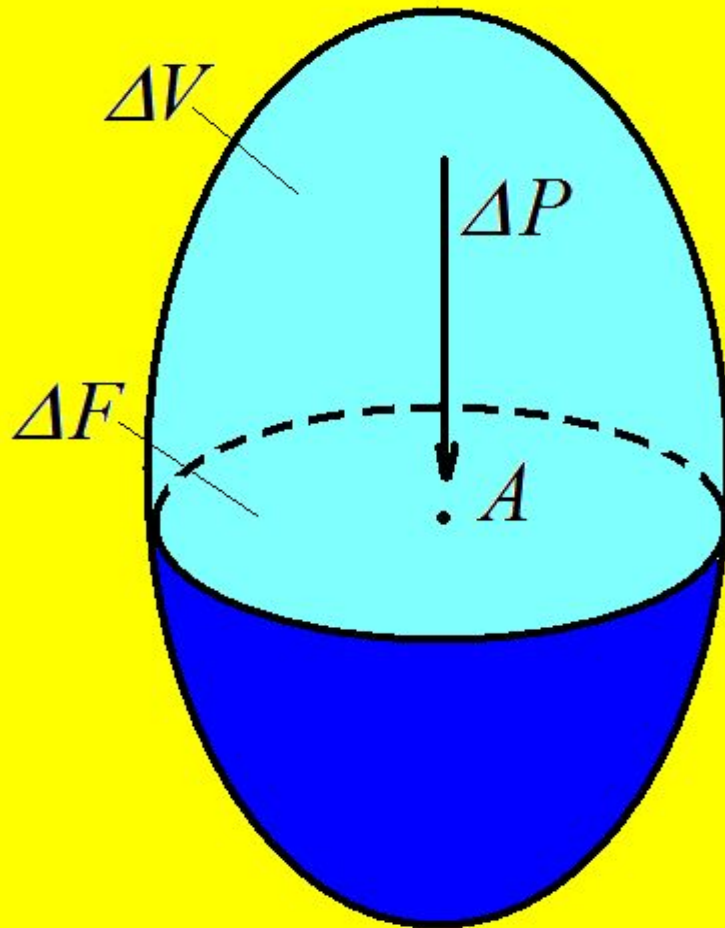
Злобный джинн, находящийся в газообразном состоянии внутри закупоренной бутылки, оказывает сильное давление на ее стенки, дно и пробку. Чем давит джинн?

В газообразном состоянии не имеет ни рук, ни ног, ни другой тела?

Г.Остер



Гидростатическое давление

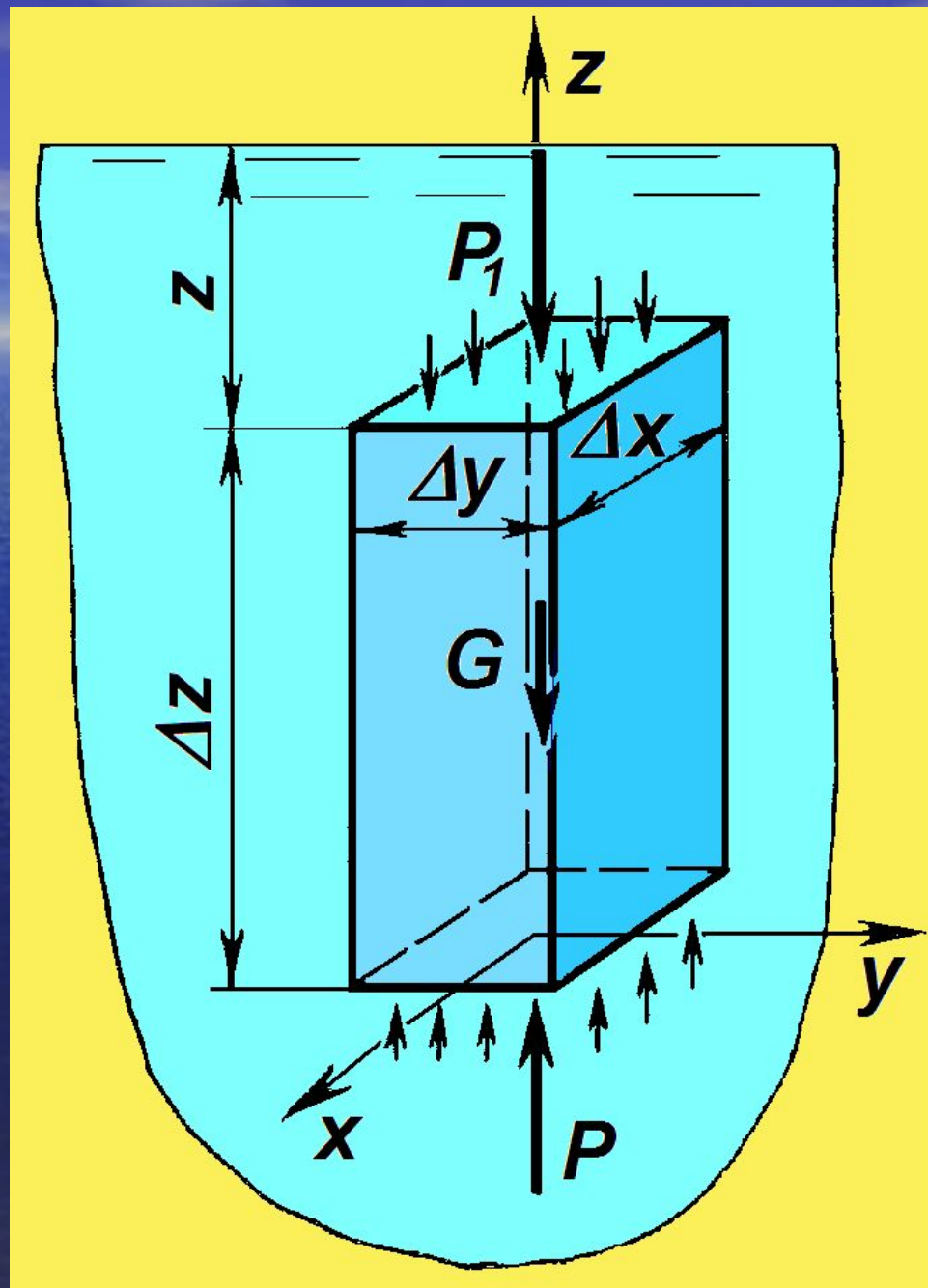


Среднее гидростатическое
давление

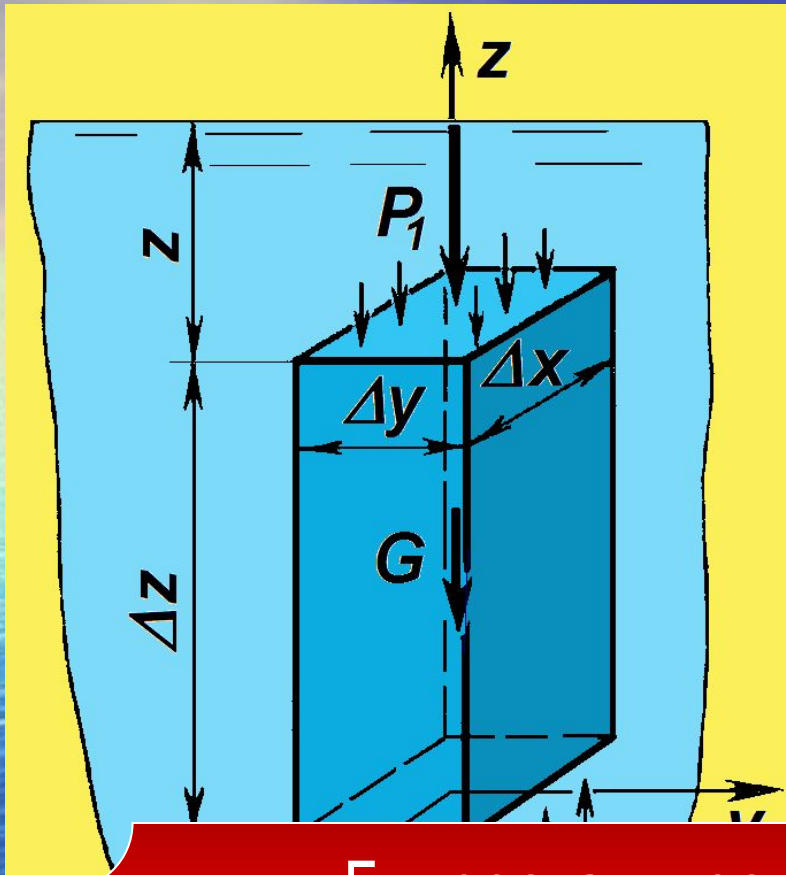
$$p_{cp} = \frac{\Delta P}{\Delta F}$$

$$p_A = \lim_{\Delta F \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta P}{\Delta F} \right|$$

Гидростатическое давление



Гидростатическое давление



Очевидно, равнодействующая
всех

сил, направленных вертикально,
будет равна нулю, так как тело
находится в равновесии.

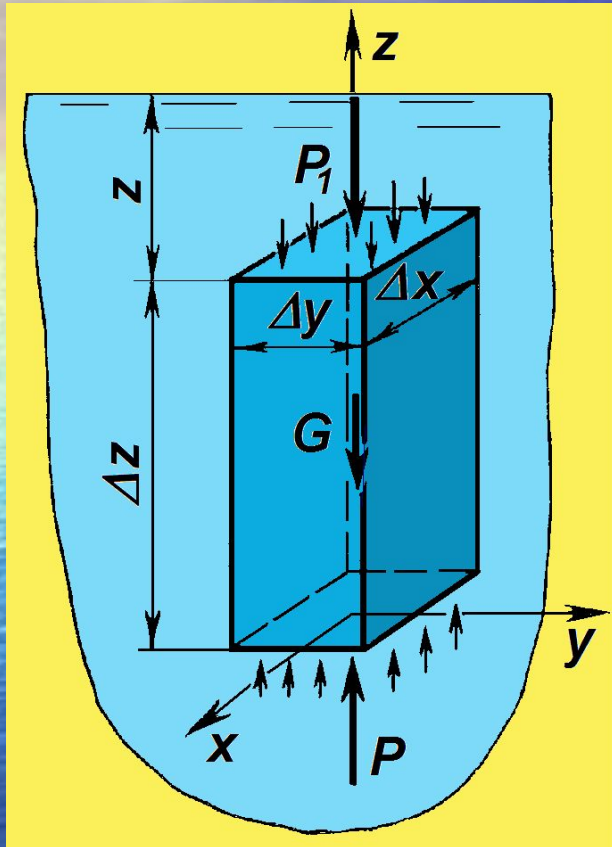
$$P - P_1 - G = 0$$

$$p\Delta x\Delta y - p_1\Delta x\Delta y - \rho g\Delta z\Delta x\Delta y = 0$$

$$p = p_1 + \rho g\Delta z$$

Гидростатическое давление в жидкости
пропорционально высоте ее слоя
и на одинаковой глубине
имеет одну и ту же величину во всех точках жидкости.

Гидростатическое давление



Если верхнее основание
выделенного объема совпадает с
поверхностью жидкости, то

$$p = p_0 + \rho g \Delta z$$

$$\Delta A = P - P_1 = G = \rho g \Delta x \Delta y \Delta z = \rho g \Delta V$$

выталкивающая сила равна весу
жидкости в объеме выделенного
фрагмента.

Гидростатическое давление

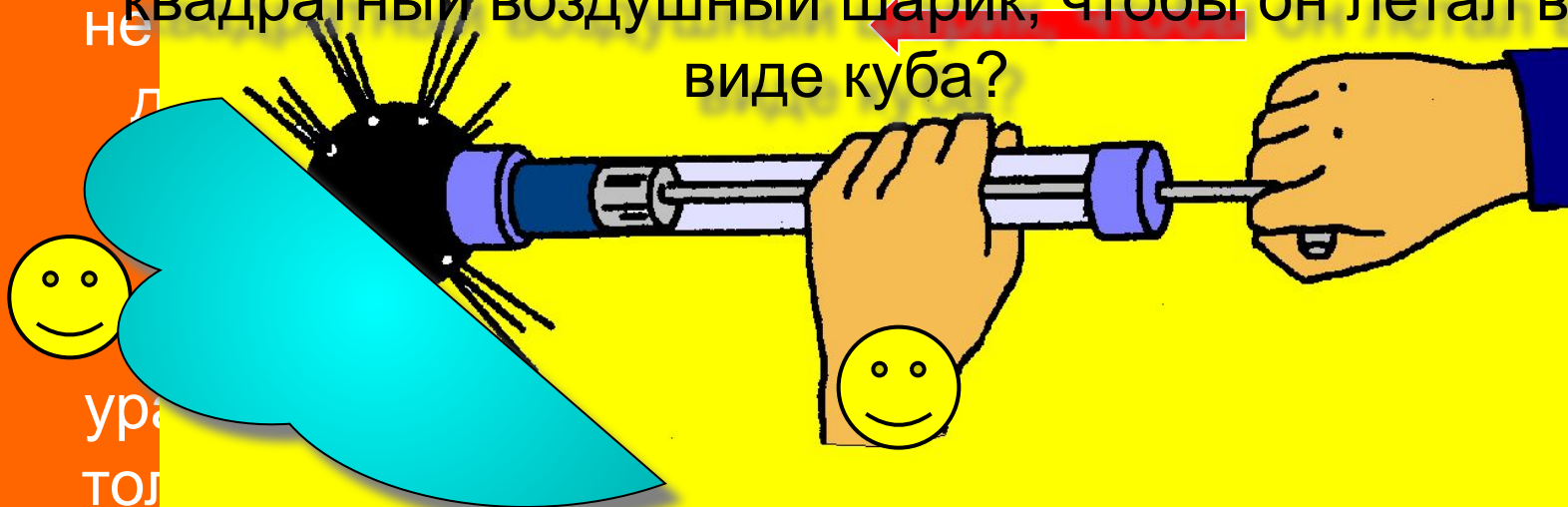
Гидростатическое давление

В замкнутом сосуде давление, производимое
внешними силами на жидкость или газ,
передается без изменения по всем
направлениям
в каждую точку жидкости или газа.

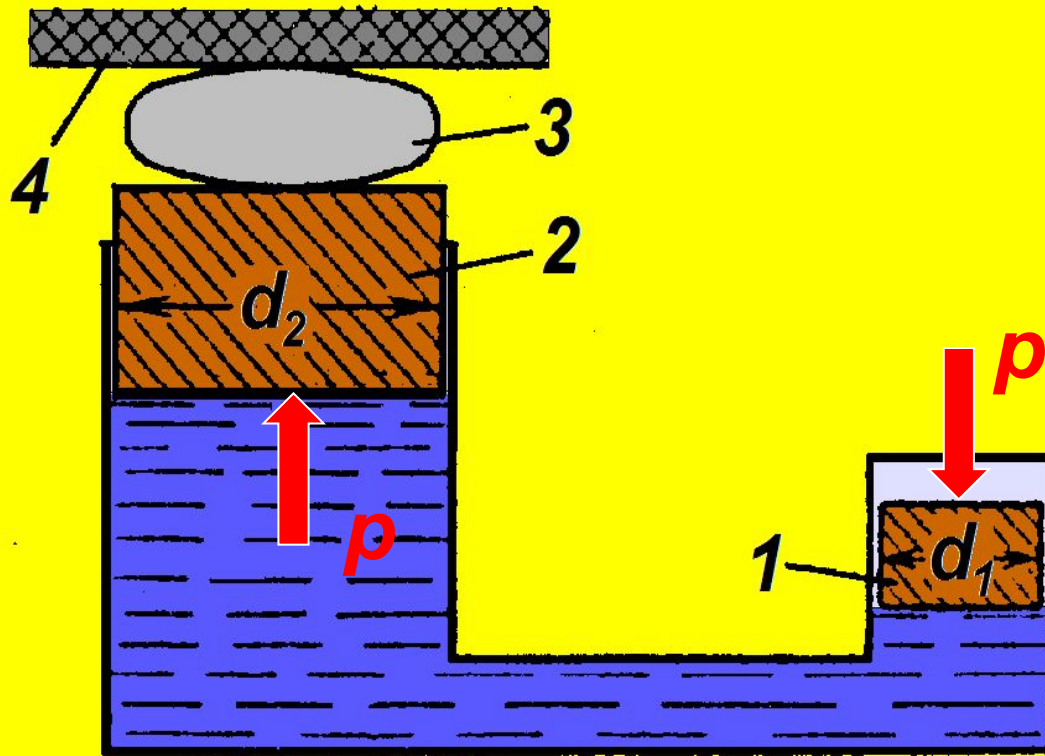
(закон Паскаля)

не зависит от направления.

Почему еще никому не удалось надуть квадратный воздушный шарик, чтобы он летал в виде куба?



Гидростатическое давление



$$P_1 = p \frac{\pi d_1^2}{4}$$

$$P_2 = p \frac{\pi d_2^2}{4}$$

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{d_2^2}{d_1^2}$$



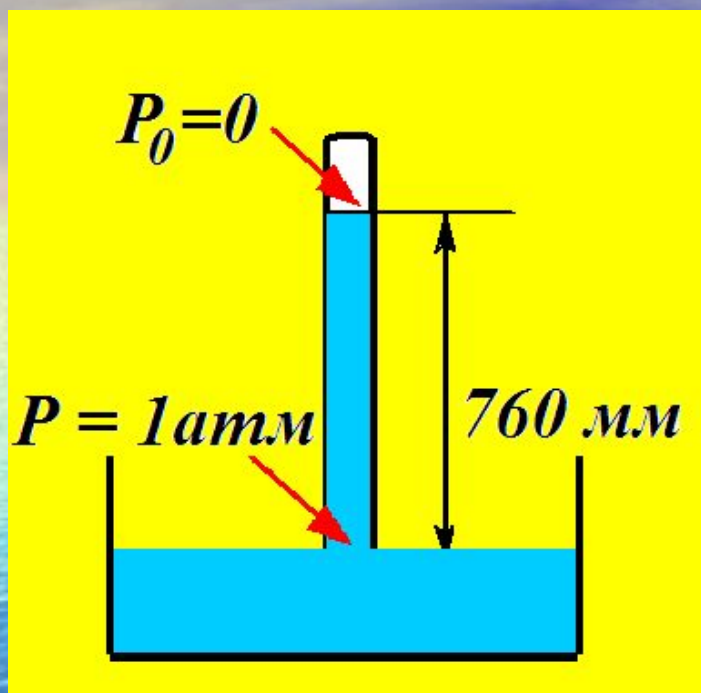
Атмосферное давление

Атмосферное давление - это сила, действующая со стороны воздушной атмосферы на единицу площади поверхности Земли в перпендикулярном к поверхности направлении. Среднюю величину атмосферного давления можно получить, если разделить вес всех молекул воздуха на площадь поверхности Земли.

$$P_{атм} = \frac{\text{вес молекул воздуха}}{\text{площадь поверхности Земли}}$$

$$P_{атм} = 101325 \text{ Па} = 101325 \frac{\text{Н}}{\text{м}^2} = 760 \text{ мм рт.ст.}$$

Атмосферное давление



При изменении атмосферного давления изменяется высота жидкости в трубке. Это позволяет использовать такую трубку в качестве прибора для измерения давления – **ртутного барометра**

$$p = p_0 + \rho g H \quad H = \frac{p - p_0}{\rho g} \quad \text{Если } p_0 = 0: \quad H = \frac{p}{\rho g}$$

Для воды:

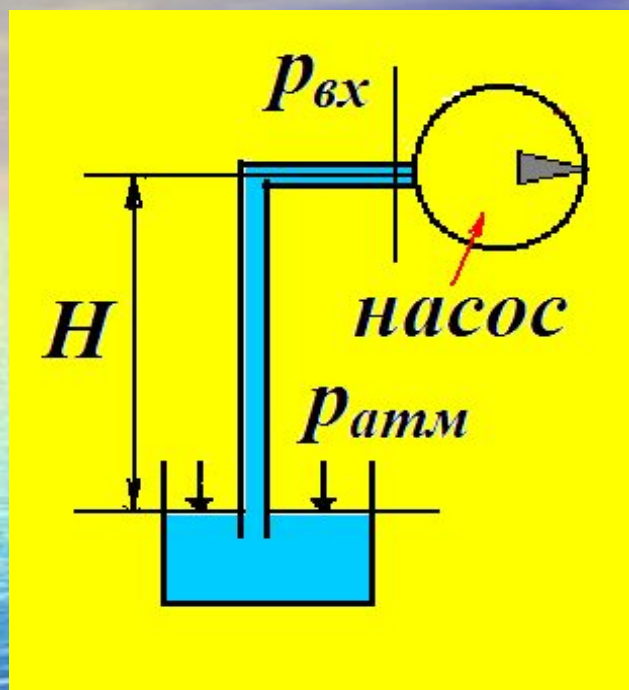
$$H = \frac{101325}{1000 \cdot 9,8} = 10,34 \text{ м}$$

Атмосферное давление

Можно ли, пользуясь поршневым насосом, через шланг накачать воду из лужи во дворе в большую химическую аудиторию, которая находится на третьем этаже института на высоте примерно 15 м?



Атмосферное давление



Атмосферное давление не только должно поднять воду к насосу

на высоту H , но и создать разрежение жидкости и преодолеть сопротивление трения. На практике

глубина всасывания насоса не превышает 5-6м

Торичелли: *не насос вытягивает воду, а атмосферное давление её поднимает вверх*, когда на всасывающей линии

насоса образуется разреженное пространство ($p_{вх} < p_{атм}$)

Из лекции доц. Раинкиной Л.Н.

Давление абсолютное, избыточное и разрежение (вакуум).

$$p = \gamma H = \rho g H$$

Абсолютное давление:

$$P_{абс} = P_{ман} + P_{атм}$$

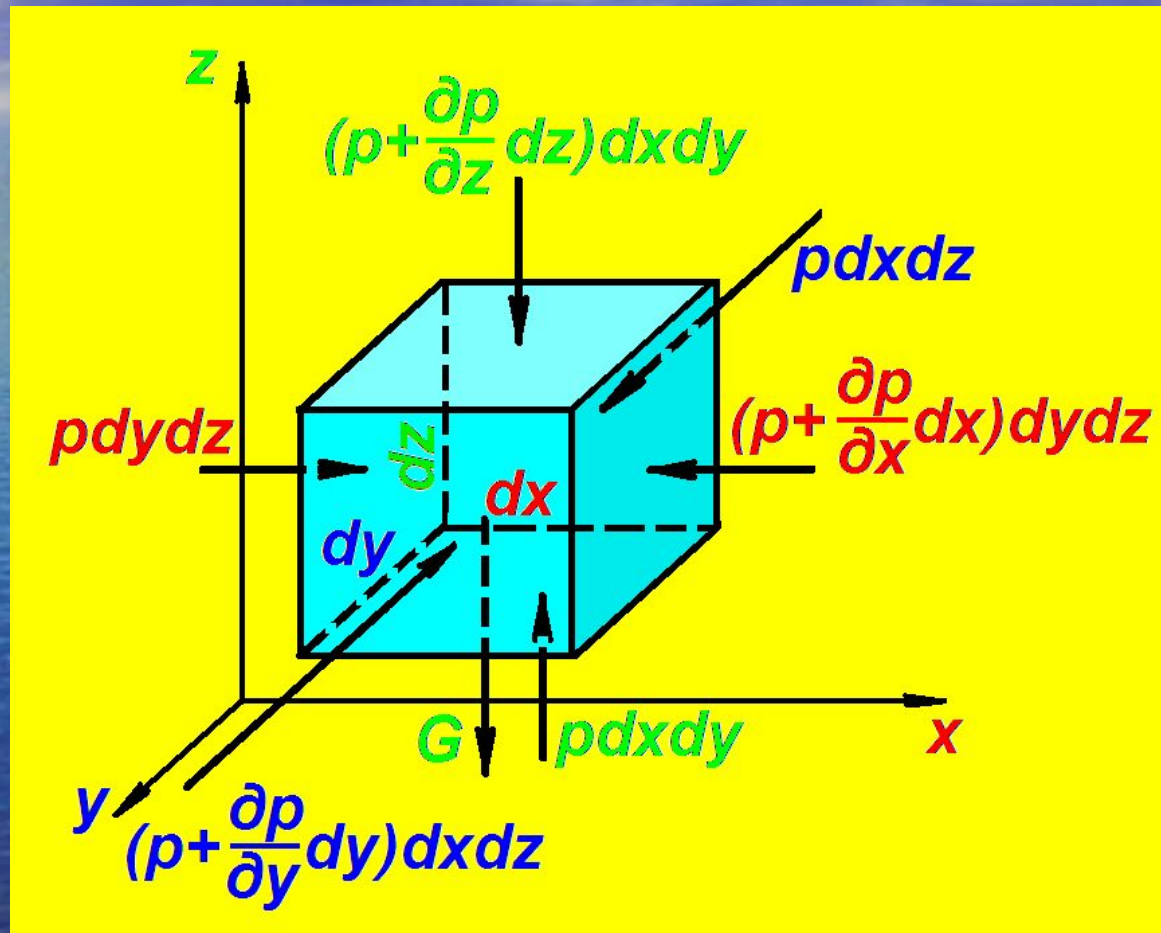
[атм] [ати] [атм]

Вакуум (разрежение)

$$P_{вак} = P_{атм} - P_{абс}$$

давлением. Эту разность называют **избыточным** давлением [ати].

Дифференциальные уравнения равновесия Эйлера

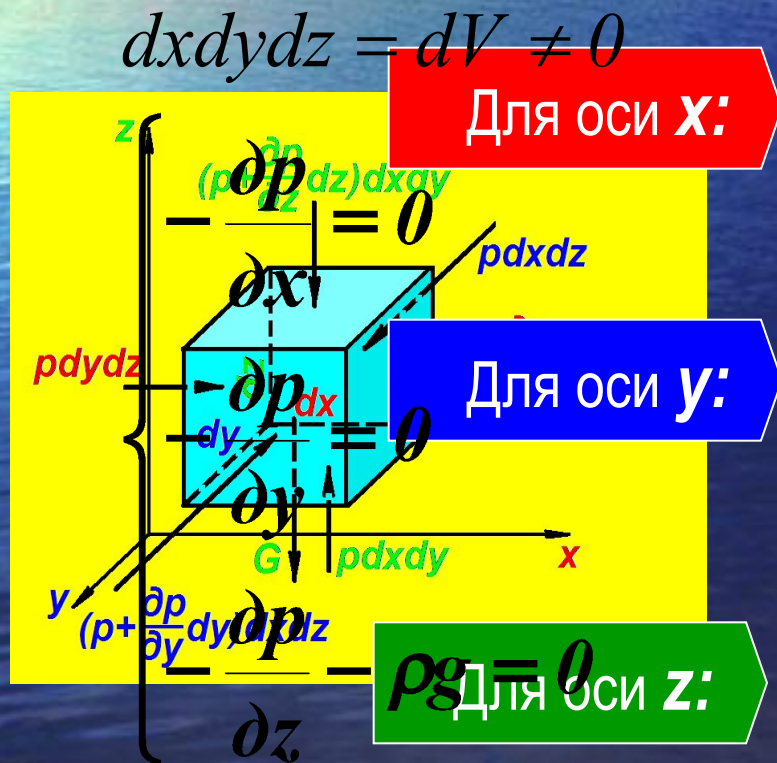


$$G = g dm = g \rho dV = \rho g dx dy dz$$



Дифференциальные уравнения равновесия Эйлера

Элементарный объем dV будет находиться в равновесии, если сумма проекций действующих сил на каждую ось координат равна нулю.

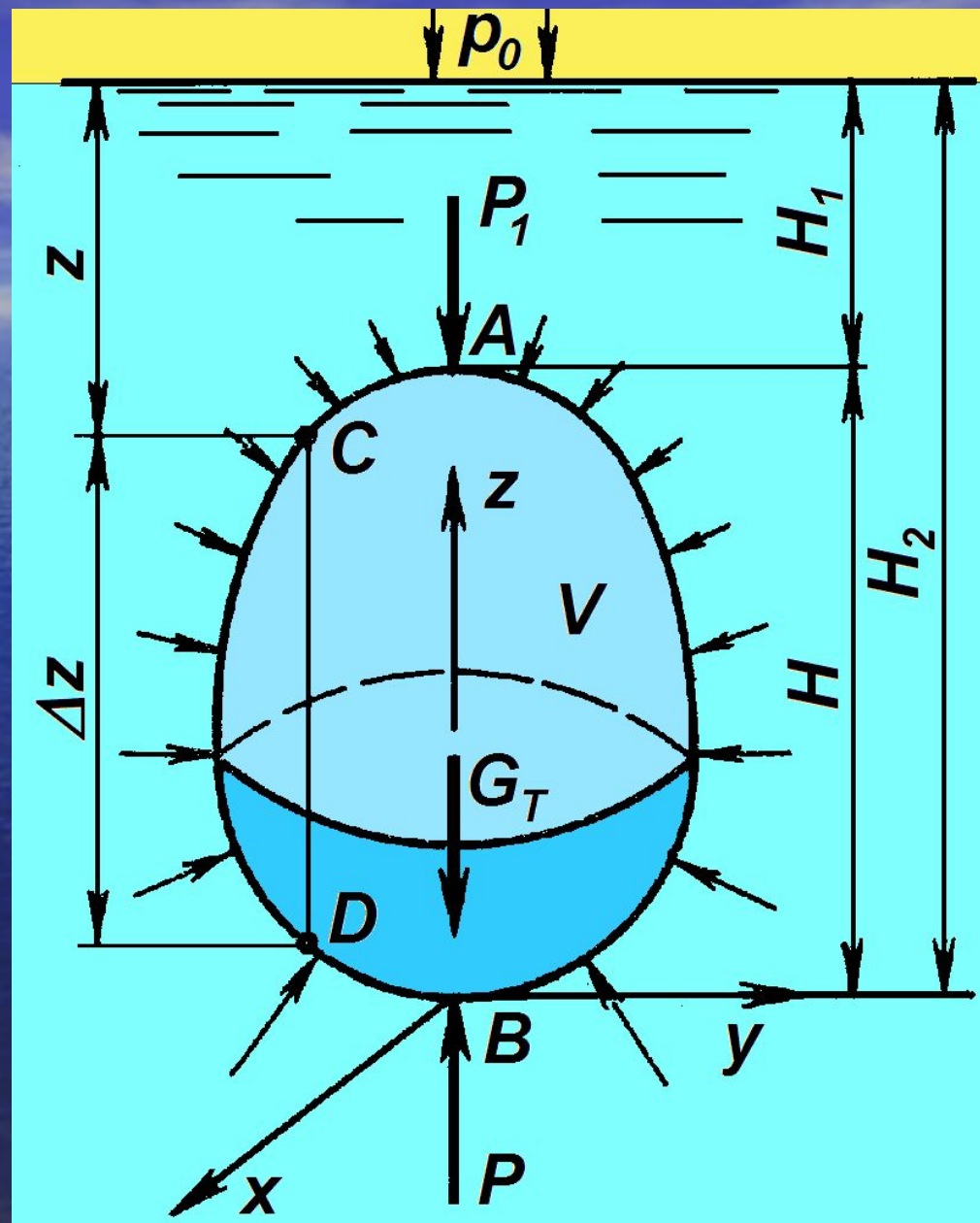


$$p dy dz - \left(p + \frac{\partial p}{\partial x} dx \right) dy dz + \left(p - \frac{\partial p}{\partial x} dx \right) dy dz - \left(p + \frac{\partial p}{\partial x} dx \right) dy dz + \left(p - \frac{\partial p}{\partial x} dx \right) dy dz = 0$$

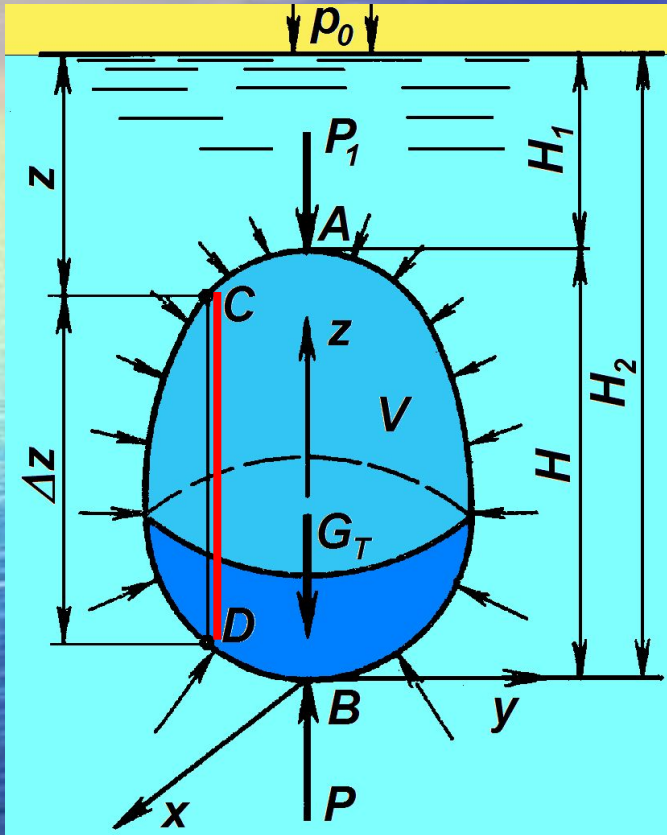
$$p dx dz - \left(p + \frac{\partial p}{\partial y} dy \right) dx dz + \left(p - \frac{\partial p}{\partial y} dy \right) dx dz - \left(p + \frac{\partial p}{\partial y} dy \right) dx dz + \left(p - \frac{\partial p}{\partial y} dy \right) dx dz = 0$$

$$p dx dy - \left(p + \frac{\partial p}{\partial z} dz \right) dx dy + \left(p - \frac{\partial p}{\partial z} dz \right) dx dy - \left(p + \frac{\partial p}{\partial z} dz \right) dx dy + \left(p - \frac{\partial p}{\partial z} dz \right) dx dy - \rho g dx dy dz = 0$$

Равновесие тела в покоящейся жидкости



Равновесие тела в покоящейся жидкости



$$p_C = p_0 + \rho g z$$

$$P_C = (p_0 + \rho g z) \Delta F$$

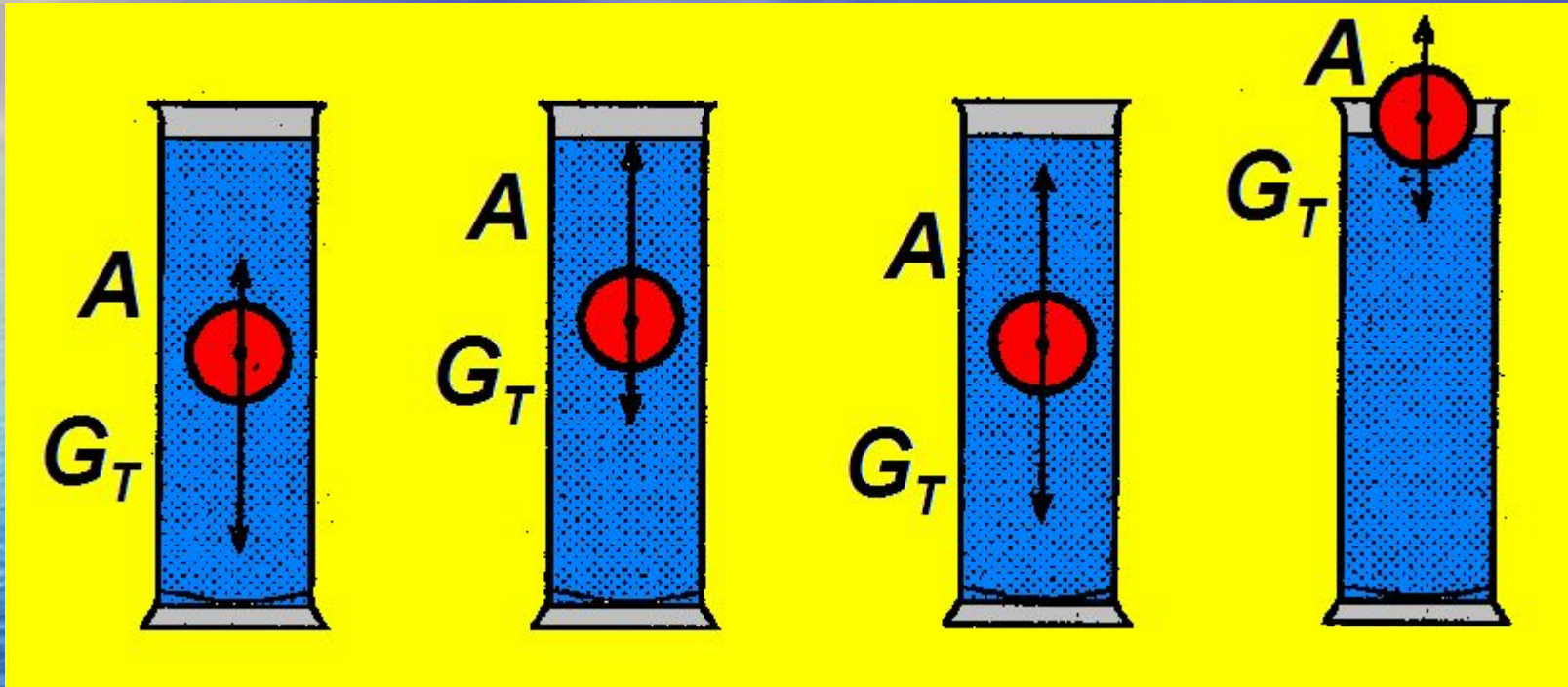
$$A = \sum \Delta A = \sum \rho g \Delta V = \rho g \sum \Delta V = \rho g V$$

$$P_D = [p_0 + \rho g(z + \Delta z)] \Delta F$$

**вертикальная составляющая
гидростатического давления
жидкости на погруженное тело
направлена вверх и равна весу
жидкости в объеме тела.**

Направленная вверх сила называется подъемной (архимедовой), а полученный выше результат иллюстрирует **закон Архимеда**.

Условие плавания тел



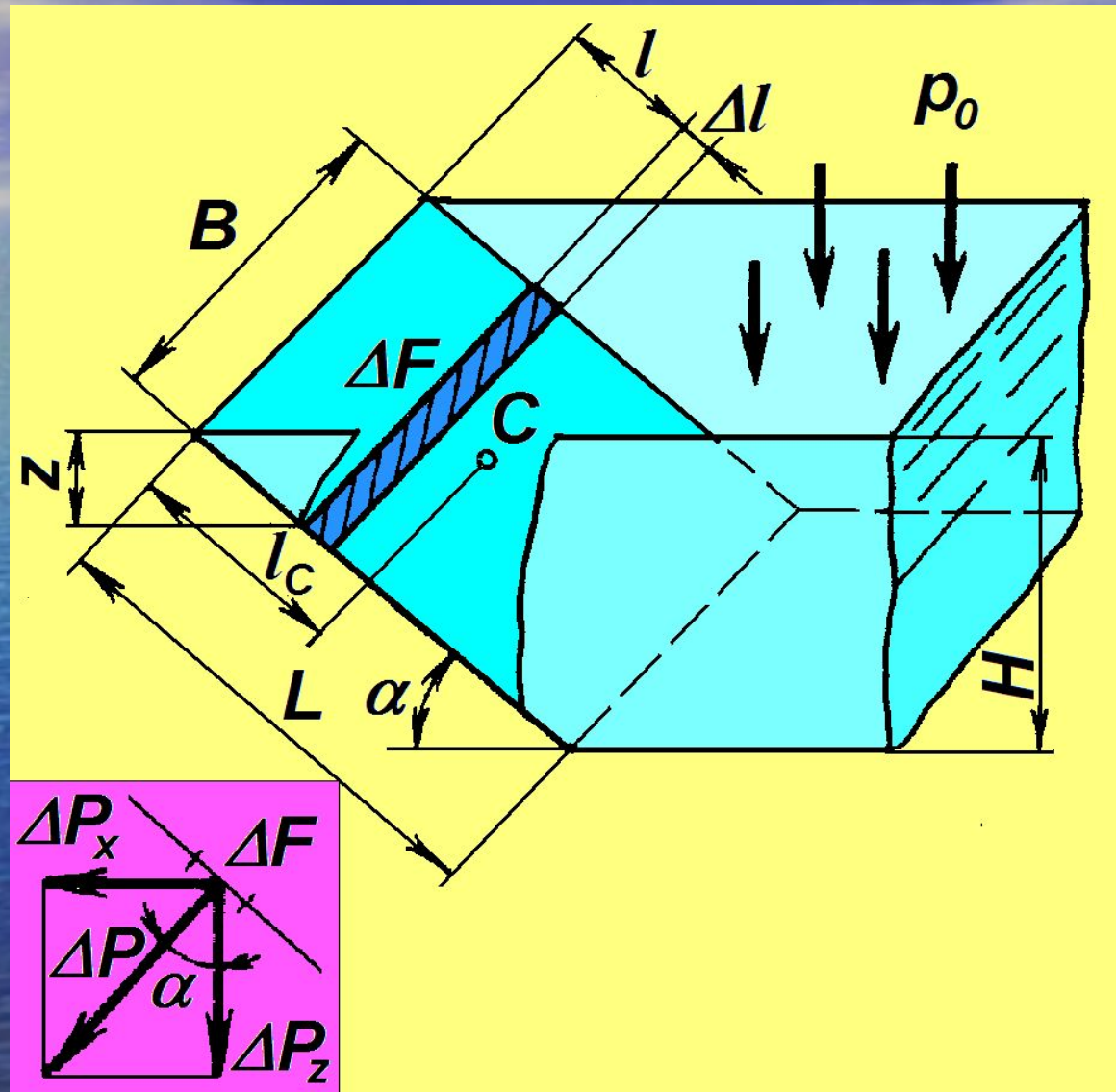
Если $A < G_T$

Если $A > G_T$

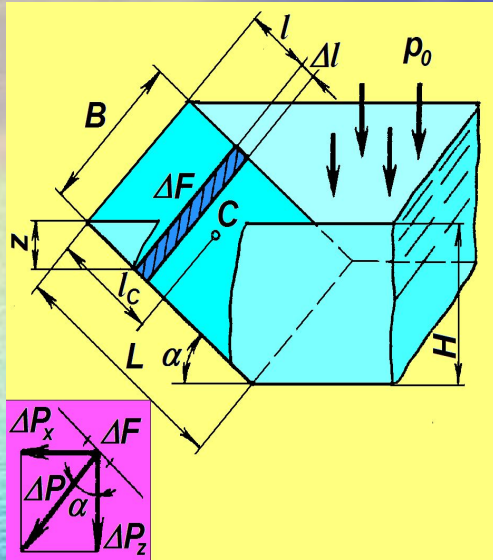
Если A равна G_T , то тело находится в состоянии безразличного равновесия



Давление на плоскую стенку



Давление на плоскую стенку



$$\Delta P = p \Delta F = (p_0 + \rho g z) \Delta F$$

$$P = \sum \Delta P = \sum (p_0 + \rho g z) \Delta F = p_0 \sum \Delta F + \rho g \sum z \Delta F$$

$$\sum \Delta F = F \quad \sum z \Delta F = \sum l \sin \alpha \Delta F = \sin \alpha \sum l \Delta F$$

*статический момент площади стенки
относительно прямой пересечения
поверхности жидкости со стенкой*

$$\sum l \Delta F = F l_C$$

$$F = BL$$

$$\Delta F = B \Delta l$$

$$p = p_0 + \rho g z$$

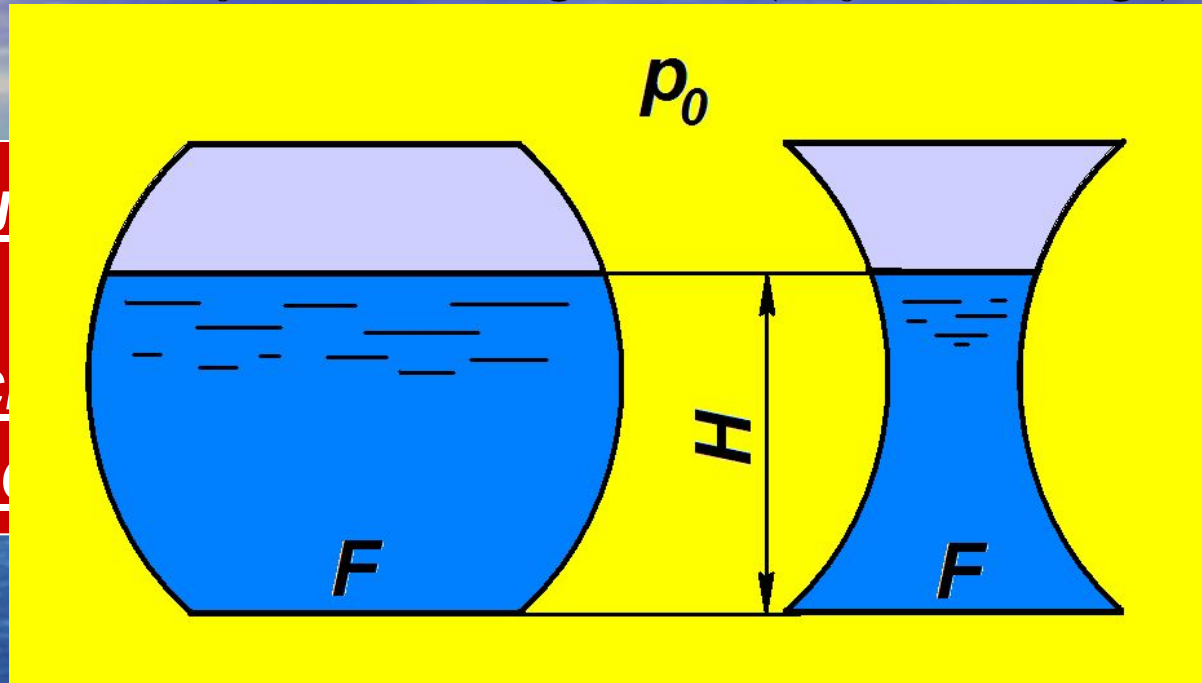
$$\sum z \Delta F = F l_C \sin \alpha = F z_C$$

l_C - расстояние до центра тяжести
стенки, замеренное в плоскости стенки

z_C - глубина погружения
центра тяжести стенки.

Давление на плоскую стенку

$$P = p_0 F + \rho g z_c F = (p_0 + \rho g z_c) F$$



Сила давления жидкости на дно сосуда не зависит от формы или объема сосуда, а только от площади дна и высоты уровня жидкости в сосуде.

Центр давления

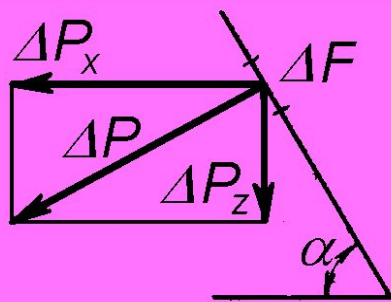
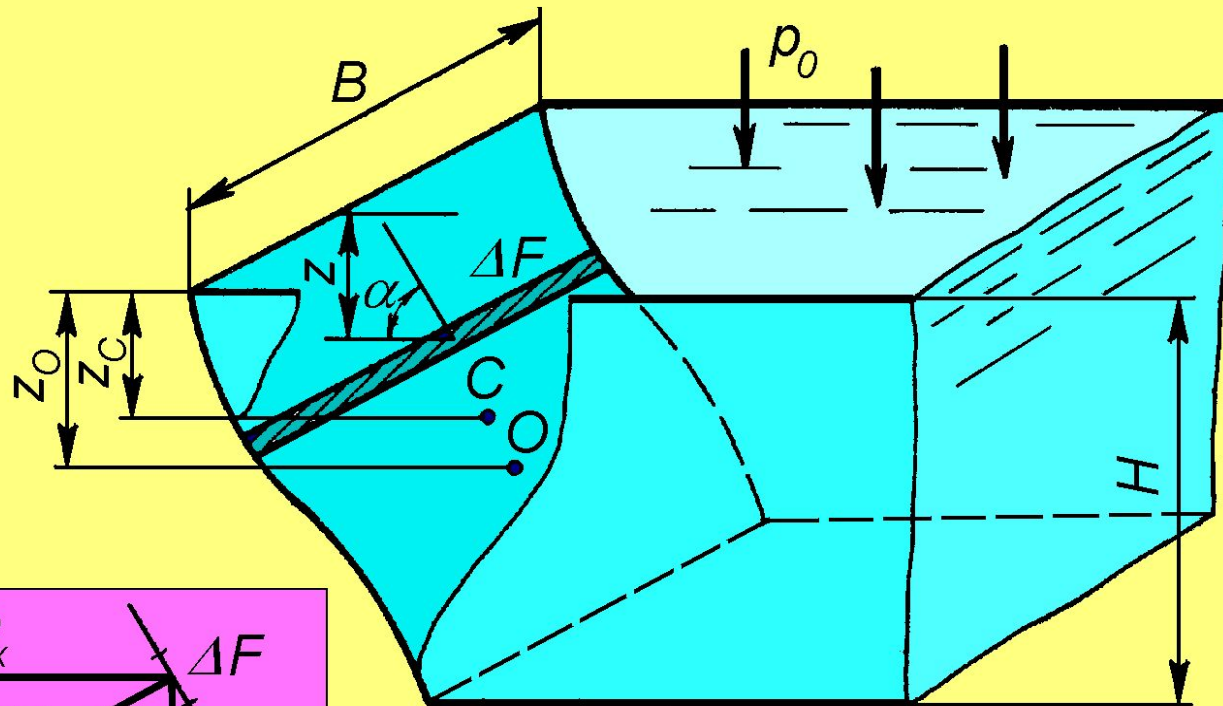
Точка приложения равнодействующей R сил давления жидкости на стенку называется центром давления

Для стенок с вертикальной осью симметрии центр давления лежит на этой оси.

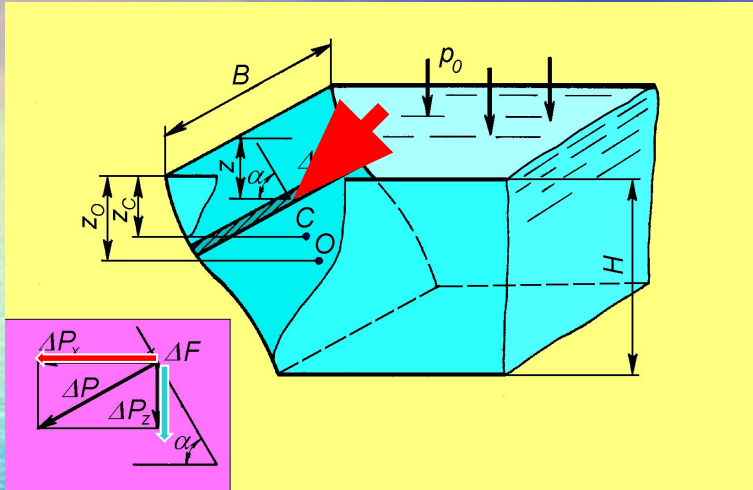
Центр давления расположен всегда глубже, чем центр тяжести стенки.

В частности, для вертикальной прямоугольной стенки центр давления расположен на расстоянии $2/3 H$ от верхнего уровня жидкости.

Давление на криволинейную стенку



Давление на криволинейную стенку



Проекции силы давления на
оси x и z

$$\Delta P_x = \Delta P \sin \alpha = (p_0 + \rho g z) \Delta F \sin \alpha$$

$$\Delta P_z = \Delta P \cos \alpha = (p_0 + \rho g z) \Delta F \cos \alpha$$

Горизонтальная составляющая
силы давления на стенку

$$P_x = \sum \Delta P_x = \sum (p_0 + \rho g z) \Delta F \sin \alpha =$$

$$= p_0 \sum \Delta F_z + \rho g \sum z \Delta F_z$$

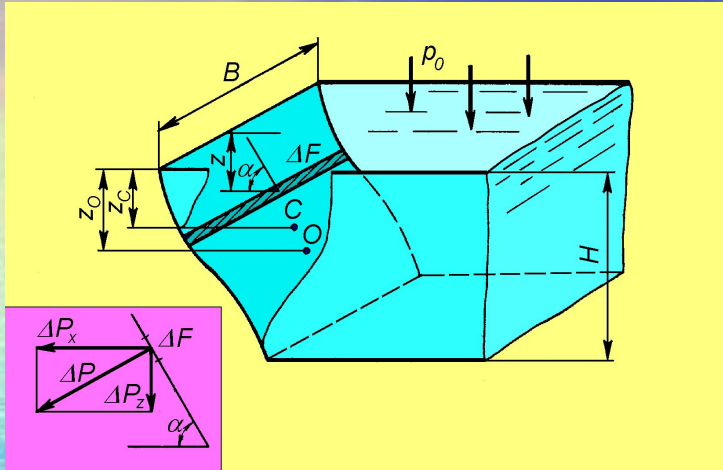
Сила давления ΔP
на элементарную
полоску будет равна

$$\Delta P = p \Delta F = (p_0 + \rho g z) \Delta F$$

- стати
пря

- давление на глубине
погружения центра тяжести
вертикальной проекции стенки

Давление на криволинейную стенку



Проекции силы давления на
оси x и z

$$\Delta P_x = \Delta P \sin \alpha = (p_0 + \rho g z) \Delta F \sin \alpha$$

$$\Delta P_z = \Delta P \cos \alpha = (p_0 + \rho g z) \Delta F \cos \alpha$$

Вертикальная составляющая
силы давления на стенку

$$P_z = p_0 \sum \Delta F_x + \rho g \sum z \Delta F_x$$

Сила давления ΔP
на элементарную
полоску будет равна

$$\Delta P = p \Delta F = (p_0 + \rho g z) \Delta F$$

— про
поверхн

Сила гидростатического
давления на стенку

$$P = \sqrt{P_x^2 + P_z^2}$$

Практические задачи



Задача 5.

- Цилиндрический сосуд диаметром 20 см наполнен водой до верха. Определить высоту цилиндра, если сила давления на дно и боковые стенки цилиндра одинакова.



Решение

- Давление на дно цилиндра одинаково во всех точках и равно

$$p_{\text{дн}} = p_0 + \rho g H$$

- Давление на стенки цилиндра линейно увеличивается с глубиной

$$p_{\text{бок}} = p_0 + \rho g x$$

- Значит сила давления на всю боковую поверхность цилиндра равна среднему давлению $p_{\text{ср}}$, т.е. давлению на глубине $H/2$, умноженному на площадь боковой поверхности:

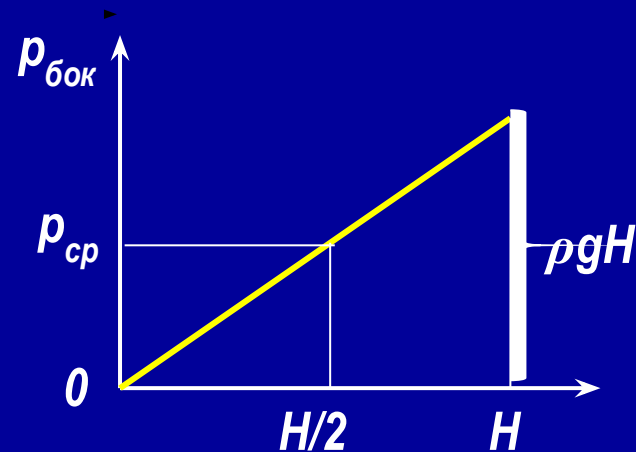
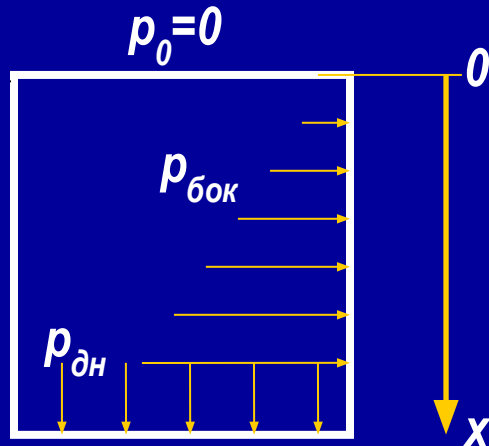
$$P_{\text{бок}} = \frac{1}{2} \rho g H \cdot H \pi D$$

- Сила давления на дно цилиндра равна

$$P_{\text{дн}} = p_{\text{дн}} \cdot F_{\text{дн}} = \rho g H \cdot \frac{\pi D^2}{4}$$

- Из условия равенства сил давления получаем:

$$\frac{1}{2} H = \frac{D}{4}, \text{ откуда } H = \frac{D}{2} = 10 \text{ см}$$



Задача 6.

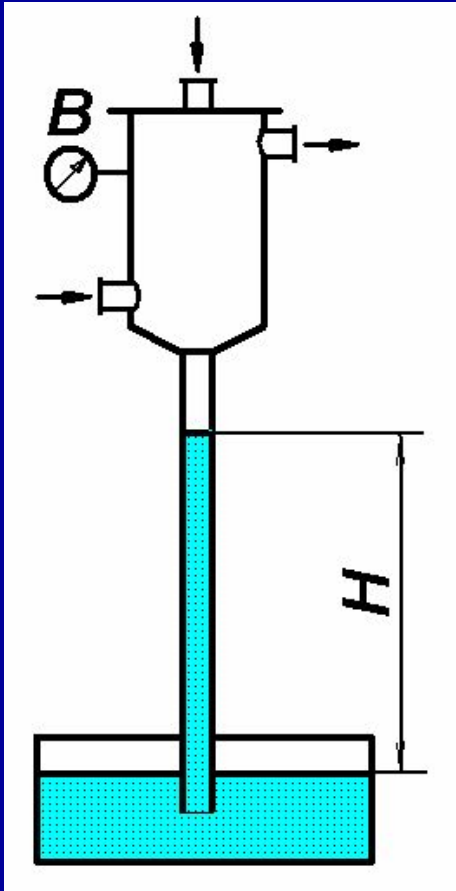
*Вакуумметр на барометрическом конденсаторе
показывает вакуум, равный 600 мм рт.ст.
Атмосферное давление 748 мм рт.ст.*

Определить:

- а) абсолютное давление в конденсаторе в Па и в кгс/см²;*
- б) на какую высоту H поднимается вода в
барометрической трубе?*



Решение



- Абсолютное давление в конденсаторе:

$$p = 748 - 600 = 148 \text{ ммрт.ст.} =$$

$$= 148 \cdot 133,3 = 19700 \text{ Па}$$

$$p = \frac{19700}{9,81 \cdot 10^4} = 0,201 \text{ кгс/см}^2$$

- Высоту столба в барометрической трубе найдем из уравнения:

$$p_{\text{атм}} = p + \rho g H$$

- Откуда

$$H = \frac{p_{\text{атм}} - p}{\rho g} = \frac{600 \cdot 133,3}{1000 \cdot 9,81} = 8,16 \text{ м}$$

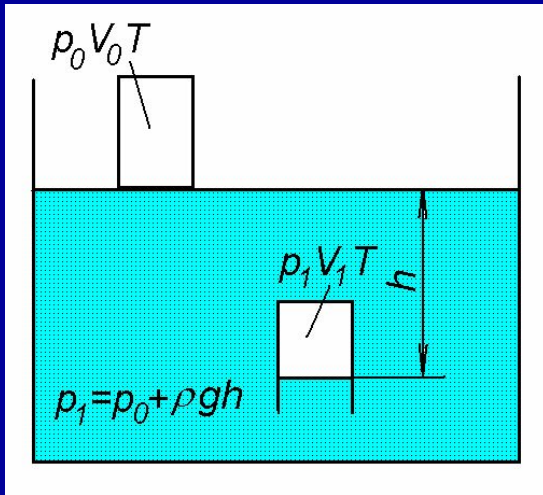


Задача 7.

- Тонкостенный цилиндрический сосуд массой 100г и объемом 300см^3 ставят вверх дном на поверхность воды и медленно опускают его вглубь таким образом, что он все время остается вертикальным. На какую минимальную глубину надо погрузить стакан, чтобы он не всплыл на поверхность? Атмосферное давление $p_0 = 10^5$ Па.



Решение



- Воздух в стакане до погружения описывается уравнением состояния Менделеева-Клапейрона:

$$p_0 V_0 = \frac{m}{M} RT$$

- После погружения: $p_1 V_1 = \frac{m}{M} RT$
- При этом по закону сохранения массы: $p_0 V_0 = p_1 V_1$
- Давление воды на глубине h : $p_1 = p_0 + \rho g h$

уравновешивается давлением воздуха в стакане.

- На стакан со стороны воды действует выталкивающая сила, равная весу стакана в условии равновесия:

$$A = G = mg = \rho_v g V_1$$

- Исходя из вышеперечисленных условий находим глубину h :

$$h = \frac{p_1 - p_0}{\rho_v g} = \frac{p_0 V_0 \rho}{m \rho g} - \frac{p_0}{\rho g} = \frac{10^5 \cdot 3 \cdot 10^{-4}}{0,1 \cdot 9,8} - \frac{10^5}{10^3 \cdot 9,8} \approx 30 - 10 = 20 \text{ м}$$

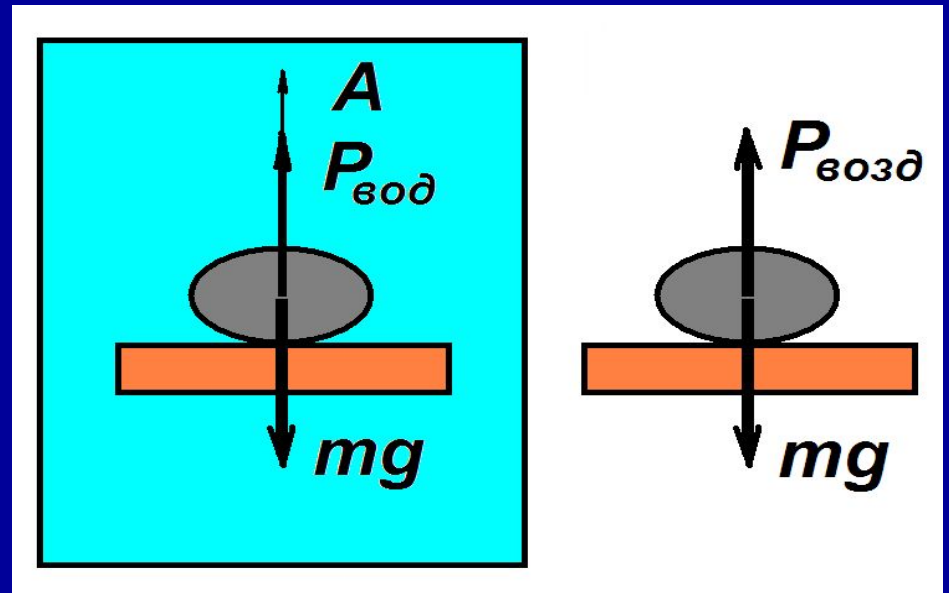


Задача 8.

- *Вес камня в воздухе 49Н. Найти вес этого камня в воде, если его плотность равна 2500 кг/м^3 , а плотность воды 1000 кг/м^3 .*



Решение



- Из условий равновесия сумма всех сил, действующих на камень, равна нулю: $A + P_{\text{вод}} - mg = 0$ $P_{\text{возд}} - mg = 0$
- Отсюда: $P_{\text{вод}} = P_{\text{возд}} - A$
- Выталкивающая сила:
$$A = \rho_{\text{в}} g V_{\text{к}} = \rho_{\text{в}} g \frac{P_{\text{возд}}}{g \rho_{\text{к}}} = \frac{\rho_{\text{в}} P_{\text{возд}}}{\rho_{\text{к}}}$$
- Вес камня в воде:
$$P_{\text{вод}} = P_{\text{возд}} \left(1 - \frac{\rho_{\text{в}}}{\rho_{\text{к}}} \right) = 49 \cdot \left(1 - \frac{1000}{2500} \right) = 29,4 \text{ Н}$$

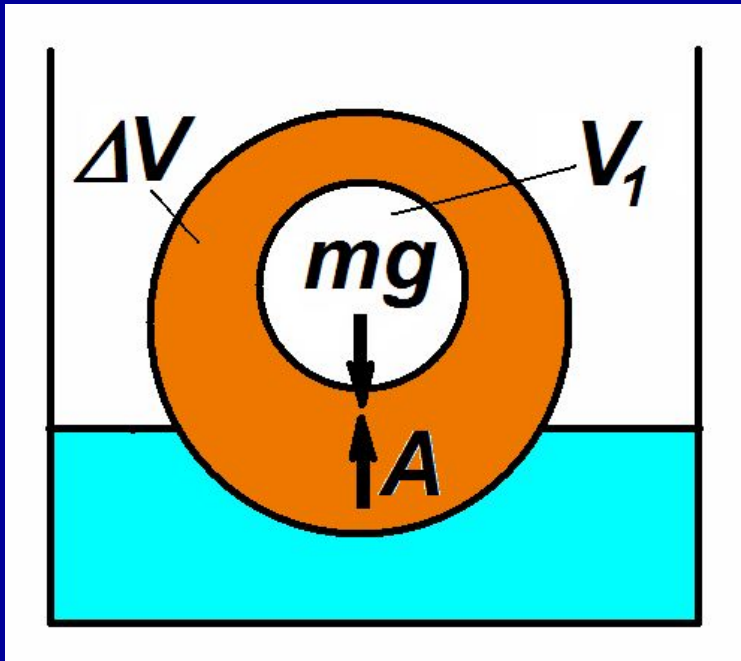


Задача 9.

- На поверхности воды плавает полый деревянный шар так, что в воду погружена $1/5$ часть его объема. Радиус шара 1 см. Плотность дерева 840 кг/м^3 . Найти объем полости в шаре.



Решение



- Из условия равновесия:

$$A = mg = \rho_v g V_{\text{погр}}$$

- Откуда масса шара:

$$m = \rho_v V_{\text{погр}} = \rho_v \frac{V}{5} = \rho_v \frac{4\pi r^3}{5 \cdot 3} =$$

$$= 10^3 \cdot \frac{4 \cdot 3,14 \cdot 10^{-6}}{15} = 8,4 \cdot 10^{-4} \text{ кг}$$

- Объем деревянной части шара:

$$\Delta V = \frac{m}{\rho_d} = \frac{8,4 \cdot 10^{-4}}{840} = 10^{-6} \text{ м}^3$$

- Объем полости:

$$V_1 = V - \Delta V = \frac{4}{3} \pi r^3 - \Delta V = \frac{4}{3} 3,14 \cdot 10^{-6} - 10^{-6} \approx$$

$$\approx 3 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3 = 3 \text{ см}^3$$

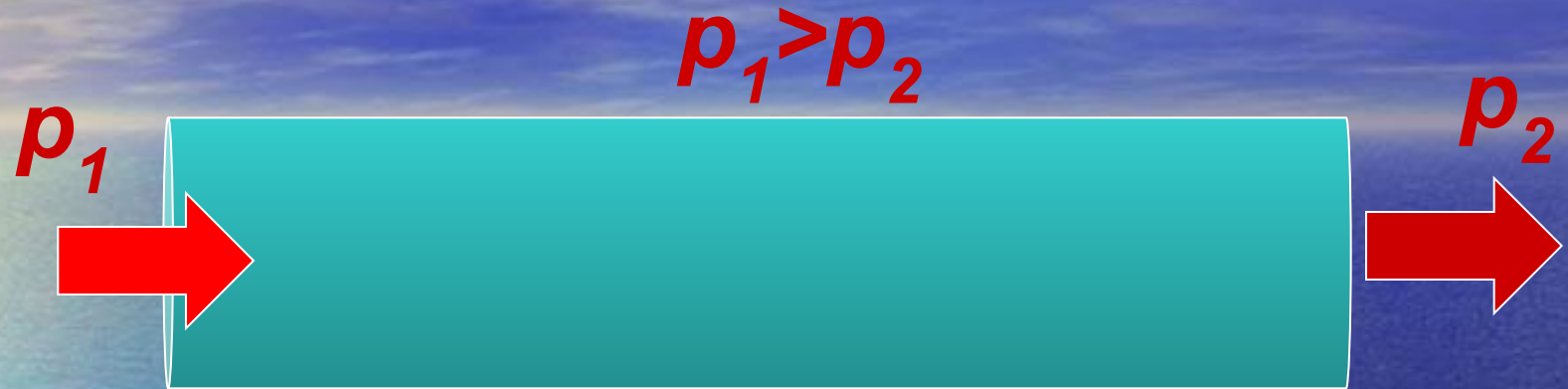


ЭЛЕМЕНТЫ ГИДРОДИНАМИКИ

- Основные характеристики движения жидкостей
 - Скорость и расход жидкости
 - Уравнение неразрывности потока
(Материальный баланс потока)
 - Уравнение Бернулли (Энергетический баланс потока)
 - Режимы движения жидкости
- Распределение скоростей по сечению потока при ламинарном и турбулентном режимах
 - Элементы теории подобия
- Некоторые практические приложения уравнения Бернулли
- Движение жидкости в напорных трубопроводах и их расчет
 - Практические задачи



Основные характеристики движения жидкостей

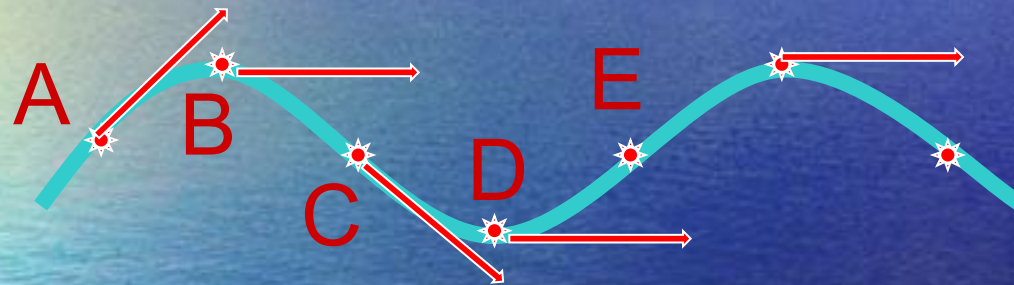


Если скорости и давления в различных точках пространства, заполненного движущейся жидкостью, не зависят от времени, то движение жидкости будет *установившимся*. В ряде случаев, когда давления и скорости жидкости могут изменяться со временем, мы имеем дело с *неустановившимся* движением



Основные характеристики движения жидкостей

Частица



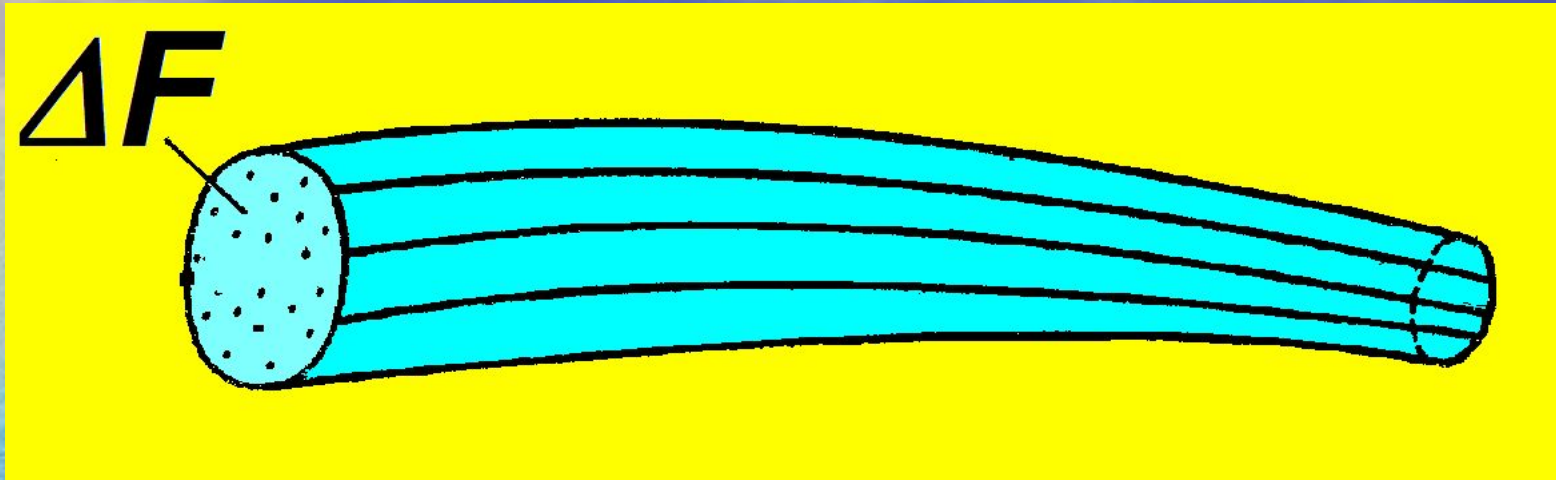
Траектория
движения
частицы

Скорости всех частиц жидкости,
находящихся в данный момент на
рассматриваемой линии тока,
касательны к ней.

Совокупность частиц
А, В, С, D, Е и др.,
находящихся в данный
момент на одной
траектории, образует
линию тока.

При установившемся движении траектория отдельной
частицы и линия тока будут совпадать.

Основные характеристики движения жидкостей



Трубка тока - совокупность линий тока, проведенных через площадку ΔF .

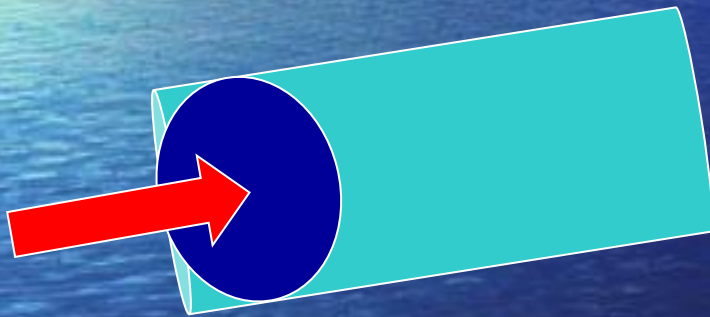
При $\Delta F \rightarrow 0$ трубка тока вырождается в линию тока.

При установившемся движении трубки тока остаются неизменными.

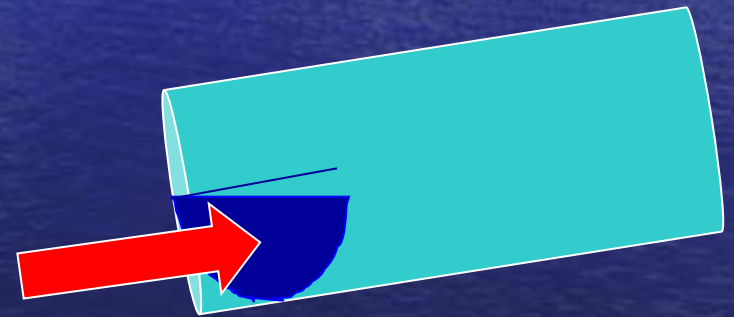
Основные характеристики движения жидкостей

Поток жидкости – совокупность элементарных струек, движущихся с разными скоростями

Живое сечение потока - сечение потока, проведенное перпендикулярно к направлению линий тока.



Напорное движение



Безнапорное движение

Смоченный периметр - часть периметра канала, соприкасающаяся с движущимся потоком.

Основные характеристики движения жидкостей

Гидравлический (эквивалентный) радиус - отношение площади живого сечения потока F к смоченному периметру Π

$$r_{\text{гидр}} = \frac{F}{\Pi}$$

Гидравлический (эквивалентный) диаметр:

$$d_{\text{гидр}} = 4r_{\text{гидр}} = \frac{4F}{\Pi}$$

Понятия гидравлических радиуса и диаметра позволяют использовать уравнения гидравлики для трубопроводов (каналов), имеющих некруглую форму поперечного сечения

Скорость и расход жидкости

Расход - количество жидкости, протекающее через живое сечение потока в единицу времени.

Массовый **m** и объемный **Q** расходы связаны соотношением

$$m = \rho Q$$

Если расход жидкости через поперечное сечение ΔF_i элементарной струйки составляет ΔQ , то средняя скорость жидкости в данном сечении w_i равна

$$w_i = \frac{\Delta Q}{\Delta F_i}$$

Общий расход потока

$$Q = \sum \Delta Q_i = \sum w_i \Delta F_i$$

Средняя скорость потока

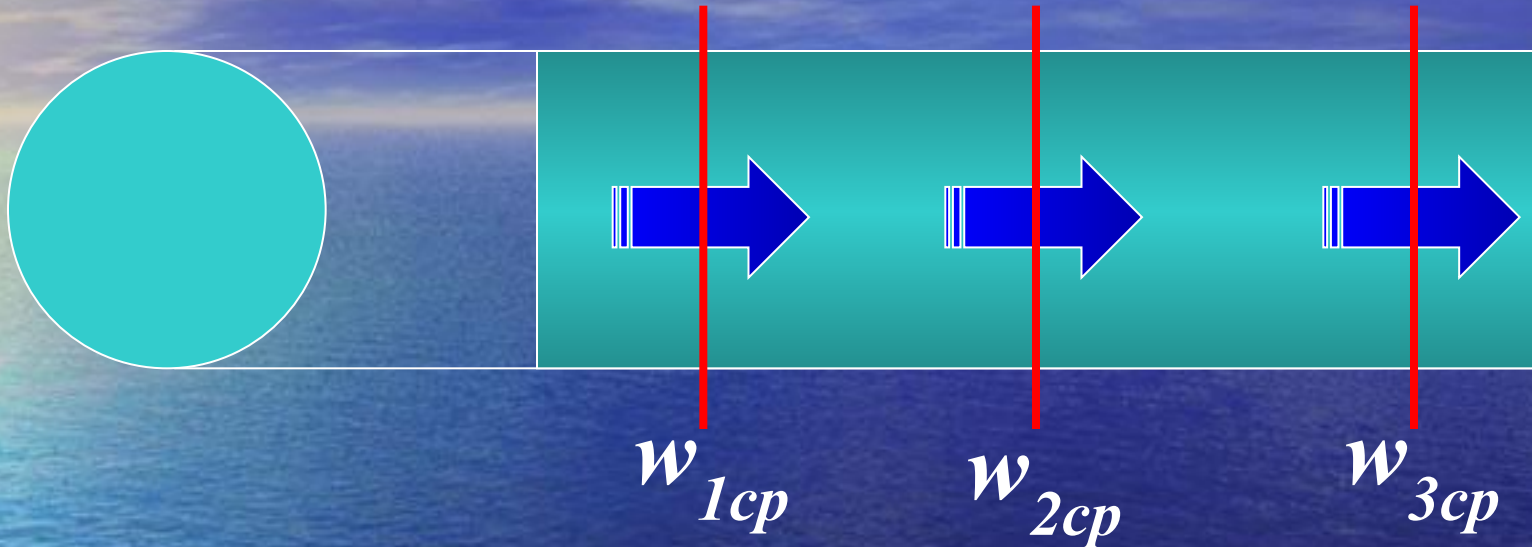
$$w_{cp} = \frac{Q}{F} = \frac{\sum w_i \Delta F_i}{\sum \Delta F_i} = \frac{\sum w_i \Delta F_i}{F}$$

Массовая скорость потока

$$W = \frac{m}{F} = w\rho, \quad \frac{\text{кг}}{\text{м}^2 \text{ с}}$$

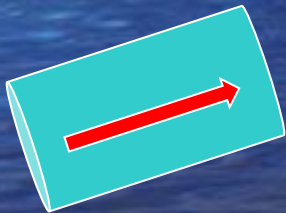


Скорость и расход жидкости

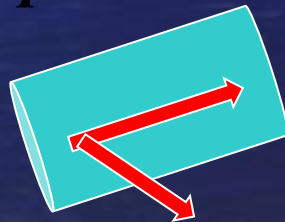


$w_{1cp} = w_{2cp} = w_{3cp} = \dots$ равномерное движение

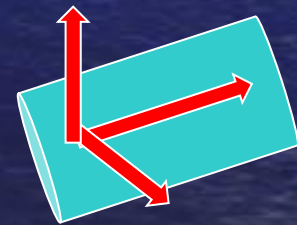
$w_{1cp} \neq w_{2cp} \neq w_{3cp} \neq \dots$ неравномерное движение



одномерное
(линейное)

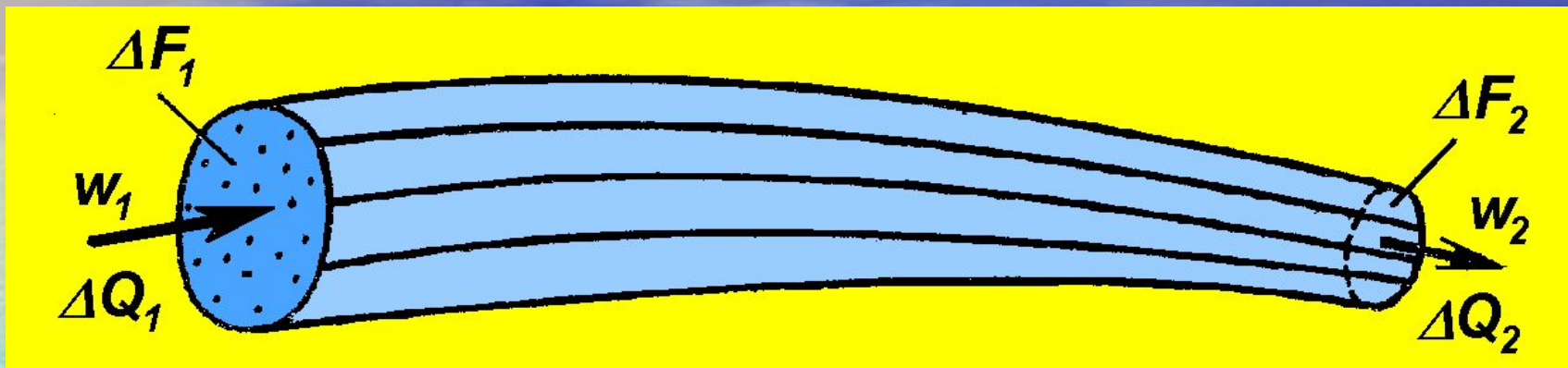


двумерное (плоское)



трехмерное
(пространственное)

Уравнение неразрывности потока (Материальный баланс потока)



$$\Delta Q_1 = w_1 \Delta F_1$$

$$\Delta Q_1 = \Delta Q_2$$

$$\Delta Q_2 = w_2 \Delta F_2$$

$$w_2 \Delta F_2 = w_1 \Delta F_1$$

$$\Delta Q_i = w_i \Delta F_i = \text{const}$$

$$Q = w_{cp} \Delta F = \text{const}$$

Уравнение
неразрывности
потока

$$w_{cp1} F_2 = w_{cp2} F_1$$

Уравнение Бернулли

Удельная энергия жидкости

ЭНЕРГИЯ ЖИДКОСТИ

Внутренняя

+

Потенциальная

+

Кинетическая

Кинетическая энергия движения

Потенциальная энергия

Межмолекулярная энергия

Внутренняя энергия

Х колебаний

Полная энергия жидкости

$$E' = U + pV + mgz + mw^2/2, \text{ дж}$$

Удельная энергия жидкости

$$E = u + py + gz + w^2/2, \text{ дж/кг}$$

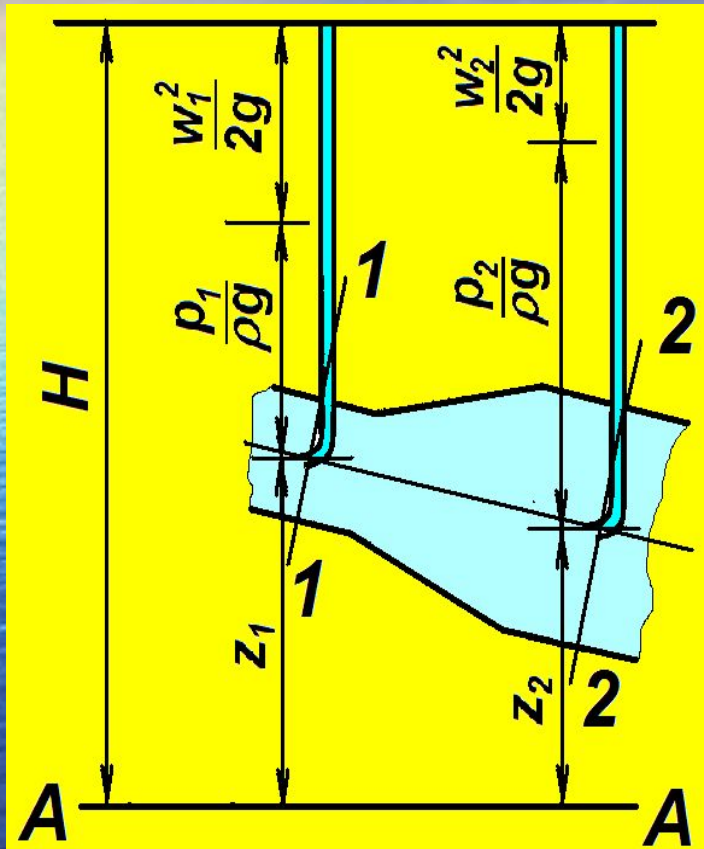
$$\Pi_z = Gz = mgz$$

Уравнение Бернулли для идеальной жидкости

$$u_1 + p_1\gamma + gz_1 + \frac{w_1^2}{2} = u_2 + p_2\gamma + gz_2 + \frac{w_2^2}{2}$$

Уравнение Бернулли является
частным случаем закона сохранения
энергии
и выражает энергетический баланс
потока:
полная удельная энергия жидкости
есть величина постоянная
во всех сечениях потока.

Уравнение Бернулли для идеальной жидкости. Полный напор



$$E = Hg$$

Полный напор H -
энергия жидкости, отнесенная
к единице силы тяжести.

$$H = z_i + \frac{p_i}{\rho g} + \frac{w_i^2}{2g} = \text{const}$$

Пьезометрический уклон

$$i_n = \frac{\Delta \left(z + \frac{p}{\rho g} \right)}{\Delta L_{1-2}}$$

Уравнение Бернулли для реальной жидкости

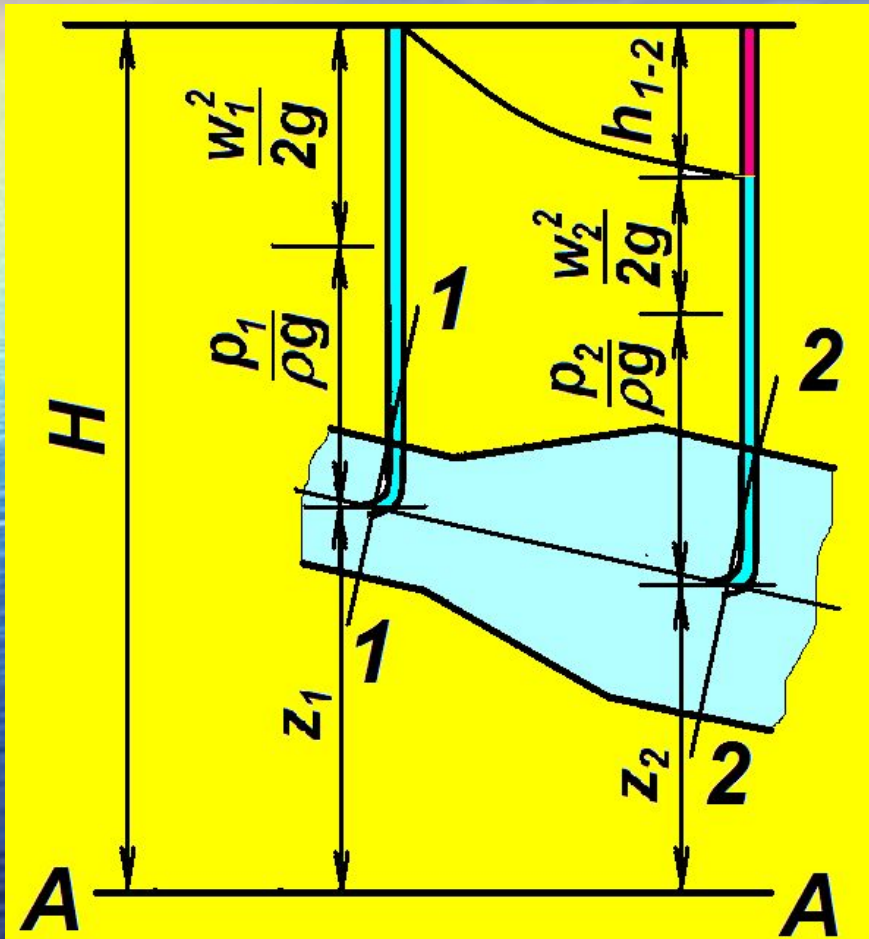
$$u_1 + \frac{p_1}{\rho} + gz_1 + \frac{w_1^2}{2} = u_2 + \frac{p_2}{\rho} + gz_2 + \frac{w_2^2}{2}$$

В отличие от идеальной жидкости, для которой полный напор $H = \text{const}$, для реальной жидкости полный напор убывает по направлению движения жидкости.

Из уравнения Бернулли следует, что увеличение скоростного напора сопровождается соответствующим уменьшением пьезометрического напора и наоборот.



Уравнение Бернулли для реальной жидкости. Полный напор



$$H_1 = H_2 + h_{1-2}$$

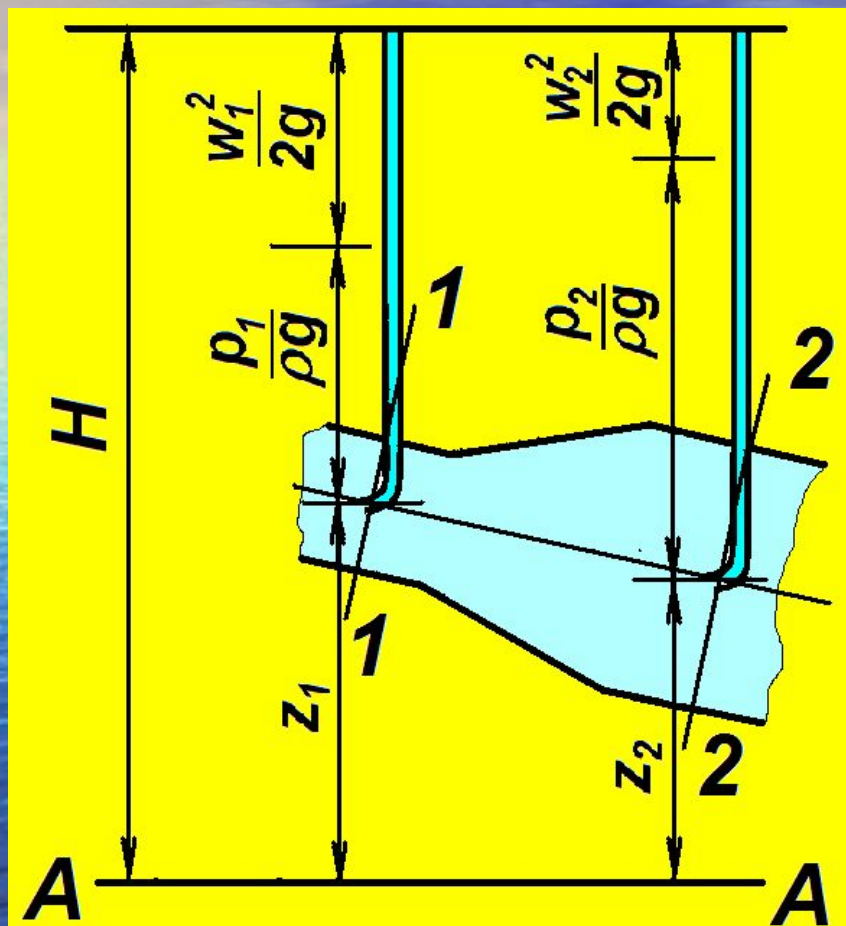
$$h_{1-2} = \frac{u_2 - u_1}{g}$$

Гидравлический
уклон:

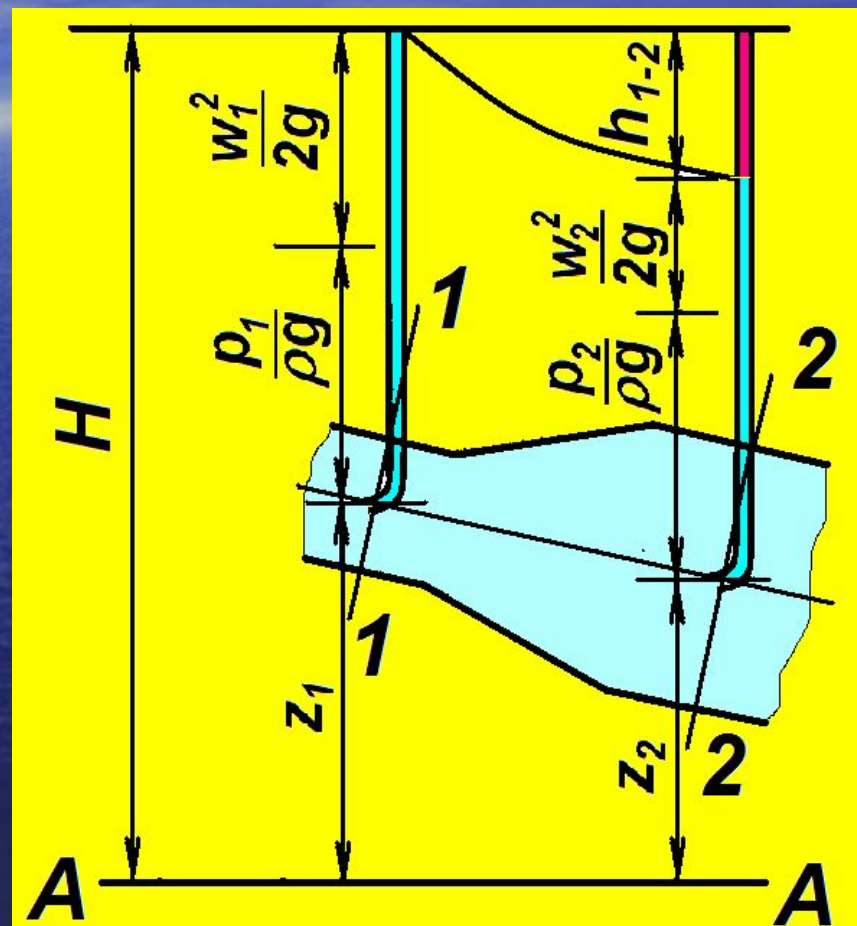
$$i = \frac{\Delta H}{\Delta L_{1-2}}$$

Уравнение Бернулли

Графическая иллюстрация



для идеальной жидкости

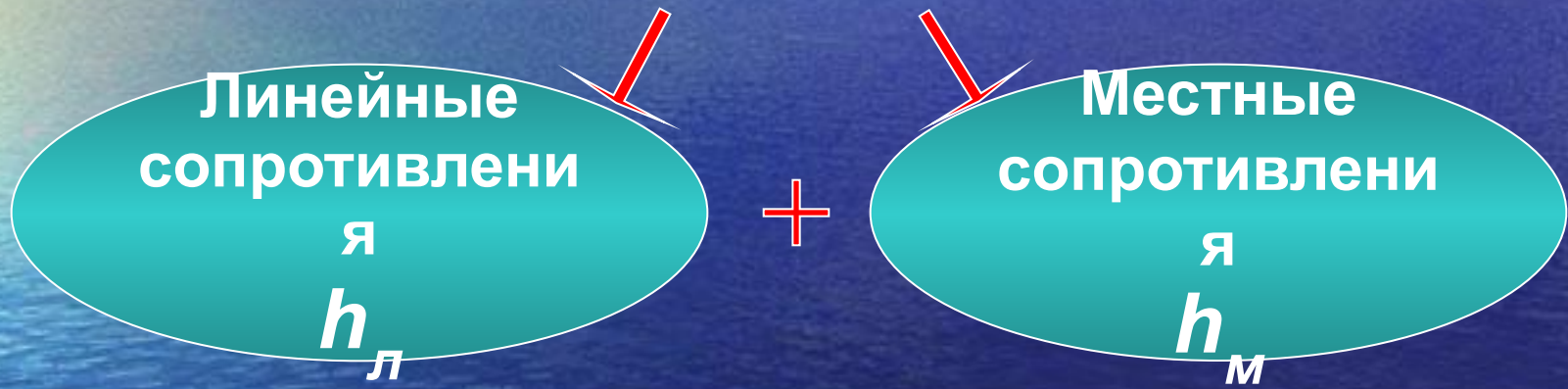


для реальной жидкости

Уравнение Бернулли

Линейные и местные сопротивления

Потери напора h_{1-2} на преодоление сопротивлений движению жидкости.



Линейные сопротивления связаны с протяженностью потока жидкости и обусловлены трением частиц одна о другую и стенку канала (т.е. трением по длине). Местные сопротивления обусловлены различными препятствиями на пути движения потока (в виде задвижек, вентилей, поворотов, сужений и расширений сечения и т. п.).

$h_{1-2} = h_l + h_m$

Режимы движения жидкости

Опыт Рейнольдса.
1883г.

- 1 — сосуд
- 2 - стеклянная труба
- 3 - капиллярная трубка

пути частиц прямолинейны
и параллельны друг другу

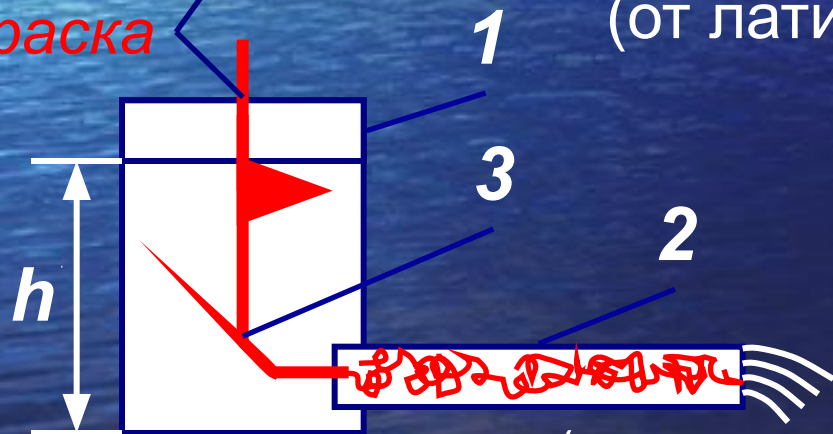
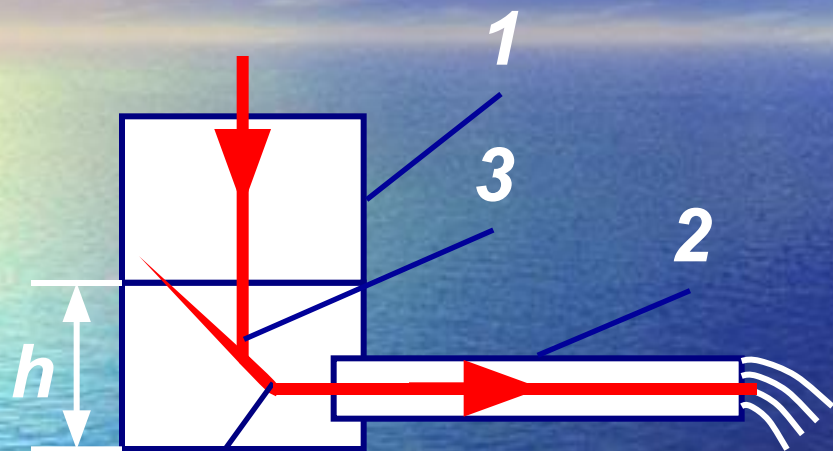
ламинарное движение

(от латинского слова «ламина» — слой)

частицы жидкости движутся
по хаотическим траекториям

турбулентное движение

(от латинского слова «турбулентус» — вихревой)



$h=const$



Режимы движения жидкости

Опыт показывает, что переход от ламинарного течения к турбулентному зависит от массовой скорости жидкости ρw , диаметра трубы d и вязкости жидкости μ .

Критерий Рейнольдса:

$$Re_{кр} = 2300$$

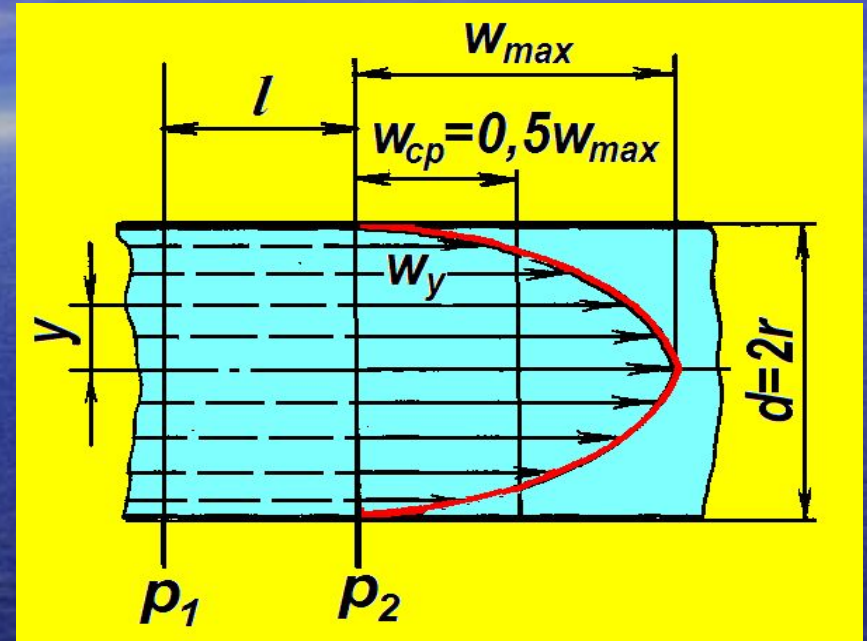
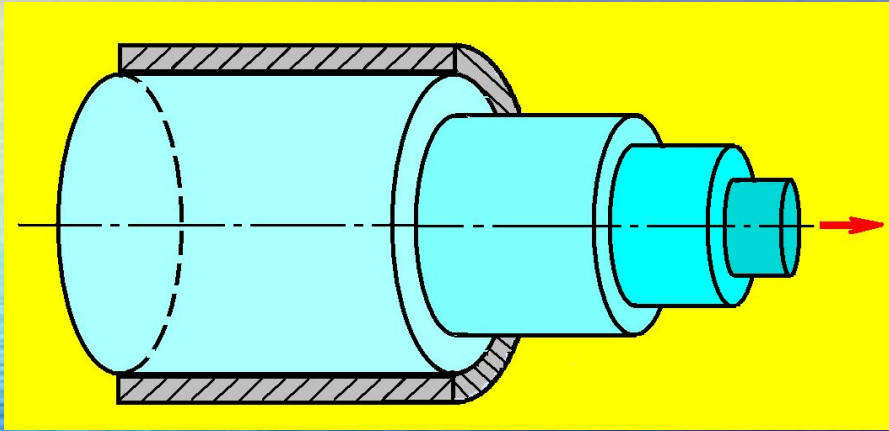
$$Re = \frac{wd\rho}{\mu} = \frac{wd}{\nu}$$

$Re < 2300$ – устойчивый ламинарный режим

$2300 < Re < 10000$ – неустойчиво турбулентный режим

$Re > 10000$ – устойчиво турбулентный режим

Распределение скоростей по сечению потока при ламинарном режиме



$$P_1 - P_2 = (p_1 - p_2) \pi y^2$$

p_1 и p_2 – гидростатические давления в сечениях трубы на расстоянии l

$$T = -\mu F \frac{dw_y}{dy}$$

w_y – скорость движения жидкости на расстоянии y от оси трубы

$F = 2\pi y l$ – наружная поверхность цилиндра

μ – вязкость жидкости



Распределение скоростей по сечению потока при ламинарном режиме

Сумма проекций всех сил на ось потока равна нулю

$$(p_1 - p_2)\pi y^2 = -\mu 2\pi y l \frac{dw_y}{dy}$$

После сокращения и разделения переменных

$$\frac{p_1 - p_2}{2\mu l} y dy = -dw_y$$

Проинтегрируем по всему объему жидкости в трубе

$$\int_y^r \frac{p_1 - p_2}{2\mu l} y dy = - \int_{w_y}^0 dw_y$$

$$\frac{p_1 - p_2}{2\mu l} \left(\frac{r^2}{2} - \frac{y^2}{2} \right) = w_y \quad \text{Получаем} \quad \text{или} \quad w_y = \frac{p_1 - p_2}{4\mu l} (r^2 - y^2)$$

Распределение скоростей по сечению потока при ламинарном режиме

Скорость имеет максимальное значение на оси трубы

$$w_{max} = \frac{p_1 - p_2}{4\mu l} r^2$$

$$w_y = w_{max} \left(1 - \frac{y^2}{r^2} \right)$$

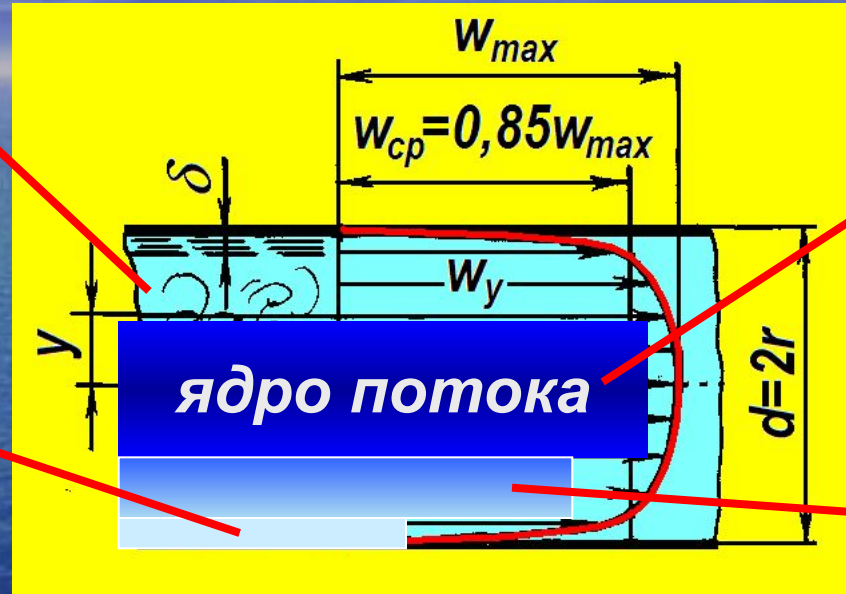
- закон Стокса, выражающий параболическое распределение скоростей в сечении трубопровода при ламинарном движении

При ламинарном потоке средняя скорость жидкости равна половине скорости по оси трубы

$$w_{cp} = 0,5 w_{max}$$

Распределение скоростей по сечению потока при турбулентном режиме

пульсация
скоростей,
перемешиван
ие
жидкости
ламинарный
пограничный
слой



в ядре
потока
скорости
частиц
одинаковы
переходная
зона

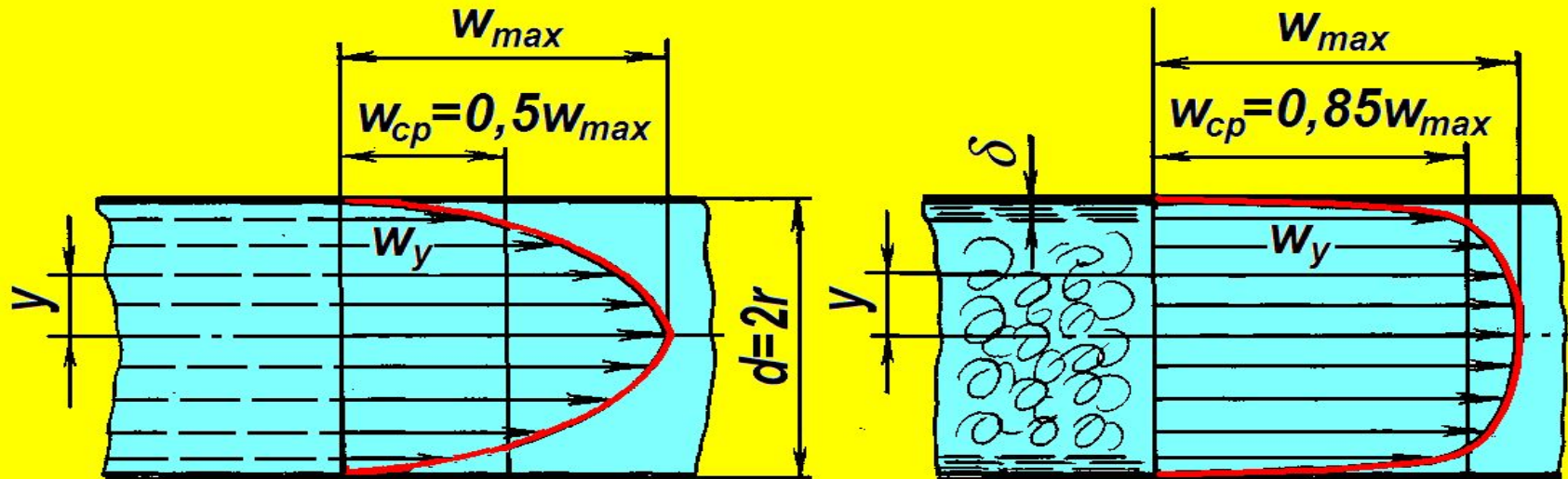
При $Re \ll 100000$ $\delta = 62,8dRe^{-0,875}$

$$\frac{w_y}{w_{max}} = \left(\frac{r-y}{r} \right)^m, \quad m = f(Re, \varepsilon)$$

$$\frac{w_{cp}}{w_{max}} = 0,75 \div 0,90$$

$$w_{cp} \approx 0,85w_{max}$$

Распределение скоростей по сечению потока при ламинарном и турбулентном режимах



Характерное распределение скоростей для каждого режима движения жидкости устанавливается на протяжении некоторого участка трубопровода, называемого начальным, длину которого рассчитывают по формулам:

$$l_{нач} = 0,028d Re$$

для ламинарного режима

$$l_{нач} = 0,639d Re^{0,25}$$

для турбулентного режима

Элементы теории подобия

ГИДРОДИНАМИЧЕСКИЙ ПРОЦЕСС

математическая модель

решение системы
сложных
дифференциальных
уравнений известными
математическими
методами

*общий случай,
но не всегда возможен*

экспериментальная модель

получение эмпирических
уравнений

*частный случай,
применим не для всех
аналогичных явлений*

**ТЕОРИЯ
ПОДОБИЯ**

Элементы теории подобия

Подобными называют явления, для которых постоянны отношения характеризующих их соответственных величин.

ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ ПОДОБИЕ

для линейных размеров

$$L_1 / L_2 = K_L$$

для площадей

$$F_1 / F_2 = K_L^2$$

для объемов

$$V_1 / V_2 = K_L^3$$

Элементы теории подобия

При подобии физических процессов должны быть подобны все основные физические величины, влияющие на процесс.

ФИЗИЧЕСКОЕ ПОДОБИЕ

для скоростей

$$\frac{w_1}{w_2} = K_w = \frac{L_1}{T_1} \cdot \frac{T_2}{L_2} = \frac{K_L}{K_T}$$

масштаб скоростей

$$K_w = K_L / K_T$$

масштаб ускорений

$$K_a = K_L / K_T^2$$

для действующих сил

динамическое подобие

$$\frac{P_1}{P_2} = K_P = \frac{\rho_1 w_1^2 L_1^2}{\rho_2 w_2^2 L_2^2}$$

Элементы теории подобия

Безразмерные соотношения разнородных физических величин называют *критериями подобия.*

Критерии подобия всегда имеют физический смысл, являясь мерами соотношения между какими-то двумя параметрами, оказывающими существенное влияние на данный процесс.

Элементы теории подобия

Критерий Рейнольдса

Если основное влияние на движение потока жидкости оказывают силы вязкости

$$P = ma = \mu L T \frac{w}{T} = \mu L w$$

$$\frac{\rho_1 w_1^2 L_1^2}{\rho_2 w_2^2 L_2^2} = \frac{\mu_1 w_1 L_1}{\mu_2 w_2 L_2}$$

или

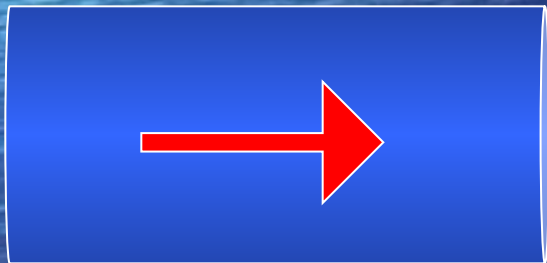
$$\frac{\rho_1 w_1 L_1}{\mu_1} = \frac{\rho_2 w_2 L_2}{\mu_2}$$

$$\frac{\rho w L}{\mu} = Re$$
$$\frac{w d \rho}{\mu} = Re$$

**критерий
Рейнольдса**



$\rho_1, \mu_1, L_1(d_1), w_1$



$\rho_2, \mu_2, L_2(d_2), w_2$

Элементы теории подобия

Критерий Фруда

Если движение жидкости обусловлено действием в основном *силы тяжести*



$\rho_1, L_1(d_1), w_1$



$\rho_2, L_2(d_2), w_2$

или

$$P = ma = \rho Vg = \rho L^3 g$$

$$\frac{\rho_1 w_1^2 L_1^2}{\rho_2 w_2^2 L_2^2} = \frac{\rho_1 L_1^3 g}{\rho_2 L_2^3 g}$$

$$\frac{w_1^2}{gL_1} = \frac{w_2^2}{gL_2}$$

$$\frac{w^2}{gL} = Fr$$

**критерий Фруда
(гравитационный)**



Элементы теории подобия

Критерий Вебера

Если на движение жидкости решающее влияние оказывают *силы поверхностного натяжения*

$$P = ma = \sigma L$$

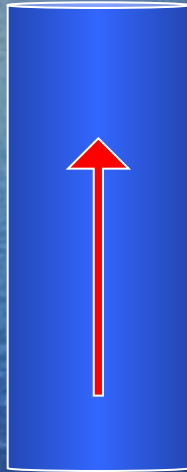
$$\frac{\rho_1 w_1^2 L_1^2}{\rho_2 w_2^2 L_2^2} = \frac{\sigma_1 L_1}{\sigma_2 L_2}$$

ИЛИ

$$\frac{\rho_1 w_1^2 L_1}{\sigma_1} = \frac{\rho_2 w_2^2 L_2}{\sigma_2}$$



$$\sigma_1, L_1$$



$$\sigma_2, L_2$$

$$\frac{\rho w^2 L}{\sigma} = We$$

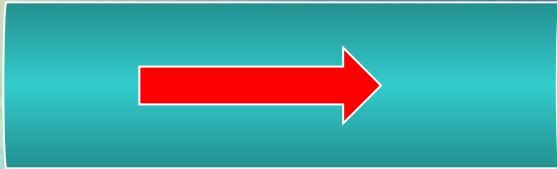
**критерий
Вебера**



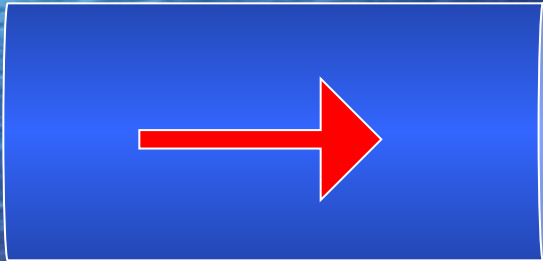
Элементы теории подобия

Критерий Эйлера

Если основное влияние на движение потока жидкости оказывают силы *давления*



$\Delta p_1, \rho_1, w_1$



$\Delta p_2, \rho_2, w_2$

или

$$P = ma = \Delta p L^2$$

$$\frac{\rho_1 w_1^2 L_1^2}{\rho_2 w_2^2 L_2^2} = \frac{\Delta p_1 L_1^2}{\Delta p_2 L_2^2}$$

$$\frac{\Delta p_1}{\rho_1 w_1^2} = \frac{\Delta p_2}{\rho_2 w_2^2}$$

$$\frac{\Delta p}{\rho w^2} = Eu$$

**критерий Эйлера
(гидравлического
сопротивления)**

Элементы теории подобия

Производные критерии

Критерий Галилея

$$Ga = \frac{Re^2}{Fr} = \frac{gL^3}{\nu^2} = \frac{gL^3 \rho^2}{\mu^2}$$

Критерий Архимеда

$$Ar = Ga \frac{\Delta\rho}{\rho} = \frac{gL^3}{\nu^2} \cdot \frac{\Delta\rho}{\rho} = \frac{gL^3 \rho \Delta\rho}{\mu^2}$$

При перекачивании жидкости насосом по трубопроводу влияние силы тяжести можно не учитывать и исключить поэтому из рассмотрения критерий Фруда. Общий вид зависимости при вынужденном движении жидкости по трубопроводу имеет вид

$$Eu = C Re^{n_1} (l/d)^{n_2}$$

где l - длина рассматриваемого участка трубопровода; d - диаметр трубопровода; коэффициент C и показатели степени n_1 и n_2 определяют из опытов.



Некоторые практические приложения уравнения Бернулли

- Расчет сопротивлений и потерь напора при движении жидкости по трубопроводу
- Истечение из донного отверстия при постоянном уровне
- Истечение из донного отверстия при переменном уровне.
 - Истечение через водосливы
- Измерение скоростей и расходов жидкости

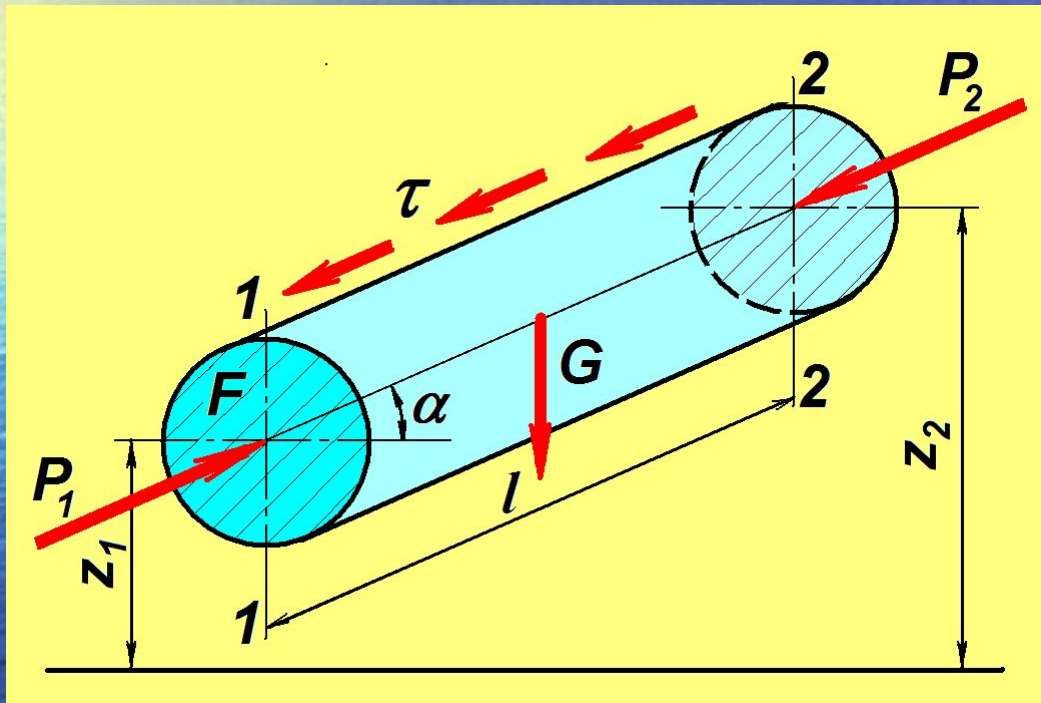


Сопротивление при движении жидкости по трубопроводу

При движении реальной жидкости по трубопроводу или каналу происходит потеря напора, которая складывается из потери на трение частиц жидкости друг о друга и о стенки трубы или канала, и потери на местных сопротивлениях, которые изменяют направление или скорость потока.



Сопротивление при движении жидкости по трубопроводу Потери на трение



Силы давления:

$$P_1 = p_1 F$$

$$P_2 = p_2 F$$

Сила тяжести:

$$G = \rho g F l$$

Силы трения:

$$T = \tau \Pi l$$

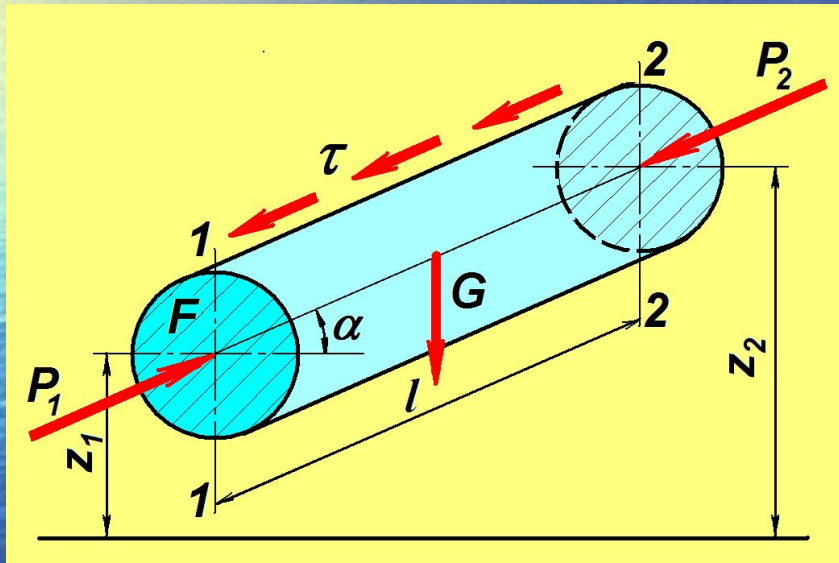
Сопротивление при движении жидкости по трубопроводу Потери на трение

При равномерном и прямолинейном движении действующие на жидкость силы будут находиться в равновесии.

$$P_1 - P_2 - G \sin \alpha - T = 0$$

$$\sin \alpha = \frac{z_2 - z_1}{l}$$

$$p_1 F - p_2 F - \rho g F l \frac{z_2 - z_1}{l} - \tau \Pi l = 0$$



Сопротивление при движении жидкости по трубопроводу Потери на трение

Разделим уравнение на $\rho g F$:

$$\left(z_1 + \frac{p_1}{\rho g} \right) - \left(z_2 + \frac{p_2}{\rho g} \right) = \frac{\tau \Pi l}{\rho g F} = \frac{\tau}{\rho g} \cdot \frac{l}{r_{\text{гидр}}}$$

Потери напора при
равномерном движении:

$$h_{1-2} = \frac{\tau}{\rho g} \cdot \frac{l}{r_{\text{гидр}}} = \frac{4\tau}{\rho g} \cdot \frac{l}{d_{\text{гидр}}}$$

Потеря напора на трение может
быть выражена через скоростной
напор $w^2/2g$:

$$h_{1-2} = \zeta \frac{w^2}{2g}$$

где ζ — коэффициент потерь энергии по длине или
коэффициент сопротивления трения.

Сопротивление при движении жидкости по трубопроводу Потери на трение

Напряжение трения τ :

$$\tau = \frac{\zeta}{4} \cdot \frac{d_{гидр}}{l} \cdot \frac{\rho w^2}{2}$$

Введем обозначение:

$$\lambda = \zeta \frac{d_{гидр}}{l}$$

— коэффициент гидравлического сопротивления
(коэффициент трения)

$$\tau = \frac{\lambda}{4} \cdot \frac{\rho w^2}{2}$$

Сопротивление при движении жидкости по трубопроводу Потери на трение

Потери напора на трение:

$$h_{1-2} = \lambda \frac{l}{d_{\text{зудр}}} \cdot \frac{w^2}{2g}$$

Потеря напора на трение пропорциональна длине трубопровода l и скоростному напору $w^2/2g$ и обратно пропорциональна диаметру трубы d .

Для ламинарного режима:
для гладких труб и при $Re \leq 70000$
при турбулентном режиме:
может быть использована формула
Блазиуса:

$$\lambda = f \left(Re, \frac{k}{d} \right) = \frac{64}{Re} \quad \text{или} \quad \lambda = \frac{0,3165}{Re^{0,25}}$$

ε - относительная шероховатость стенок трубы

k – абсолютная шероховатость (средняя величина выступов на стенках трубопровода);

Сопротивление при движении жидкости по трубопроводу

Местные сопротивления

К местным сопротивлениям относятся вход в трубу и выход из нее, участки сжатия и расширения потока, различные фитинги, диафрагмы, запорные и регулирующие устройства.

Потери напора в местном сопротивлении:

$$h_m = \xi_m \frac{w^2}{2g}$$

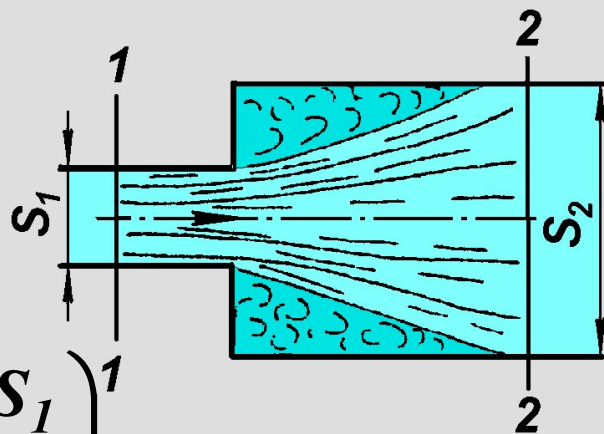
где ξ_m — коэффициент местного сопротивления.

Величина ξ_m зависит как от вида местного сопротивления, так и от режима движения жидкости, т.е. от числа Рейнольдса. Для различных местных сопротивлений величины ξ_m приводятся в справочниках.

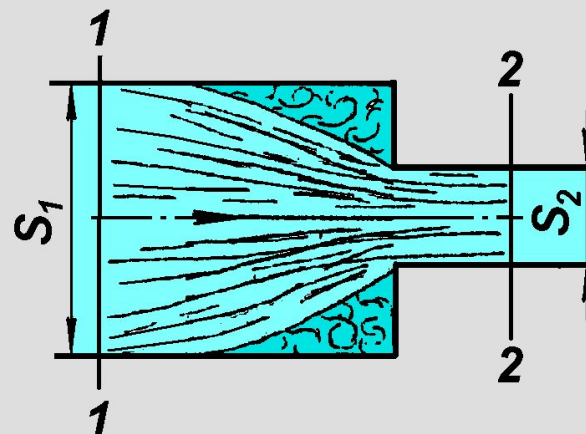


Сопротивление при движении жидкости по трубопроводу Местные сопротивления

$$\xi_M = \left(1 - \frac{S_1}{S_2}\right)^2$$

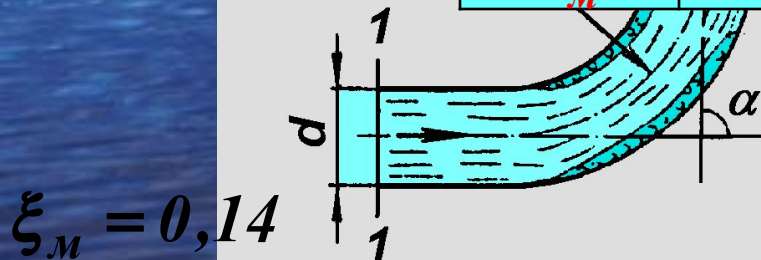


внезапное расширение



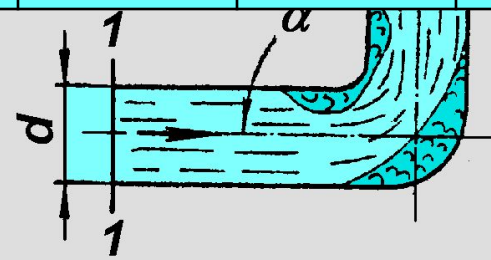
внезапное сужение

S_1/S_2	100	5	2	1,25	1
ξ_M	0,5	0,43	0,3	0,15	0



$$\xi_M = 0,14$$

плавный поворот на 90° (отвод)



$$\xi_M = 1,1 \div 1,3$$

резкий поворот на 90° (колесо)

Сопротивление при движении жидкости по трубопроводу Общая потеря напора

Полную потерю напора определяют как сумму всех потерь:

$$h = h_{\lambda} + \sum h_m = \lambda \frac{l}{d} \cdot \frac{w^2}{2g} + \sum \xi_{m,i} \frac{w^2}{2g} = \left(\lambda \frac{l}{d} + \sum \xi_{m,i} \right) \frac{w^2}{2g}$$

При движении жидкости по горизонтальному трубопроводу ($z_1 = z_2$) с постоянной скоростью ($w_1 = w_2$) полная потеря напора составит:

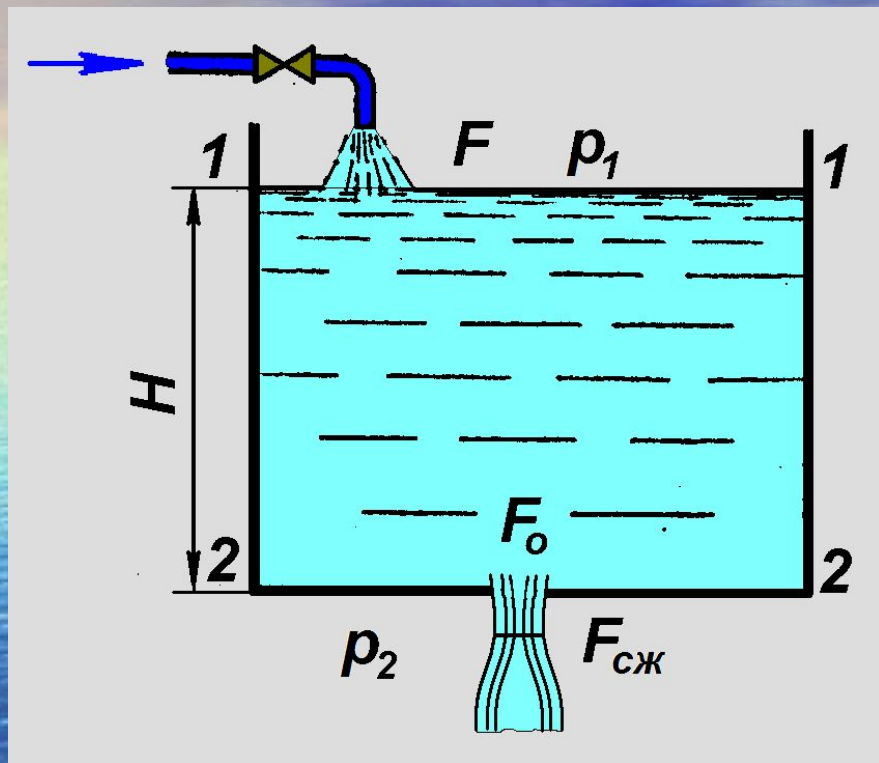
$$h = \frac{p_1 - p_2}{\rho g}$$

Потери давления в трубопроводе только от трения:

$$\Delta p = h \rho g = \left(\lambda \frac{l}{d} + \sum \xi_{m,i} \right) \frac{w^2 \rho}{2} \quad \frac{H}{m^2}$$



Истечение жидкости из донного отверстия при постоянном уровне



$$Q = w_1 F = w_2 F_o \quad w_1 = w_2 \frac{F_o}{F}$$

$$\frac{w_2^2}{2g} \left[1 - \left(\frac{F_o}{F} \right)^2 \right] = H + \frac{p_1}{\rho g} - \frac{p_2}{\rho g}$$

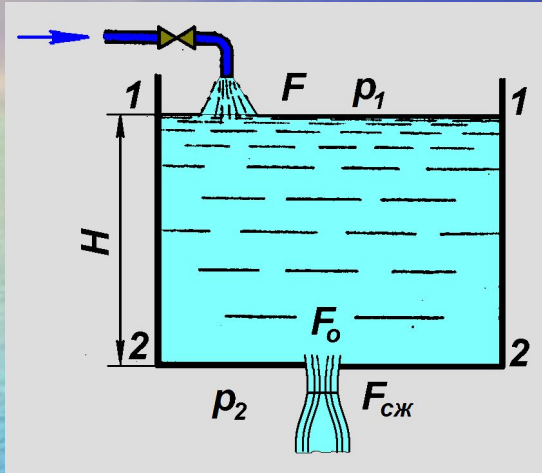
Скорость истечения
идеальной жидкости:

$$w_2 = \sqrt{2g \frac{H + \frac{p_1 - p_2}{\rho g}}{1 - \left(\frac{F_o}{F} \right)^2}}$$

Уравнение Бернулли:

$$H + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{w_1^2}{2g} = \frac{p_2}{\rho g} + \frac{w_2^2}{2g}$$

Истечение жидкости из донного отверстия при постоянном уровне



Как правило, площадь отверстия F_o существенно меньше площади поперечного сечения сосуда F , т. е.

$$\left(\frac{F_o}{F}\right)^2 \ll 1$$

Скорость истечения:

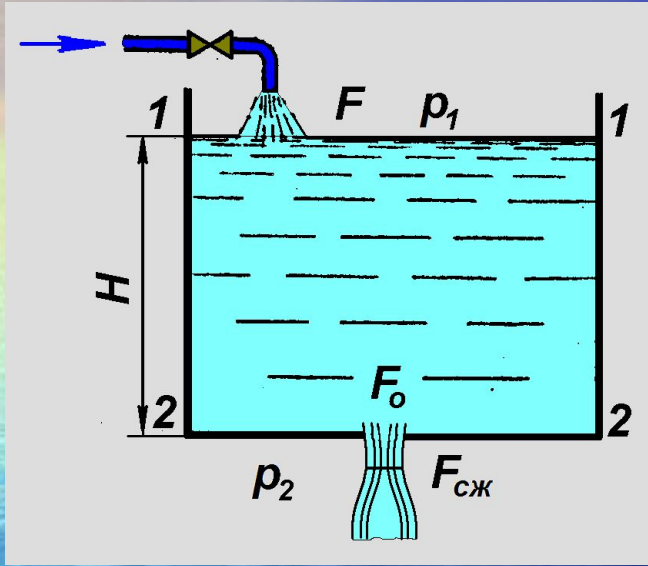
$$w_2 = \sqrt{2g \left(H + \frac{p_1 - p_2}{\rho g} \right)}$$

Если $p_1 = p_2$
(открытый резервуар)

$$w_T = w_2 = \sqrt{2gH}$$

Формула Торичелли для расчета теоретической скорости истечения.

Истечение жидкости из донного отверстия при постоянном уровне



Уравнение Бернулли для сечений 1—1 и 2—2 при истечении реальной (вязкой) жидкости

$$H + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{w_1^2}{2g} = \frac{p_2}{\rho g} + \frac{w_2^2}{2g} + \xi \frac{w_2^2}{2g}$$

где ξ — коэффициент сопротивления при истечении.

Пренебрегая скоростью w_1 по сравнению со скоростью истечения w_2 , получим следующее уравнение для скорости истечения $w = w_2$:

$$w = \frac{1}{\sqrt{1+\xi}} \sqrt{2g \left(H + \frac{p_1 - p_2}{\rho g} \right)} \quad \text{при } p_1 = p_2: \quad w = \frac{1}{\sqrt{1+\xi}} \sqrt{2gH}$$

Истечение жидкости из донного отверстия при постоянном уровне

Действительная скорость истечения всегда меньше теоретической!

Коэффициент скорости:

$$\varphi = \frac{w}{w_T} = \frac{1}{\sqrt{1 + \xi}}$$

Скорость истечения:

$$w = \varphi \sqrt{2gH}$$

Расход жидкости через отверстие:

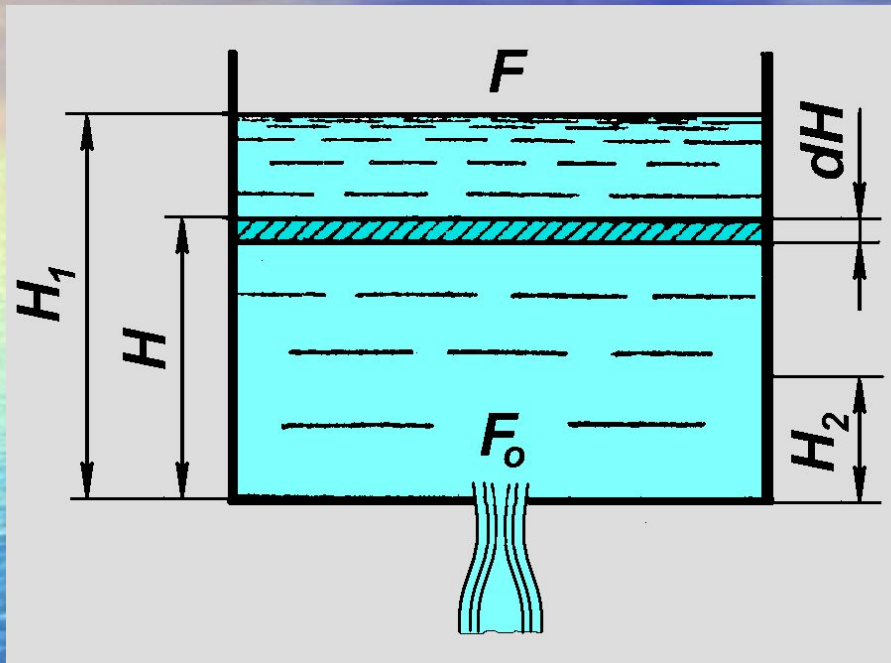
$$Q = F_{сж} w$$

$F_{сж} = \varepsilon \cdot F_o$, где ε — коэффициент сжатия струи.

$$Q = \varepsilon F_o w = \varepsilon F_o \varphi w_T = \varepsilon \varphi Q_T = \alpha F_o \sqrt{2gH}$$

где $\alpha = \varepsilon \varphi$ — коэффициент расхода

Истечение жидкости из донного отверстия при переменном уровне



В этом случае величина напора и скорость истечения непрерывно изменяются и поэтому приходится рассматривать бесконечно малые промежутки времени, чтобы использовать полученные ранее результаты.

За бесконечно малый промежуток времени dT через отверстие вытечет объем жидкости dV

$$dV = \alpha F_0 w dT = \alpha F_0 \sqrt{2gH} dT$$

$$dV = -F dH$$

$$\alpha F_0 \sqrt{2gH} dT = -F dH$$

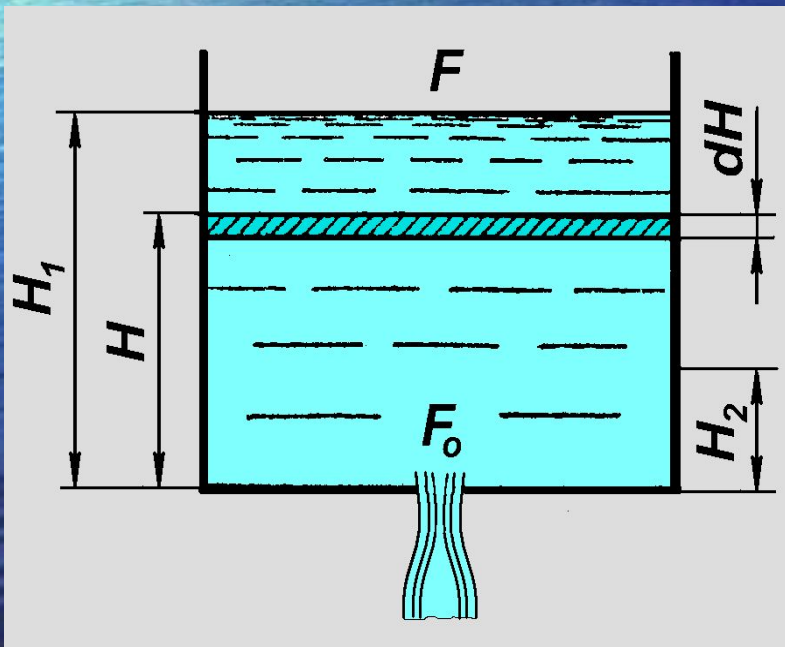
Полное время опорожнения сосуда определится при интегрировании этого уравнения

Истечение жидкости из донного отверстия при переменном уровне

$$T = \int_0^T dT = - \int_{H_1}^0 \frac{F dH}{\alpha F_o \sqrt{2gH}} = \frac{F}{\alpha F_o \sqrt{2gH}} \int_0^{H_1} \frac{dH}{\sqrt{H}}$$

$$T = \frac{2F \sqrt{H_1}}{\alpha F_o \sqrt{2g}}$$

**полное время
опорожнения сосуда**



Если происходит неполное опорожнение сосуда, то в сосуде остается слой жидкости глубиной H_2 . В этом случае время истечения жидкости из сосуда

$$T = \frac{2F(\sqrt{H_1} - \sqrt{H_2})}{\alpha F_o \sqrt{2g}}$$

Приведенные уравнения могут быть также использованы при расчетах заполнения сосуда

Истечение жидкости через водосливы

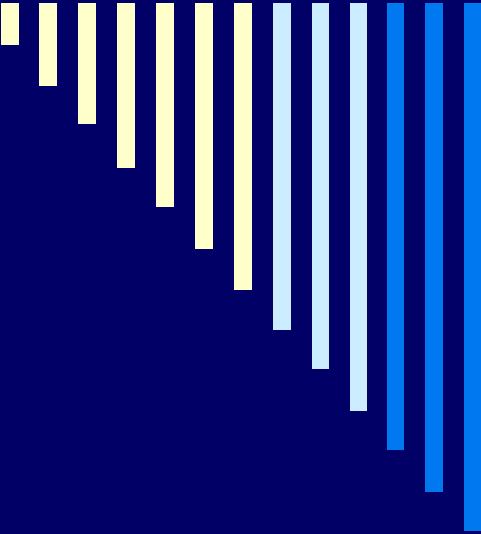


Измерение скоростей и расходов жидкости



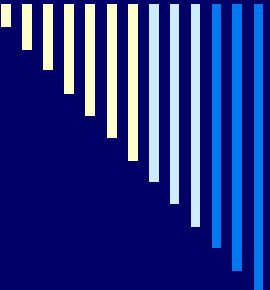
Движение жидкости в напорных трубопроводах и их расчет





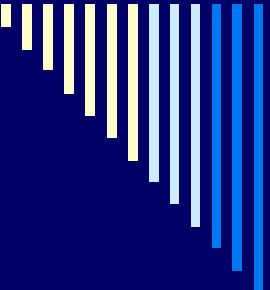
Практические задачи





Задача 10

- По трубам одноходового кожухотрубчатого теплообменника (число труб $n=100$, наружный диаметр труб **20 мм**, толщина стенки **2 мм**) проходит воздух при средней температуре **50 °C** давлении (по манометру) **2 кгс/см²** со скоростью **9 м/с**. Барометрическое давление **740 мм рт.ст.** Плотность воздуха при нормальных условиях **1,293 кг/м³**.
- Определить:
 - а) массовый расход воздуха;
 - б) объемный расход воздуха при рабочих условиях;
 - в) объемный расход воздуха при нормальных условиях.



Решение

Рабочее давление (абсолютное):

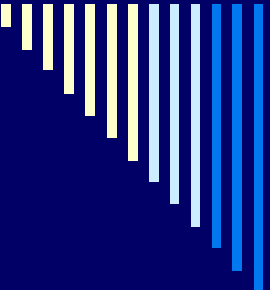
$$P = P_{\text{бар}} + P_{\text{ман}} = 740 \cdot 133,3 + 98100 \cdot 2 = 294800 \text{ Па}$$

или: $p = p_{\text{бар}} + p_{\text{ман}} = 740 + 735 \cdot 2 = 2210 \text{ мм рт.ст.}$

Плотность воздуха при рабочих условиях:

$$\rho = \rho_0 \frac{pT_0}{p_0T} = 1,293 \frac{294800 \cdot 273}{101300(273 + 50)} = 3,18 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$$

или: $\rho = \rho_0 \frac{pT_0}{p_0T} = 1,293 \frac{2210 \cdot 273}{760(273 + 50)} = 3,18 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$



Решение (продолжение)

Массовый расход воздуха:

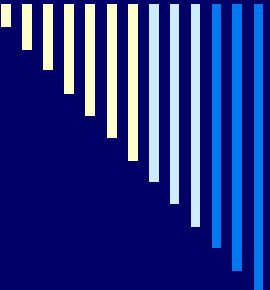
$$m = Q \cdot \rho = w F \rho = w n \frac{\pi \cdot d^2}{4} \rho = 9 \cdot 100 \cdot 0,785 \cdot 0,016^2 \cdot 3,18 = 0,57 \frac{\text{кг}}{\text{с}}$$

Объемный расход воздуха при рабочих условиях:

$$Q = \frac{m}{\rho} = \frac{0,57}{3,18} = 0,18 \frac{\text{м}^3}{\text{с}}$$

Объемный расход воздуха при нормальных условиях:

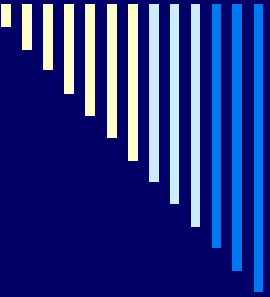
$$Q_0 = \frac{m}{\rho_0} = \frac{0,57}{1,293} = 0,44 \frac{\text{м}^3}{\text{с}}$$



Задача 11.

- Теплообменник изготовлен из стальных труб диаметром **76×3 мм**. По трубам проходит газ под атмосферным давлением. Требуется найти необходимый диаметр труб для работы с тем же газом, но под избыточным давлением **5 ат**, если требуется скорость газа сохранить прежней при том же массовом расходе газа и при том же числе труб.





Решение.

Под давлением 5 ат плотность газа будет:

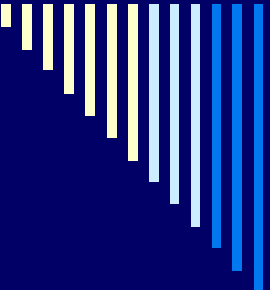
$$\rho = \rho_0 \frac{T_0 p}{T p_0} = \rho_0 \frac{273 \cdot (5 + 1)}{293 \cdot 1} \approx 6 \rho_0$$

т.е. будет в 6 раз больше, чем при атмосферном давлении. Так как массовый расход газа

$$m = Q \cdot \rho = w F \rho$$

должен быть сохранен неизменным, то

$$w_1 n_1 \frac{\pi d_1^2}{4} \rho_1 = w_2 n_2 \frac{\pi d_2^2}{4} \rho_2$$



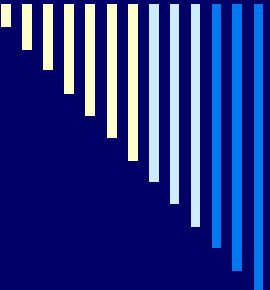
Решение (продолжение)

Подставляя $w_1 = w_2$ $n_1 = n_2$ $\rho_2 = 6\rho_1$ $d_1 = 0,07$ м

получаем: $0,07^2 = 6d_2^2$

откуда:

$$d_2 = \sqrt{\frac{0,07^2}{6}} = 0,0286 \text{ м} \approx 29 \text{ мм}$$



Задача 12.

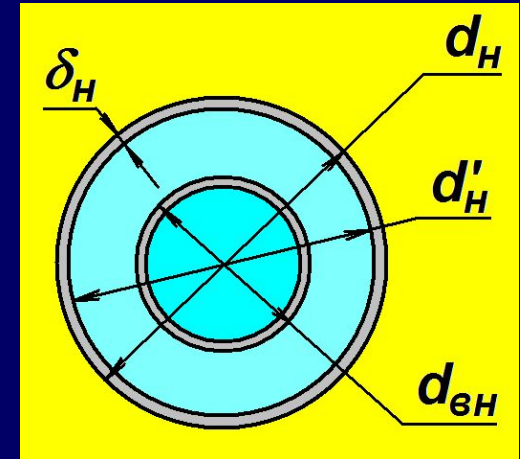
- Определить режим течения жидкости в межтрубном пространстве теплообменника типа «труба в трубе» при следующих условиях: внутренняя труба теплообменника имеет диаметр **25×2 мм**, наружная **$51 \times 2,5$ мм**, массовый расход жидкости **3730 кг/ч**, плотность жидкости **1150 кг/м³**, динамический коэффициент вязкости **$1,2 \cdot 10^{-3}$ Па·с**.

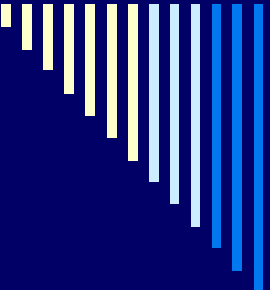


Решение.

Скорость жидкости из уравнения расхода:

$$w = \frac{Q}{F} = \frac{\frac{m}{3600 \cdot \rho}}{\frac{\pi}{4} \left((d_H - 2 \cdot \delta_H)^2 - d_{вн}^2 \right)} =$$
$$= \frac{3730}{3600 \cdot 1150 \cdot 0,785 (0,046^2 - 0,025^2)} = 0,77 \frac{\text{м}}{\text{с}}$$





Решение (продолжение)

Если обозначить внутренний диаметр наружной трубы через $d'_н$, то гидравлический (эквивалентный) диаметр кольцевого сечения:

$$d_{гидр} = \frac{4F}{\Pi} = \frac{4 \cdot \frac{\pi}{4} \left((d'_н)^2 - d_{вн}^2 \right)}{\pi (d'_н + d_{вн})} = d'_н - d_{вн} = 0,046 - 0,025 = 0,021 м$$

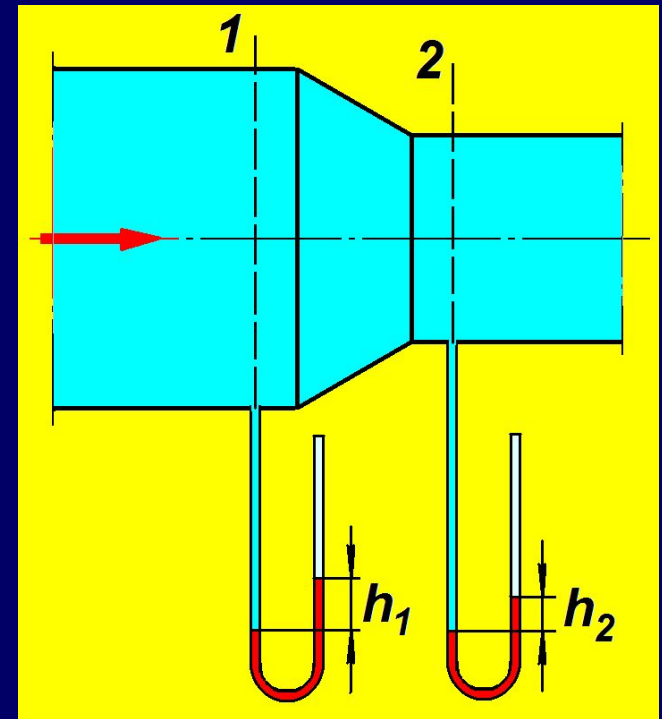
Критерий Рейнольдса:

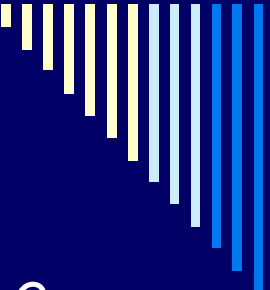
$$Re = \frac{wd_{гидр}\rho}{\mu} = \frac{0,77 \cdot 0,021 \cdot 1150}{1,2 \cdot 10^{-3}} = 15500$$

Следовательно, режим турбулентный.

Задача 13.

- На трубопроводе с внутренним диаметром **200 мм** имеется плавный переход на диаметр **100 мм**. По трубопроводу подается **1700 м³/ч** метана при **30 °С** и при нормальном давлении. Открытый в атмосферу U-образный водяной манометр, установленный на широкой части трубопровода перед сужением, показывает избыточное давление в трубопроводе, равное **40 мм вод.ст.** Каково будет показание такого же манометра на узкой части трубопровода? Сопротивления пренебечь. Атмосферное давление **760 мм рт. ст.**





Решение.

Считаем, что плотность метана не изменяется по длине трубопровода. Составляем уравнение Бернулли для несжимаемой жидкости:

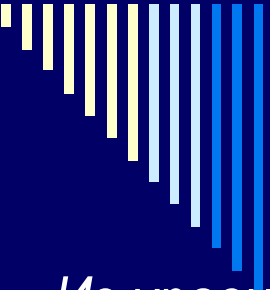
$$\frac{p_1}{\rho g} + \frac{w_1^2}{2g} = \frac{p_2}{\rho g} + \frac{w_2^2}{2g}$$

откуда находим:

$$p_1 - p_2 = \frac{w_2^2 - w_1^2}{2} \rho$$

Определяем скорости метана в сечениях **1** и **2**, принимая, что давление в трубопроводе приблизительно равно атмосферному:

$$w_1 = \frac{1700 \cdot (273 + 30)}{3600 \cdot 273 \cdot 0,785 \cdot 0,2^2} = 16,7 \frac{\text{м}}{\text{с}}$$



Решение (продолжение)

Из уравнения неразрывности потока:

$$w_2 = w_1 \frac{F_1}{F_2} = 16,7 \left(\frac{0,2}{0,1} \right)^2 = 66,8 \frac{\text{м}}{\text{с}}$$

Плотность метана:

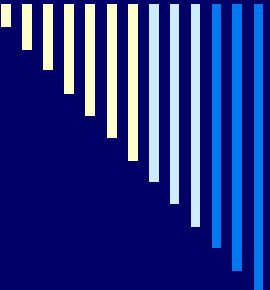
$$\rho = \frac{MT_0}{22,4T} = \frac{16 \cdot 273}{22,4 \cdot 303} = 0,645 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$$

Разность давлений:

$$\Delta p = \frac{w_2^2 - w_1^2}{2} \rho = \frac{(66,8^2 - 16,7^2) \cdot 0,645}{2} = 1354 \text{ Па} = 138 \text{ мм вод. ст.}$$

$$h_2 = p_2 = p_1 - \Delta p = 40 - 138 = -98 \text{ мм вод. ст.}$$

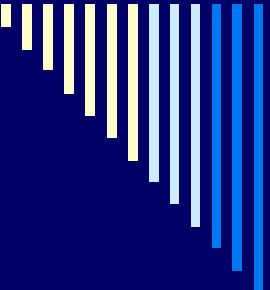
т.е. манометр в сечении 2 будет показывать вакуум, равный 98 мм вод. ст.



Задача 14.

Из отверстия диаметром **10 мм** в дне открытого бака, в котором поддерживается постоянный уровень жидкости высотой **900 мм**, вытекает **750 л/ч** жидкости. Определить коэффициент расхода. За какое время опорожнится бак, если прекратить подачу в него жидкости? Диаметр бака **800 мм**.





Решение

Расход через отверстие при постоянном уровне жидкости в сосуде:

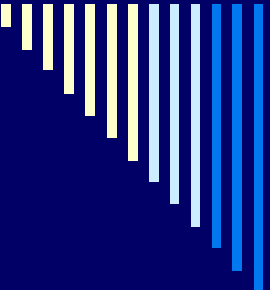
$$Q = \alpha F_o \sqrt{2 g H}$$

Отсюда коэффициент расхода:

$$\alpha = \frac{Q}{F_o \sqrt{2 g H}} = \frac{0,75}{3600 \cdot 0,785 \cdot 0,01^2 \sqrt{2 \cdot 9,81 \cdot 0,9}} = 0,632$$

Полное время опорожнения сосуда:

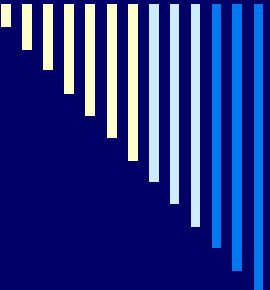
$$T = \frac{2F \sqrt{H}}{\alpha F_o \sqrt{2g}} = \frac{2 \cdot 0,785 \cdot 0,8^2 \sqrt{0,9}}{0,632 \cdot 0,785 \cdot 0,01^2 \sqrt{2 \cdot 9,81}} = 4336 \text{ с} \approx 72 \text{ мин}$$



Задача 15.

- Определить потерю давления на трение в змеевике, по которому проходит вода со скоростью **1 м/с**. Змеевик сделан из бывшей в употреблении стальной трубы диаметром **43×2,5 мм**, коэффициент трения **0,0316**. Диаметр витка змеевика **1 м**. Число витков **10**.





Решение.

Потерю давления на трение находим по формуле для прямой трубы, а затем вводим поправочный коэффициент для змеевика по формуле:

$$\psi = 1 + 3,54 \frac{d}{D} = 1 + 3,54 \frac{0,038}{1} = 1,134$$

где d – внутренний диаметр трубы, а D - диаметр витка змеевика. Приблизленно длина змеевика равна:

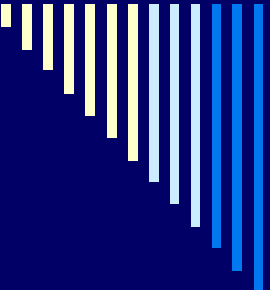
$$l = \pi D n = 3,14 \cdot 1 \cdot 10 = 31,4 \text{ м}$$

Потеря напора на преодоление трения в прямой трубе:

$$\Delta p_{np} = \lambda \frac{l}{d} \cdot \frac{w^2 \rho}{2} = 0,0316 \frac{31,4 \cdot 1^2 \cdot 1000}{0,038 \cdot 2} = 13100 \text{ Па}$$

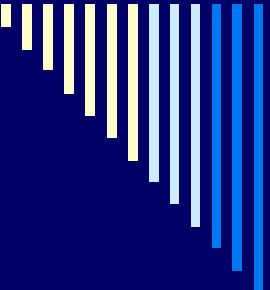
Потеря напора с учетом поправочного коэффициента:

$$\Delta p_{зм} = \Delta p_{np} \psi = 13100 \cdot 1,134 = 14800 \text{ Па}$$



Задача 16.

- Определить полную потерю давления на участке трубопровода длиной **500 м** из гладких труб внутренним диаметром **50 мм**, по которому подается вода при температуре **20 °C** со скоростью **1 м/с**. Динамический коэффициент вязкости воды **$1 \cdot 10^{-3} \text{ Па} \cdot \text{с}$** . На участке трубопровода имеются вентиль с коэффициентом сопротивления **3,0**; 3 колена (по **1,1**); 2 отвода (по **0,14**) и наполовину закрытая задвижка (**2,8**). Какова будет потеря напора?



Решение.

Режим течения жидкости в трубе: $Re = \frac{wd\rho}{\mu} = \frac{1 \cdot 0,05 \cdot 1000}{1 \cdot 10^{-3}} = 50000$

Для гладких труб при турбулентном движении можно применить формулу Блазиуса:

$$\lambda = \frac{0,3165}{Re^{0,25}} = \frac{0,3165}{50000^{0,25}} = 0,0212$$

Сумма коэффициентов местных сопротивлений:

$$\sum \xi_m = 3,0 + 3 \cdot 1,1 + 2 \cdot 0,14 + 2,8 = 9,38$$

Потеря давления:

$$\Delta p = \left(\lambda \frac{l}{d} + \sum \xi_i \right) \frac{w^2 \rho}{2} = \left(0,0212 \frac{500}{0,05} + 9,38 \right) \frac{1^2 \cdot 10^3}{2} = 110690 \text{ Па}$$

Потеря напора:

$$h = \frac{\Delta p}{\rho g} = \frac{110690}{10^3 \cdot 9,81} = 11,28 \text{ м}$$