



ЭЛЕМЕНТЫ АЛГЕБРЫ ЛОГИКИ

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ
ИНФОРМАТИКИ

9 класс

Ключевые слова

- алгебра логики
- высказывание
- логическая операция
- конъюнкция
- дизъюнкция
- отрицание
- логическое выражение
- таблица истинности
- законы логики



Логика



Аристотель (384-322 до н.э.).

Основоположник формальной логики (понятие, суждение, умозаключение).



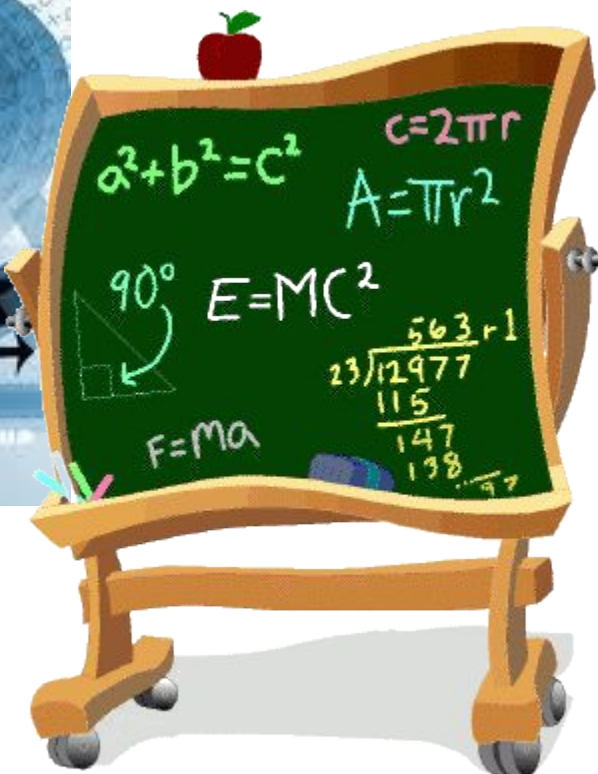
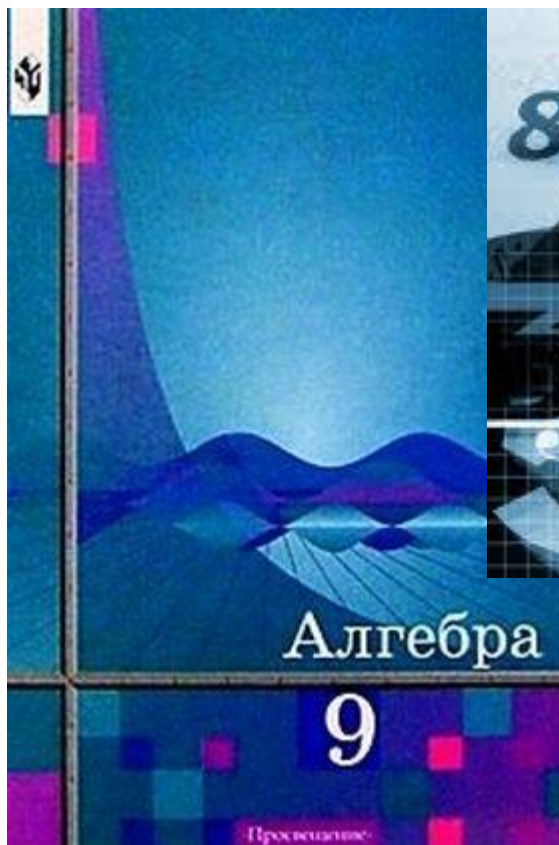
Джордж Буль (1815-1864). Создал новую область науки - Математическую логику (Булеву алгебру или Алгебру высказываний).



Клод Шеннон (1916-2001). Его исследования позволили применить алгебру логики в вычислительной технике

Алгебра

Алгебра - наука об общих операциях, аналогичных сложению и умножению, которые могут выполняться над разнообразными математическими объектами – числами, многочленами, векторами и др.



Высказывание



Высказывание - это предложение на любом языке, содержание которого можно однозначно определить как **истинное** или **ложное**.

В русском языке высказывания выражаются повествовательными предложениями:

*Земля вращается вокруг Солнца.
Москва - столица.*

Но не всякое повествовательное предложение является высказыванием:

Это высказывание ложное.

Побудительные и вопросительные предложения высказываниями не являются.

*Без стука не входить!
Откройте учебники.
Ты выучил стихотворение?*

Высказывание или нет?

- ✓ Зимой идет дождь.
- ✓ Снегири живут в Крыму.

Кто к нам пришел?

- ✓ У треугольника 5 сторон.

Как пройти в библиотеку?

Переведите число в десятичную систему.

Запишите домашнее задание

Алгебра логики



Алгебра логики определяет правила записи, вычисления значений, упрощения и преобразования высказываний.

В алгебре логики высказывания обозначают буквами и называют **логическими переменными**.

Если высказывание истинно, то значение соответствующей ему логической переменной обозначают единицей ($A = 1$), а если ложно - нулём ($B = 0$).

0 и **1** называются **логическими значениями**.

Простые и сложные высказывания



Высказывания бывают простые и сложные.

Высказывание называется **простым**, если никакая его часть сама не является высказыванием.

Сложные (составные) высказывания строятся из простых с помощью логических операций.

Название логической операции	Логическая связка
Конъюнкция	«и»; «а»; «но»; «хотя»
Дизъюнкция	«или»
Инверсия	«не»; «неверно, что»

Логические операции



Конъюнкция - логическая операция, ставящая в соответствие каждому двум высказываниям новое высказывание, являющееся истинным тогда и только тогда, когда оба исходных высказывания истинны.

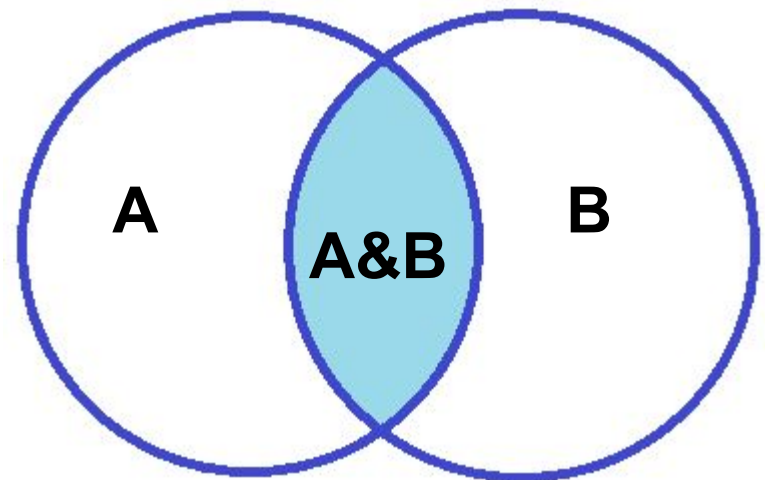
Другое название: **логическое умножение**.

Обозначения: $\wedge$, $\times$, $\&$, И.

Таблица истинности:

A	B	A&B
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Графическое представление



Логические операции

Дизъюнкция - логическая операция, которая каждому двум высказываниям ставит в соответствие новое высказывание, являющееся ложным тогда и только тогда, когда оба исходных высказывания ложны.

Другое название: **логическое сложение**.

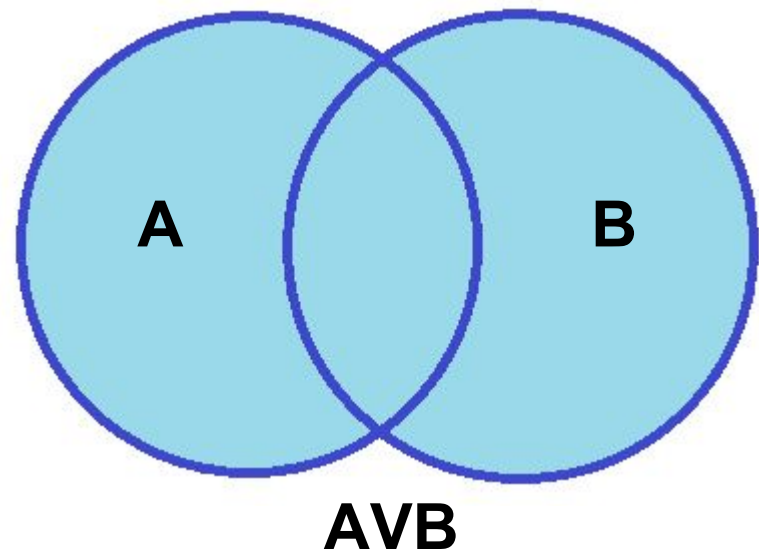
Обозначения: **$\vee$, $|$, ИЛИ, $+$** .



Таблица истинности:

A	B	$A \vee B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Графическое представление



Логические операции

Инверсия - логическая операция, которая каждому высказыванию ставит в соответствие новое высказывание, значение которого противоположно исходному.

Другое название: **логическое отрицание**.

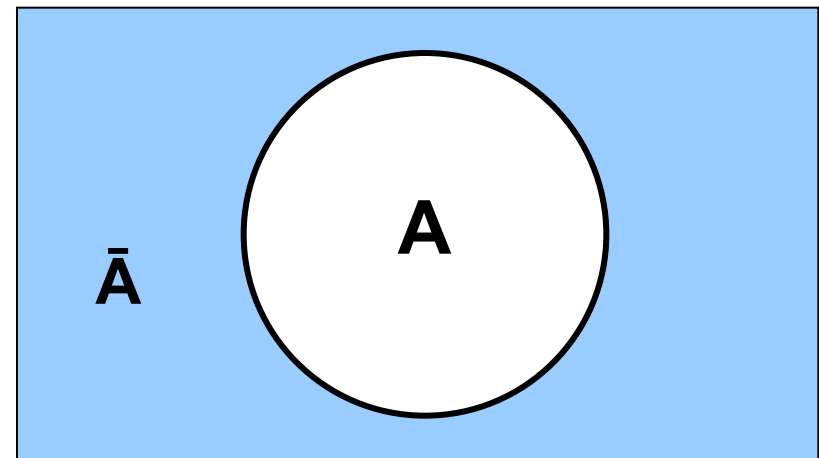
Обозначения: **НЕ**, $\neg$, $\bar{}$.



Таблица истинности:

A	$\bar{A}$
0	1
1	0

Графическое представление



Логические операции имеют следующий приоритет:
инверсия, конъюнкция, дизъюнкция.

Решаем задачу

Пусть A = «На Web-странице встречается слово "крейсер"», B = «На Web-странице встречается слово "линкор"».

В некотором сегменте сети Интернет 5 000 000 Web-страниц. В нём высказывание A истинно для 4800 страниц, высказывание B - для 4500 страниц, а высказывание $A \vee B$ - для 7000 страниц.

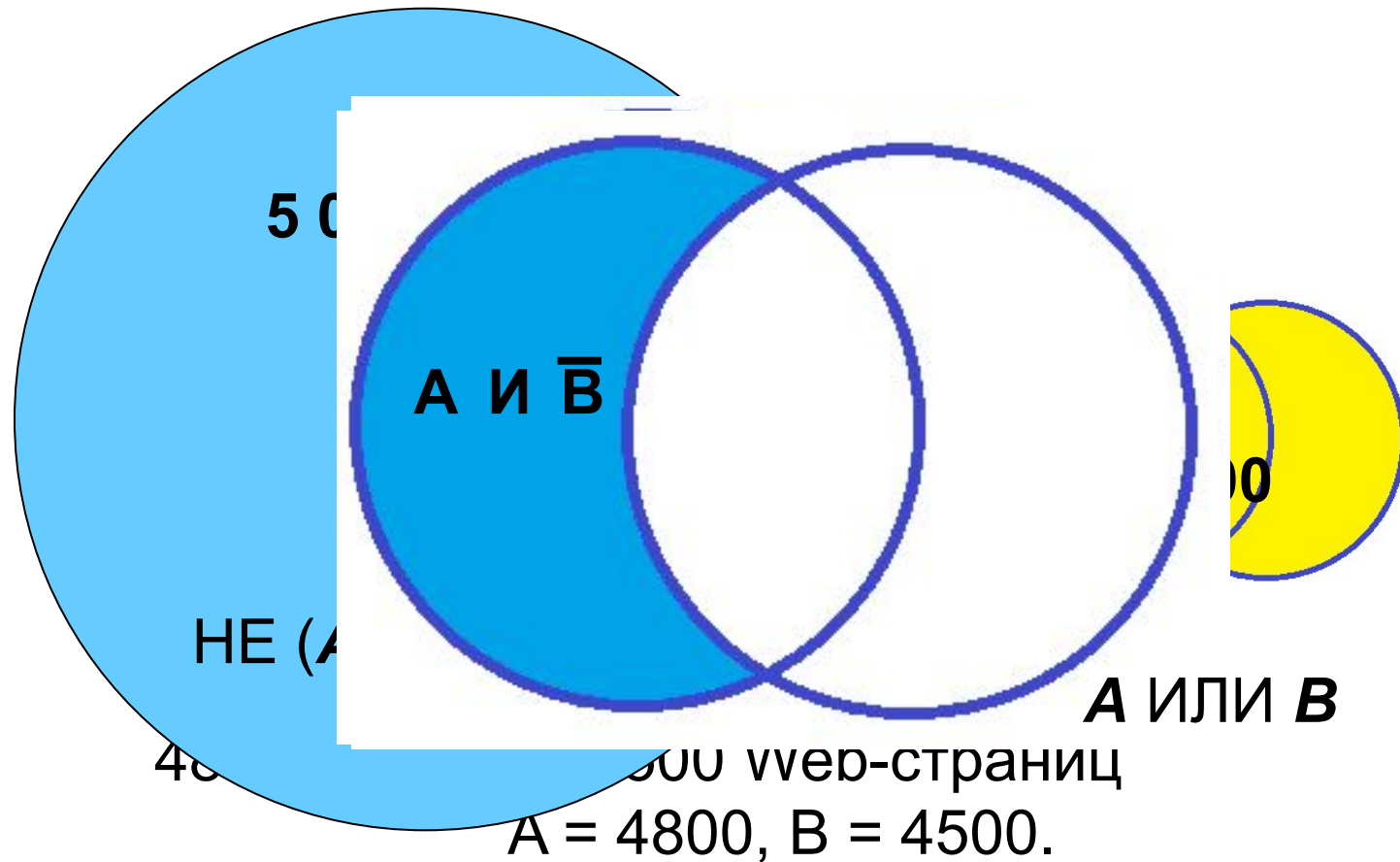
Для какого количества Web-страниц в этом случае будут истинны следующие выражения и высказывание?

а) **НЕ (A ИЛИ B)**;

б) **A & B** ;

в) *На Web-странице встречается слово "крейсер" И НЕ встречается слово "линкор".*

Представим условие задачи графически:



Сегмент Web-страниц

500 4800 4500 9300

И НЕ встречается слово "линкор"

9300 - 7000 = 2300 Web-страниц $A \& B$

Построение таблиц истинности для логических выражений

подсчитать n - число переменных в выражении

подсчитать общее число логических операций в выражении

установить последовательность выполнения логических операций

определить число столбцов в таблице

заполнить шапку таблицы, включив в неё переменные и операции

определить число строк в таблице без шапки: $m = 2^n$

выписать наборы входных переменных

провести заполнение таблицы по столбцам, выполняя логические операции в соответствии с установленной последовательностью

Пример построения таблицы истинности

$$A \vee A \& B$$

$$n = 2, m = 2^2 = 4.$$

Приоритет операций: $\&$, $\vee$



A	B	$A \& B$	$A \vee A \& B$
0	0	0	0
0	1	0	0
1	0	0	1
1	1	1	1

Свойства логических операций



Законы алгебры-логики

Закон исключения
третьего

$$A \& \bar{A} = 0$$

$$A \vee \bar{A} = 1$$

Закон повторения

$$A \& A = A$$

$$A \vee A = A$$

Законы операций
с 0 и 1

$$A \& 0 = 0; A \& 1 = A$$

$$A \vee 0 = A; A \vee 1 = 1$$

Законы общей
инверсии

$$\overline{A \& B} = \bar{A} \vee \bar{B}$$

$$\overline{A \vee B} = \bar{A} \& \bar{B}$$

Доказательство закона



Распределительный закон для логического сложения:

$$A \vee (B \& C) = (A \vee B) \& (A \vee C).$$

<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>B & C</i>	<i>A ∨ (B & C)</i>	<i>A ∨ B</i>	<i>A ∨ C</i>	<i>(A ∨ B) & (A ∨ C)</i>
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	1	0
0	1	0	0	0	1	0	0
0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	1	1
1	0	1	0	1	1	1	1
1	1	0	0	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1

Умножив $(A \vee (B \& C))$ и $((A \vee B) \& (A \vee C))$ на единицу, получим: $(A \vee (B \& C)) \& 1 = ((A \vee B) \& (A \vee C)) \& 1$.
Доказывает распределительный закон.

Решение логических задач

Задача. Коля, Вася и Серёжа гостили летом у бабушки. Однажды один из мальчиков нечаянно разбил любимую бабушкину вазу.

На вопрос, кто разбил вазу, они дали такие ответы:

Серёжа: 1) Я не разбивал. 2) Вася не разбивал.

Вася: 3) Серёжа не разбивал. 4) Вазу разбил Коля.

Коля: 5) Я не разбивал. 6) Вазу разбил Серёжа.

Бабушка знала, что один из её внуков (правдивый), оба раза сказал правду; второй (шутник) оба раза сказал неправду; третий (хитрец) один раз сказал правду, а другой раз - неправду. Назовите имена правдивого, шутника и хитреца.

Кто из внуков разбил вазу?



Решение. Пусть K = «Коля разбил вазу»,
 V = «Вася разбил вазу»,
 C = «Серёжа разбил вазу».

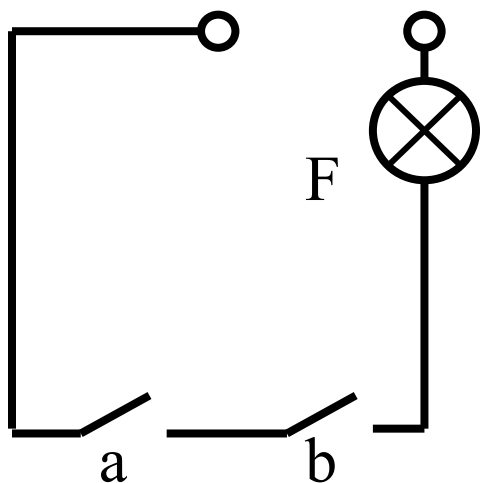
Представим в таблице истинности высказывания каждого мальчика. Так как ваза разбита одним внуком, составим не всю таблицу, а только её фрагмент, содержащий наборы входных переменных: 001, 010, 100.

K	V	C	Утверждение Серёжи		Утверждение Васи		Утверждение Коли	
			$\overline{C}$	$\overline{V}$	$\overline{C}$	K	$\overline{K}$	C
0	0	1	0	1	0	0	1	1
0	1	0	1	0	1	0	1	0
1	0	0	1	1	1	1	0	0

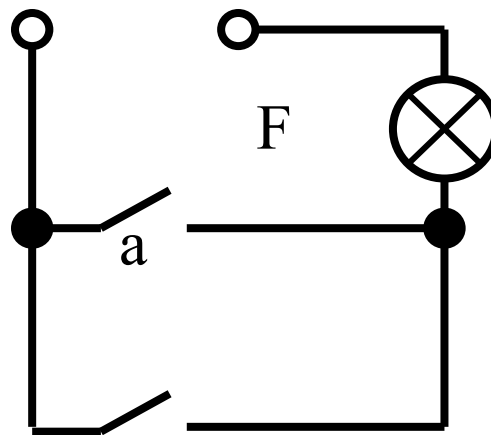
Исходя из того, что знает о внуках бабушка, следует искать в таблице строки, содержащие в каком-либо порядке три комбинации значений: 00, 11, 01 (или 10). Это вторая строка.

Вазу разбил Серёжа, он - хитрец. Шутником оказался Вася. Имя правдивого внука - Коля.

Переключательные схемы



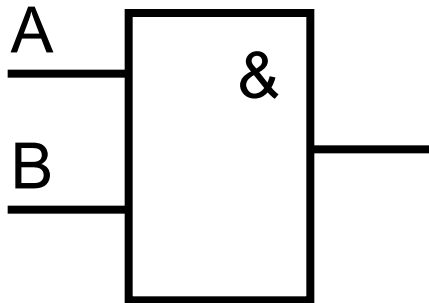
Последовательное соединение



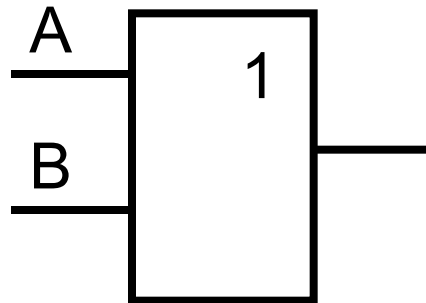
Параллельное соединение

Логические элементы

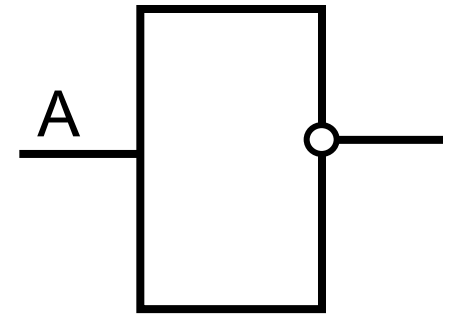
Логический элемент – устройство, которое после обработки двоичных сигналов выдаёт значение одной из логических операций.



И (конъюнктор)



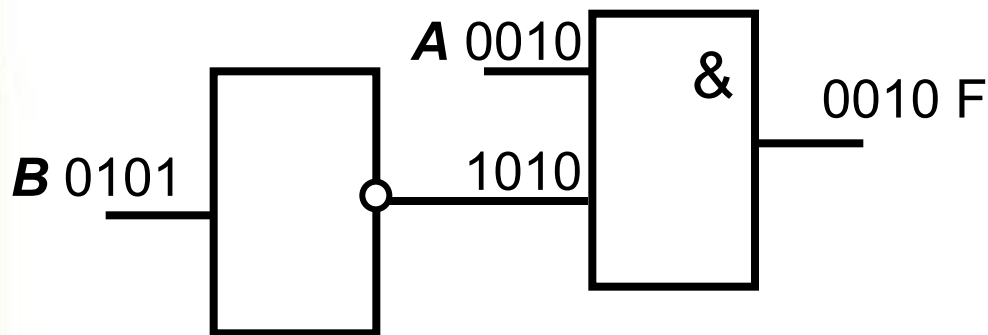
ИЛИ (дизъюнктор)



НЕ (инвертор)

Анализ электронной схемы

Решение. Все возможные комбинации сигналов на входах **A** и **B** внесём в таблицу истинности. Проследим преобразование каждой пары сигналов при прохождении их через логические элементы и запишем полученный результат в таблицу. Заполненная таблица истинности полностью описывает рассматриваемую электронную схему.



A	B	$\overline{B}$	F
0	0	1	0
0	1	0	0
1	0	1	1
0	1	0	0

В инвертор поступает сигнал от входа **B**.

В конъюнктор поступают сигналы от входа **A** и от инвертора. Таким образом, $F = A \& \overline{B}$.

Самое главное

Высказывание — это предложение на любом языке, содержание которого можно однозначно определить как истинное или ложное.

Осн. высказывания	<table><tr><th>A</th><th>$\bar{A}$</th></tr><tr><td>0</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>0</td></tr></table>	A	$\bar{A}$	0	1	1	0	Лог. операции	<table><tr><th>A</th><th>B</th><th>$A \& B$</th><th>$A \vee B$</th></tr><tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr></table>	A	B	$A \& B$	$A \vee B$	0	0	0	0	0	1	0	1	1	0	0	1	1	1	1	1	ад.
A	$\bar{A}$																													
0	1																													
1	0																													
A	B	$A \& B$	$A \vee B$																											
0	0	0	0																											
0	1	0	1																											
1	0	0	1																											
1	1	1	1																											
Инверсия	«не»																													
Конъюнкция	«и», «а», «но», «хотя»			$\&$																										
Дизъюнкция	«или»			$\vee$																										

При вычислении логических выражений сначала выполняются действия в скобках. Приоритет выполнения логических операций: $\neg$, $\&$, $\vee$.



Вопросы и задания

В следующих высказываниях выделите простые высказывания. Объясните, почему, сформулируйте предложения, не являющиеся высказываниями. Запишите в каждом высказывании набор сигналов на входах лампы с помощью знаков логических операций. Составьте таблицу работы схемы. Каким логическим выражением описывается работа лампы? Запишите следующие формулы на обычном языке: а) $A \vee B$, б) $A \wedge B$, в) $A \rightarrow B$, г) $A \leftrightarrow B$, д) $\neg A$, е) $\neg(A \vee B)$, ж) $\neg(A \wedge B)$, з) $\neg(A \rightarrow B)$, и) $\neg(A \leftrightarrow B)$, к) $A \vee \neg A$, л) $A \wedge \neg A$, м) $A \rightarrow \neg A$, н) $A \leftrightarrow \neg A$, о) $A \vee (A \wedge B)$, п) $A \wedge (A \vee B)$, р) $A \rightarrow (A \vee B)$, с) $A \leftrightarrow (A \vee B)$, т) $A \rightarrow (A \wedge B)$, у) $A \leftrightarrow (A \wedge B)$, ф) $A \rightarrow (A \leftrightarrow B)$, х) $A \leftrightarrow (A \leftrightarrow B)$, ц) $A \rightarrow (A \leftrightarrow \neg B)$, ч) $A \leftrightarrow (A \leftrightarrow \neg B)$, ш) $A \rightarrow (A \leftrightarrow \neg \neg B)$, щ) $A \leftrightarrow (A \leftrightarrow \neg \neg B)$, э) $A \rightarrow (A \leftrightarrow \neg \neg \neg B)$, ю) $A \leftrightarrow (A \leftrightarrow \neg \neg \neg B)$, я) $A \rightarrow (A \leftrightarrow \neg \neg \neg \neg B)$, з) $A \leftrightarrow (A \leftrightarrow \neg \neg \neg \neg B)$.

2) Зимой дети катаются на коньках или на лыжах.

3) Проведите аналогию между элементами электрических схем и объектами и операциями алгебры логики:

Электрическая схема	Алгебра логики
а) Контрольная лампа	а) $A \vee B$
б) Переключатель	б) $A \wedge B$
в) Переключатель включен	в) A
г) Переключатель выключен	г) $\neg A$
д) Последовательное соединение переключателей	д) $A \wedge B$
е) Параллельное соединение переключателей	е) $A \vee B$

Вопросы и задания

Алёша, Боря и Гриша нашли в земле старинный сосуд. Разбирается дело Джона Брауна и Смита. Известно, что один из них нашёл и утаил клад. На следствии высказал по два предположения: каждый из подозреваемых сделал два заявления:

1) **Алёша:** «Не делал этого Браун, сделал Смит в V веке».
Джон: «Браун не виновен. Смит сделал это».

2) **Боря:** «Этот сосуд финикийский и изготовлен в III веке».
Браун: «Я не делал этого. Джон не делал этого».

Суд установил, что один из них дважды солгал, другой дважды сказал правду, третий один раз солгал, один раз сказал правду.
3) **Гриша:** «Это сосуд не греческий и изготовлен в IV веке».

Учитель истории сказал ребятам, что каждый из них кто из подозреваемых должен быть оправдан? прав только в одном из двух предположений. Где и в каком веке изготовлен сосуд?



Алёша, Боря и Гриша нашли в земле старинный сосуд. Рассматривая удивительную находку, каждый высказал по два предположения:

Алексей

~~ИСТОЖНА~~

Греческий

~~ИСТОЖНА~~

V век

Боря

~~ИСТОЖНА~~

Финикийский

~~ИСТОЖНА~~

III век

Гриша

~~ИСТОЖНА~~

Не греческий

~~ИСТОЖНА~~

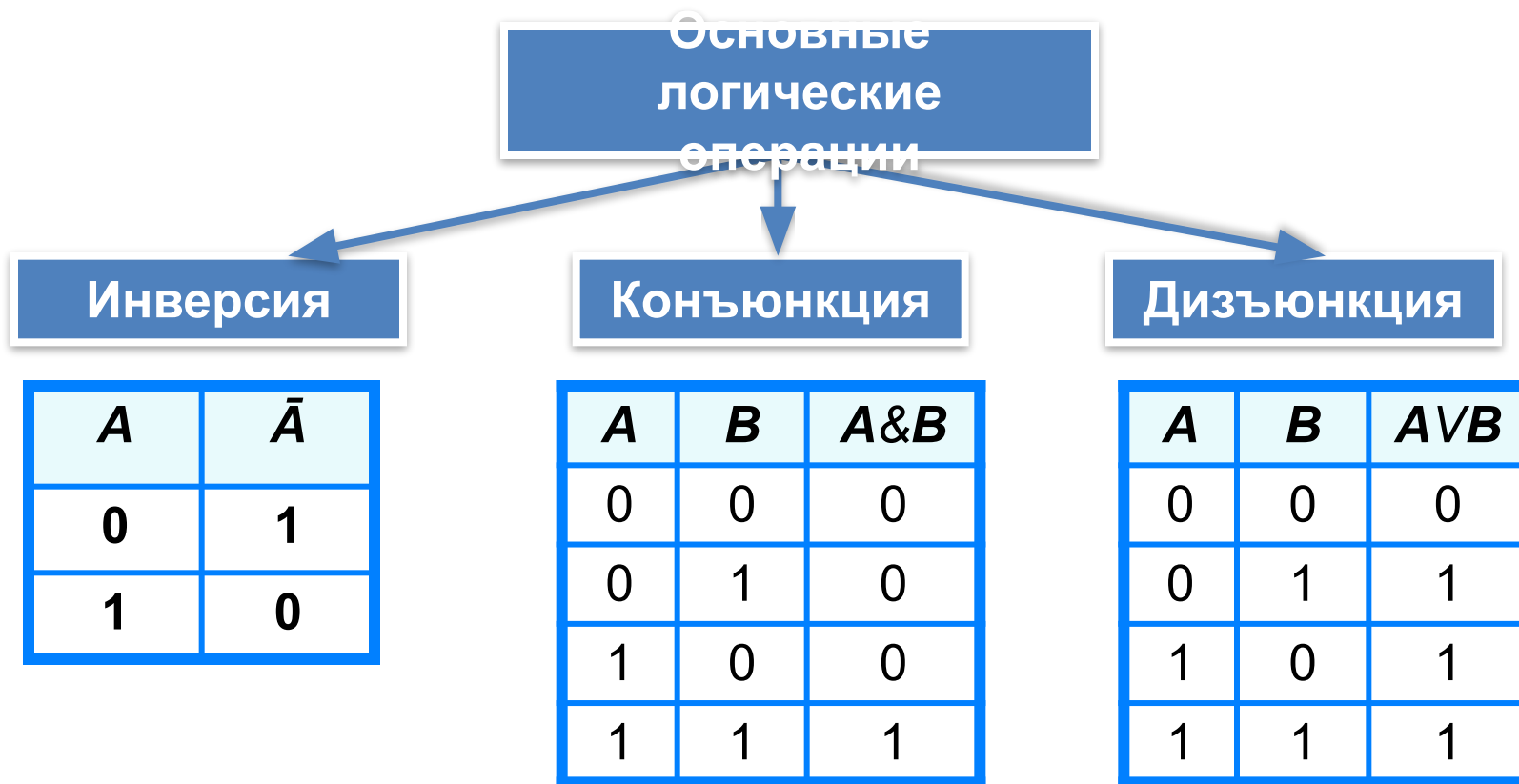
IV век

Предположим 1 высказывание Алексея верно, - сосуд греческий

Предположим 2 высказывание Алексея верно, - V век

Опорный конспект

Высказывание – это предложение на любом языке, содержание которого можно однозначно определить как истинное или ложное.



Приоритет выполнения логических операций: $\neg$, $\&$, $\vee$.

Источники информации

1. <http://school-collection.edu.ru/catalog/res/9e997f40-f285-4369-aa7d-88b892beca45/?interface=catalog&class=51&subject=19> – Элементарные логические операции
2. http://isolde.ucoz.ru/_pu/0/88158062.jpg - Аристотель
3. <http://www.physics.ru/courses/op25part2/content/scientist/images/aristotel.jpg> - Аристотель
4. <http://www.mathematics.ru/courses/algebra/content/scientist/images/boole.jpg> - Джордж Буль
5. <http://www.trinity.se-ua.net/images/shannonc.jpg> - Клод Элвуд Шеннон
6. <http://mdou-teremok.moy.su/kartinki/ab2a40ef409a-1-.png> - мальчик 1
7. <http://falconsscience.files.wordpress.com/2007/10/cartoon-boys.jpg%3Fw%3D283%26h%3D494> – мальчик 2
8. <http://s39.radikal.ru/i085/0811/f0/e7c004f3c68a.png> - мальчик 3