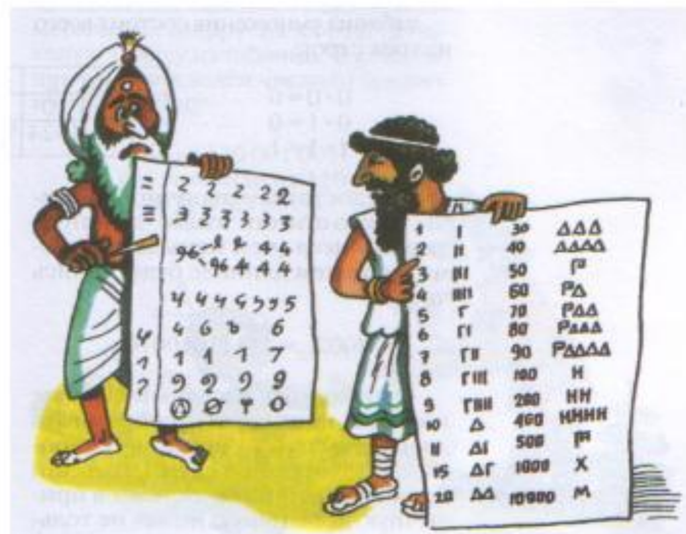
СИСТЕМЫ СЧИСЛЕНИЯ



2016

Парамонов А.И.

Общие понятия

Система счисления — это *способ* записи (представления) чисел.

Система счисления – совокупность приемов обозначения чисел – *язык*, алфавитом которого являются символы (цифры, буквы), а синтаксисом - правило, позволяющее сформулировать запись чисел однозначно.

Запись числа в некоторой системе счисления называется ***кодом числа***.

Общий вид числа: $A = a_n a_{n-1} \ldots a_2 a_1 a_0$

СИСТЕМА СЧИСЛЕНИЯ

- **ПОЗИЦИОННАЯ**
  - Однородная
  - Смешанная
- **НЕПОЗИЦИОННАЯ**

Системы счисления

Позиционные

- Вавилонская шестидесятеричная система
- Двоичная система
- Шестнадцатеричная система
- Десятичная система

Непозиционные

- Единичная (унарная) система
- Римская система
- Древнеегипетская десятичная система
- Алфавитные системы

Непозиционные С/С

С/С, алфавит которых содержит неограниченное количество символов, причем количественный эквивалент любой цифры постоянен, и зависит только от ее начертания.

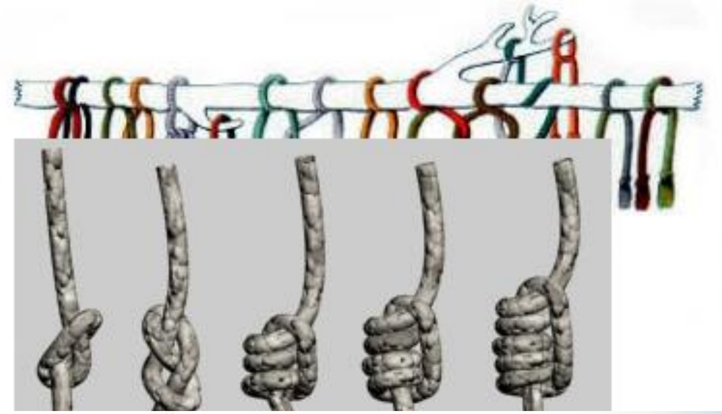
Позиция цифр в числе значения не имеет!

Непозиционные системы строятся по принципу аддитивности, т.е. количественный эквивалент числа

Унарная система счисления

Единичная ("палочная", "унарная") система счисления

Узелковая письменность Инков (кипу)

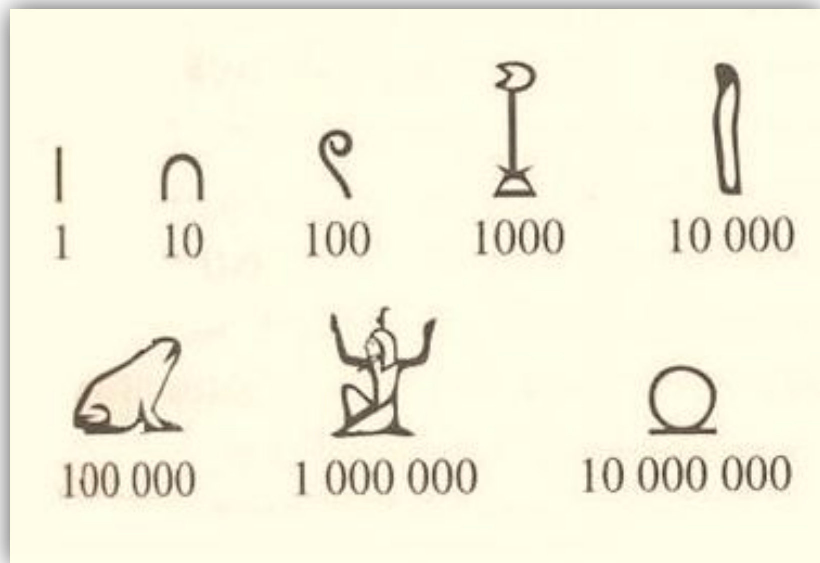


простейшая и самая древняя

1	|
2	||
3	|||
4	||||
5	|||||

Для записи любых чисел используется всего один символ: палочка, узелок, зарубка, камешек.

Египетская система счисления



1. Палочки

10. Путы

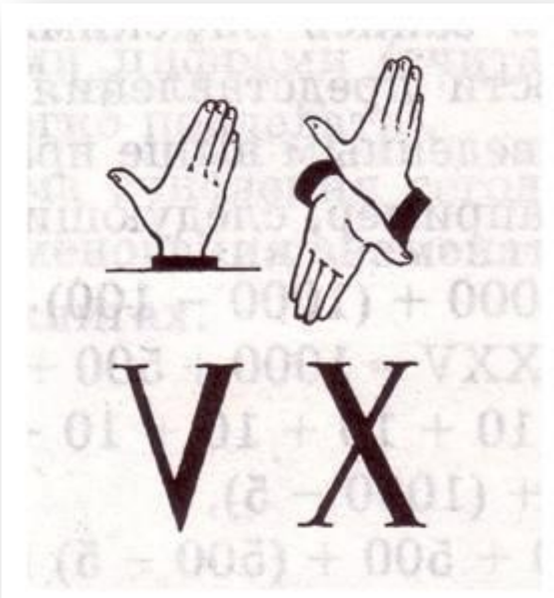
100. Мерная веревка

1000. Цветок лотоса

100 000. Головастик.

10 000 000. Символ Амона Ра, бога Солнца.

Римская система счисления



Единицы	Десятки	Сотни	Тысячи
1 I	10 X	100 C	1000 M
2 II	20 XX	200 CC	2000 MM
3 III	30 XXX	300 CCC	3000 MMM
4 IV	40 XL	400 CD	
5 V	50 L	500 D	
6 VI	60 LX	600 DC	
7 VII	70 LXX	700 DCC	
8 VIII	80 LXXX	800 DCCC	
9 IX	90 XC	900 CM	

Пример:

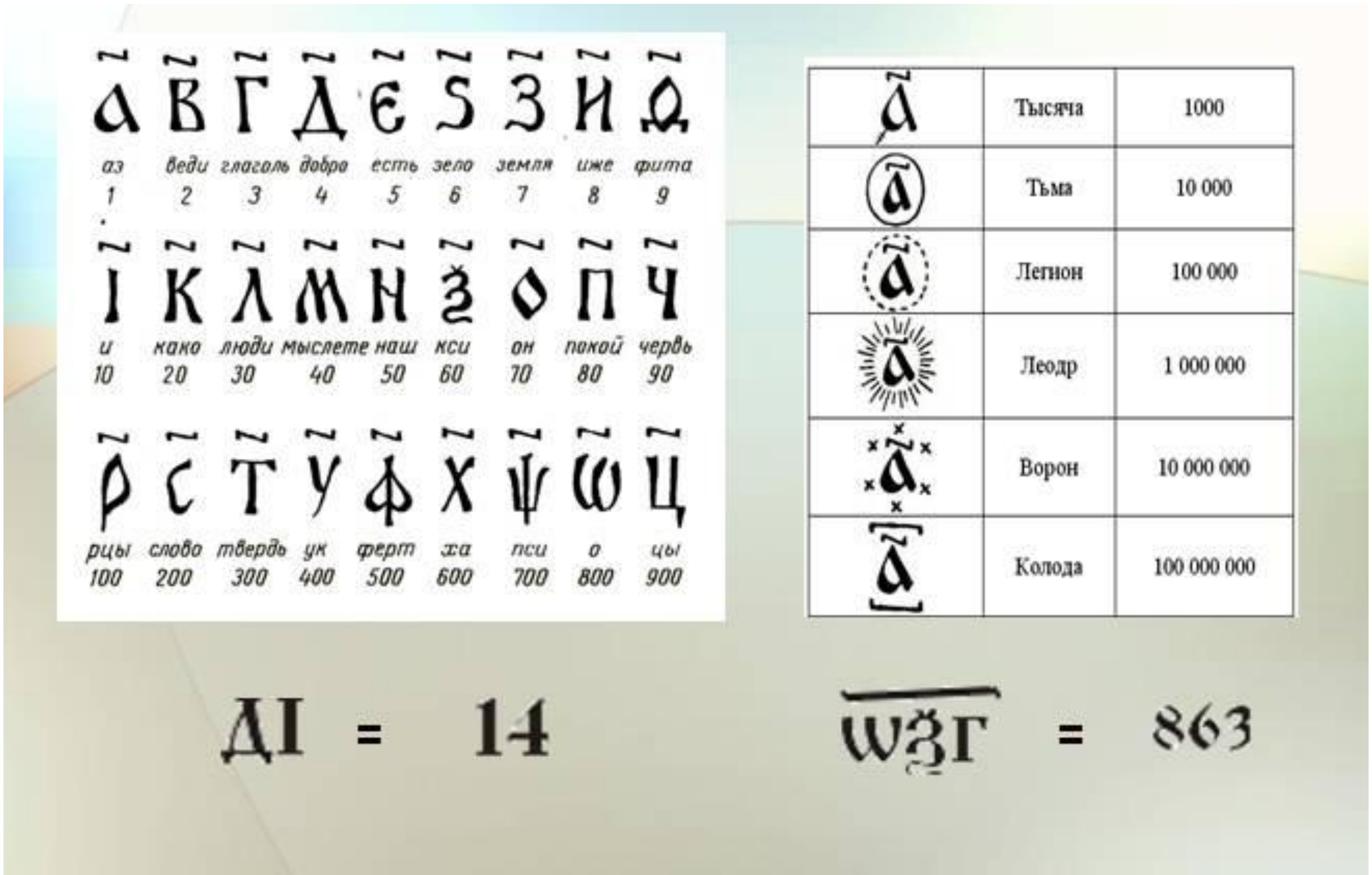
I = 1

II = 2

III = 3

XXXI = 31

Славянская система счисления



Греческая система счисления

I - 1
Г - 5
Δ - 10
Н - 100
Х - 1000
М - 10 000

I, II, III, IIII - 1, 2, 3, 4

Какое число записано?

$$\underbrace{\Delta\,\Delta\,\Delta}_{10+10+10}\;\underbrace{I\,I\,I\,I}_{+\,4} \;=\; 34$$

Позиционные С/С

- ***Позиционные*** – С/С, алфавит которых содержит ограниченное количество символов, причем значение каждой цифры в числе определяется не только ее начертанием, но и ***<u>находится в строгой зависимости от позиции в числе</u>***.

<u>Пример</u>:

$111 = 1*10^2 + 1*10^1 + 1*10^0 = 100 + 10 + 1$

Основное достоинство позиционной системы возможность записи произвольного числа при помощи ограниченного количества символов.

Общие понятия

Отдельную позицию в изображении числа принято называть ***разрядом***,
а номер позиции - ***номером разряда***.

Число разрядов в записи числа называется ***РАЗРЯДНОСТЬЮ*** и совпадает с его длиной.

ОСНОВАНИЕМ системы счисления называется количество различных символов (цифр), используемых в каждом из разрядов числа для его изображения в данной системе счисления.

Позиционные система

- **Однородная система** — для всех разрядов (позиций) числа набор допустимых символов (цифр) одинаков.

Пример: 10-я система. При записи числа в однородной 10-й системе вы можете использовать в каждом разряде исключительно одну цифру от 0 до 9, таким образом, допускается число 450 (1-й разряд — 0, 2-й — 5, 3-й — 4), а 4F5 — нет, поскольку символ F не входит в набор цифр от 0 до 9.

- **Смешанная система** — в каждом разряде (позиции) числа набор допустимых символов (цифр) может отличаться от наборов других разрядов.

Пример: система измерения времени. В разряде секунд и минут возможно 60 различных символов (от «00» до «59»), в разряде часов – 24 разных символа (от «00» до «23»), в разряде суток – 365 и т. д.

Вавилонская система счисления

Десятичная система счисления

- Алфавит 10 цифр: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.
  - Вес более старшего разряда в 10 раз больше.
  - Переполнение разряда наступает, когда его значение становится больше 9 (т.е. больше основания = 10).


Системы счисления,
используемые на компьютере
Двоичная
Троичная
Восьме ричная
Шестна дцатери чная
Цифры: 0,1.
Цифры: 0,1,2.
Цифры: 0,1,2,3, 4,5,6,7.
Цифры: 0,1,2,3 4,5,6,7 8,9,A,B C,D,F.

Двоичная система счисления

- Алфавит две цифры: 0, 1.
  - Вес более старшего разряда в 2 раза больше.
  - Переполнение разряда наступает, когда его значение становится больше 1 (т.е. больше основания = 2).

«Есть 10 типов людей – одни понимают двоичную систему исчисления, а вторые нет»

Тетрады 2-чной системы

0000	0	1000	8
0001	1	1001	9
0010	2	1010	10
0011	3	1011	11
0100	4	1100	12
0101	5	1101	13
0110	6	1110	14
0111	7	1111	15

Тетрады 2-чной системы

0000	0	1000	8
0001	1	1001	9
0010	2	1010	10
0011	3	1011	11
0100	4	1100	12
0101	5	1101	13
0110	6	1110	14
0111	7	1111	15

Представление данных в ЭВМ

- Для хранения каждой отдельной цифры применяется **триггер**, представляющий собой электронную схему.

Он может находится в 2-х состояниях, одно из которых соответствует нулю, другое — единице.

- Для запоминания отдельного числа используется **регистр** — группа триггеров, число которых соответствует количеству разрядов в двоичном числе.

Представление данных в ЭВМ

- Число, содержащееся в регистре — **машинное слово.**
- Арифметические и логические операции со словами осуществляет **арифметико-логическое устройство** (АЛУ).

Для упрощения доступа к регистрам их нумеруют.

- Номер называется **адресом регистра**.

Например,

если необходимо сложить 2 числа — достаточно указать номера ячеек (регистров), в которых они находятся, а не сами числа.

Это часто применяется в программировании…

Адреса записываются в 8- и 16-ричной системах, поскольку переход от них к двоичной системе и обратно осуществляется достаточно просто.

16-ричная система счисления

- Алфавит 16 символов:
  0, 1, …, 8, 9, A, B, C, D, E, F.
  - Вес более старшего разряда в 16 раз больше.
  - Переполнение разряда наступает, когда его значение становится больше F (т.е. 16).

Формы представления чисел

Любое число A в позиционной С/С с основанием p может быть представлено в виде полинома от основания p:

$$A = a_n a_{n-1} a_{n-2} \ldots a_1 a_{0(p)} = a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \ldots + a_1 p^1 + a_0 p^0 = \sum_{i=0}^{n} a_i p^i$$

здесь A – *число,*

a_i – *значение i-того разряда числа,*

p – основание системы счисления.

Свернутая форма

Развернутая форма

875465$_{(\ldots}$ … $0^3 + 4 \cdot 1$

10011101$_{(2)}$ = $1 \cdot 2^7 + 1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^0$

Перевод из одних систем счисления в другие

Общий принцип 1:

чтобы перевести число в некоторую систему счисления с основанием М (цифрами 0, ..., М-1), *иначе говоря, в М-ичную систему счисления,* нужно представить его в виде:

$$\boldsymbol{A = a_n * M^n + a_{n-1} * M^{n-1} + \ldots + a_1 * M + a_0.}$$

a_i - цифры числа, из соответствующего диапазона,
a_n - первая цифра,
a_0 - последняя.

Перевод из одних систем счисления в другие

Общий принцип 2:

Если основание одной системы - степень другого *(например, 2 и 16)*, то перевод можно делать на основании таблиц.

Теорема:

Если $\mathbf{P=Q^n}$ (P,Q,n – целые положительные числа, при этом P и Q — основания С/С), то запись любого числа в смешанной (P-Q)-ой системе счисления тождественно совпадает с записью этого же числа в системе счисления с основанием Q.

Следствие теоремы:
Правила перевода между системами P и Q

- Для перевода из Q-й в P-ю, необходимо число в Q-й системе, разбить на группы по n цифр, начиная с правой цифры, и каждую группу заменить одной цифрой в P-й системе.

- Для перевода из P-й в Q-ю, необходимо каждую цифру числа в P-й системе перевести в Q-ю и заполнить недостающие разряды ведущими нулями, за исключением левого, так, чтобы каждое число в системе с основанием Q состояло из n цифр

если **$P=Q^n$**

Пример

2 -> 16 :

т.е. ***$16 = 2^4$*** , то собираем с конца двоичного числа <u>четверки</u> чисел («тетрады»), каждая четверка – одна из цифр в 16-ричной С/С. Результат записываем в свернутой форме.

16 -> 2 :

наоборот. Создаем двоичные четверки по таблице и записываем результат в свернутой форме (*и не забывайте незначащие 0 в «тетрадах»!!!*).

Пример: перевод из двоичной системы счисления в восьмеричную

Возьмем двоичное число, **10011110_2**

разобьем его справа налево на группы по 3 цифры («триады»), $\underline{010}$ $\underline{011}$ $\underline{110}$

по таблице переведем «триады» в восьмеричные цифры, 2_8 3_8 6_8

236_8

записываем свернутую форму полученного числа …

Перевод в десятичную систему счисления

Перевод целого числа из *М*-ичной системы счисления в десятичную осуществляется путем представления числа в виде степенного ряда с основанием ***М***, то есть число записывается в развернутой форме.

Затем подсчитывается значение суммы ряда, при этом все арифметические действия осуществляются уже в десятичной системе.

Перевод в десятичную С/С

Вычисляем

$$A_{(10)} = a_n * M^n + a_{n-1} * M^{n-1} + \ldots + a_1 * M^1 + a_0$$

где М - старое основание.

Вычисления идут в новой системе счисления!

Например: из (2) в (10)

5 4 3 2 1 0

100101$_{(2)}$ =

$1*2^5 + 0*2^4 + 0*2^3 + 1*2^2 + 0*2^1 + 1*2^0 = 32+4+1 =$ **37**$_{(10)}$

Примеры:

- *Перевести* **10101101** $_{(2)} \to X_{10}$

$10101101_{(2)}=1*2^7+0*2^6+1*2^5+0*2^4+1*2^3+1*2^2+0*2+1=$

Ответ: **173** $_{10}$

- *Перевести* ***703*** $_{(8)} \to X_{10}$

$703_8 = 7*8^2+0*8^1+3*8^0 = \ldots$

Ответ: ***451*** $_{10}$

- Перевести **B2E** $_{(16)} \to X_{10}$

$B2E_{16} = 11*16^2+2*16^1+14*16^0 =$

Ответ: **2862** $_{10}$

Пример: перевод из двоичной в восьмеричную

Возьмем двоичное число: $\mathbf{10011110_2}$,

разобьем его справа налево на группы по 3 цифры («триады»): 010 011 110

умножим каждый разряд на 2^n (где n — номер разряда):
010 011 110 = $(0*2^2+1*2^1+0*2^0)$ $(0*2^2+1*2^1+1*2^0)$ $(1*2^2+1*2^1+0*2^0)$ = 236_8.

Получим: $10011110_2 = 236_8$.

Схема ГОРНЕРА

позволяет минимизировать арифметические операции и исключить возведение в степень.

$$(a_n a_{n-1} a_{n-2} \ldots a_1 a_0)_p = (\ldots(a_n \cdot p + a_{n-1}) \cdot p + a_{n-2}) \cdot p + \ldots) + a_1) \cdot p + a_0.$$

Алгоритм:

старшую цифру умножаем на основание, добавляем вторую цифру, результат умножаем на основание, добавляем третью цифру и так до тех пор, пока не прибавим последнюю цифру. Результатом будет десятичная запись числа.

Пример:

а) Перевести $10101101_2 \to X_{10}$.

$$10101101_2 = 1\cdot 2^7 + 0\cdot 2^6 + 1\cdot 2^5 + 0\cdot 2^4 + 1\cdot 2^3 + 1\cdot 2^2 + 0\cdot 2^1 + 1\cdot 2^0 =$$

$$= ((((((1\cdot 2+0)\cdot 2+1)\cdot 2+0)\cdot 2+1)\cdot 2+1)\cdot 2+0)\cdot 2+1 = 173_{10}$$

Ответ: $10101101_2 = 173_{10}$.

б) Перевести $703_8 \to X_{10}$.

$$703_8 = (7\cdot 8+0)\cdot 8+3 = 451_{10}$$

Ответ: $703_8 = 451_{10}$.

в) Перевести $B2E_{16} \to X_{10}$.

$$B2E_{16} = (11\cdot 16+2)\cdot 16+14 = 2862_{10}.$$

Ответ: $B2E_{16} = 2862_{10}$.

Перевод из десятичной системы счисления

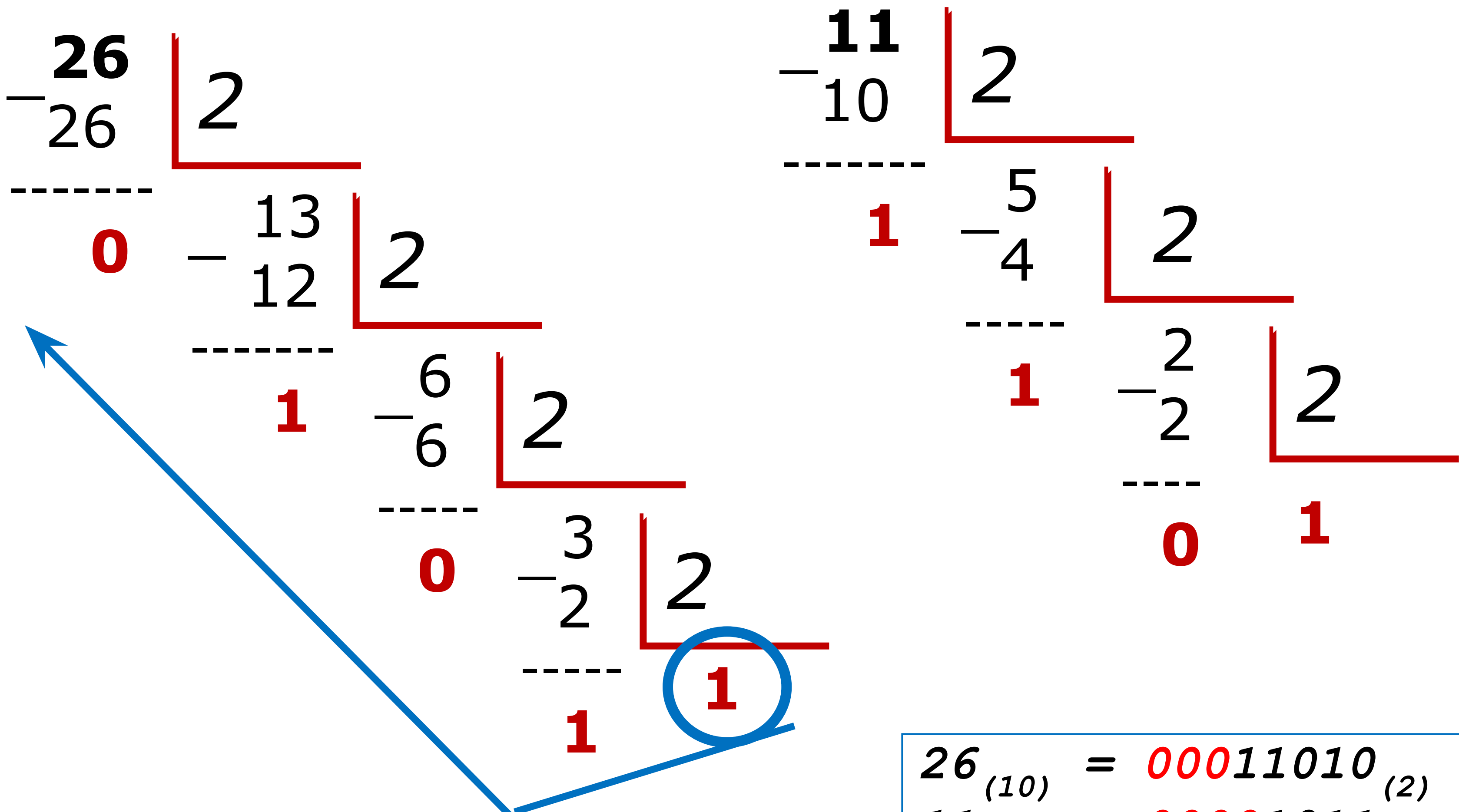
Чтобы найти такое представление, необходимо:

1. разделить число нацело на М (основание С/С, в которую переводим), остаток – цифра a_0 (значение младшего разряда).
2. взять частное и проделать с ним шаг 1, остаток будет a_1 и т.д.

Деление продолжают до тех пор, пока частное не станет меньше делителя, т.е. основания С/С, в которую переводим.

Значение последнего частного будет старшим разрядом.

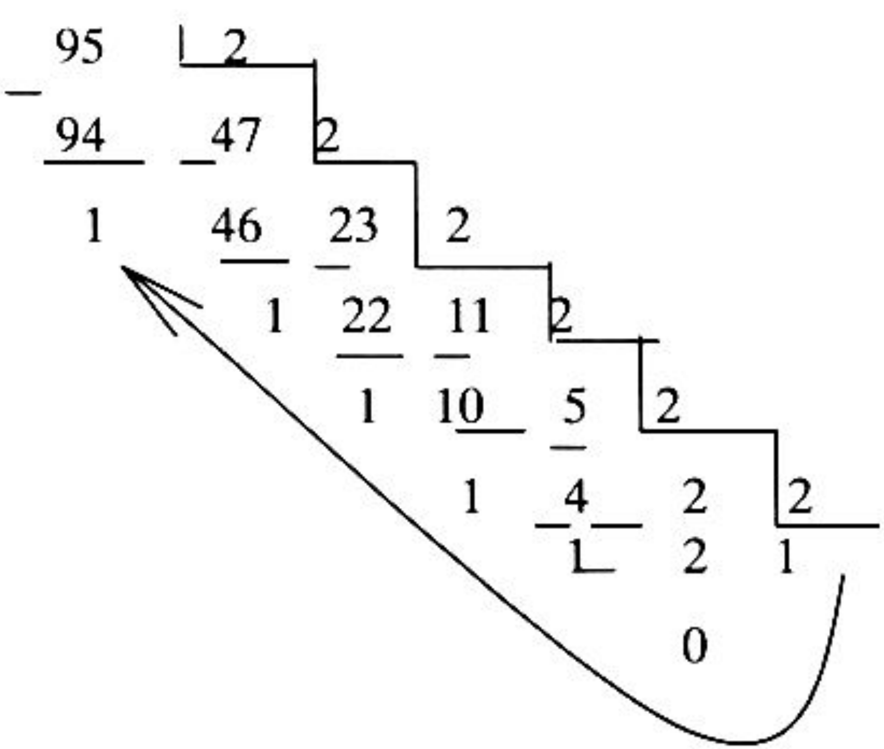
Пример: $26_{(10)} \rightarrow X_{(2)}$, $11_{(10)} \rightarrow Y_{(2)}$???



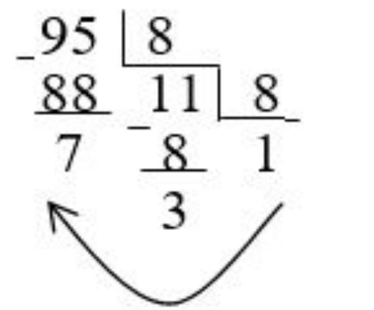
$26_{(10)} = 00011010_{(2)}$

$11_{(10)} = 00001011_{(2)}$

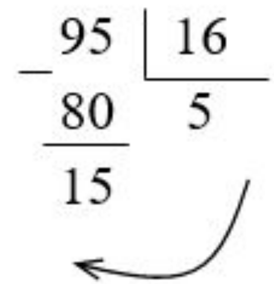
Пример: **95**$_{(10)}$ → $X_{(2)}$ → $Y_{(8)}$ → $Z_{(16)}$?



$95_{10} \Rightarrow 1011111_2$



$95_{10} \Rightarrow 137_8$



$95_{10} = 5F_{16}$

Пример: Требуется перевести число **139**$_{(10)}$ в 2-ную, 8-ную, 4-ную С/С.

1) 139/2 -> 69/ 34/ 17/ 8/ 4/ 2/ 1 / 0 – частное,

1 1 0 1 0 0 0 1 – остаток.

10001011$_2$ = $1*2^7+1*2^3+1*2^1+1*2^0$ = **139**$_{10}$

2) 139/8 = 17, остаток 3, 17/8 = 2, остаток 1,
2/8 = 0, остаток 2.

213$_8$ = $2*8^2+1*8^1+3*8^0$ = 128+8+3 = **139**$_{10}$

3) 139/4 = 34, остаток 3, 34/4 = 8, остаток 2,

8/4 = 2, остаток 0, 2/4 = 0, остаток 2.

2023$_4$ = $2*4^3+2*4^1+3*4^0$ = 128+8+3 = **139**$_{10}$

Перевод дробей

Перевод правильной дроби из десятичной С/С в *P*-ичную осуществляется последовательным умножением на основание той системы, в которую осуществляется перевод.

Умножение выполняется **до тех пор, пока**:

- или дробная часть произведения не станет равной нулю,
- или не будет достигнута требуемая точность,
- или не выделится период.

При этом умножаются только дробные части.

Дробь в новой С/С записывается в виде последовательности целых частей произведений, начиная с первого.

Примеры перевода правильной десятичной дроби **0.36:**

а) в двоичную	**б) в восьмеричную**	**в) в шестнадцатеричную**
*0,36	*0,36	*0,36
2	8	16
*0.72	*2.88	*5.76
2	8	16
*1.44	*7.04	12.16
2	8	16
*0.88	*0.32	*2.56
2	8	16
1.76	2.56	8.96
$0.36 \Rightarrow 0.0101_2$	$0.36 \Rightarrow 0.2702_8$	$0.36 \Rightarrow 0{,}5C28_{10}$

Примеры:

а) Перевести $03125_{10} \rightarrow X_8$.

$$
\begin{array}{c|l}
\mathbf{0} & 3125 \times 8 \\
\hline
\mathbf{2} & 5000 \times 8 \\
\mathbf{4} & 0000
\end{array}
$$

Ответ: $0.3125_{10} = 0.24_8$.

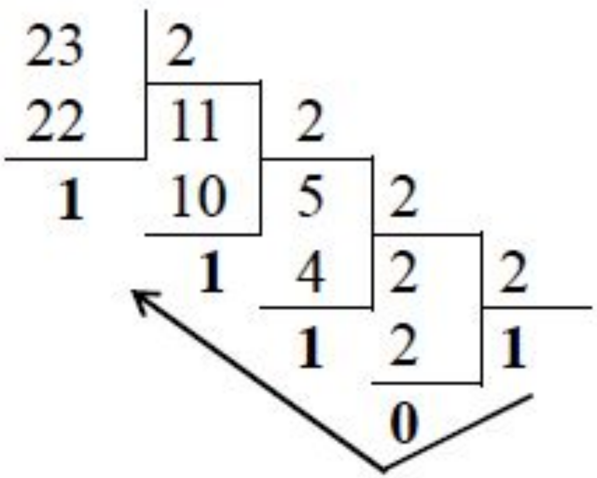
б) Перевести $0.65_{10} \rightarrow X_2$.

$$
\begin{array}{c|l}
\mathbf{0} & 65 \times 2 \\
\hline
\mathbf{1} & 3 \times 2 \\
\mathbf{0} & 6 \times 2 \\
\mathbf{1} & 2 \times 2 \\
\mathbf{0} & 4 \times 2 \\
\mathbf{0} & 8 \times 2 \\
\mathbf{1} & 6 \times 2 \\
 & \ldots
\end{array}
$$

Ответ: $0.65_{10} \approx 0.10(1001)_2$.

Перевести $23.125_{10} \rightarrow X_2$

1) Переведем целую часть:



2) Переведем дробную часть:

0	125×2
0	$25 \quad \times 2$
0	$5 \quad \times 2$
1	0

Таким образом $23_{10} = 10111_2$; $0.125_{10} = 0.001_2$.

Ответ: $23.125_{10} = 10111.001_2$.

Преобразование дроби из любой системы счисления в десятичную

Преобразование осуществляется также, как и для целых частей, за исключением того, что цифры числа умножаются на основание в отрицательной степени («-n», где n начинается от 1).

Пример:

101,011 $_{(2)}$ =

$= (1*2^2 + 0*2^1 + 1*2^0) + (0*2^{-1} + 1*2^{-2} + 1*2^{-3}) =$

$= (5) + (0 + 0{,}25 + 0{,}125) =$ **5,375** $_{(10)}$

Пример перевода дробей в 10 с/с

Перевести $1001101.1101_2 \rightarrow X_{10}$.

$$1001101.1101_2 = 2^6 + 2^3 + 2^2 + 2^0 + 2^{-1} + 2^{-2} + 2^{-4} = 77.8125_{10}$$

Ответ: $1001101.1101_2 = 77.8125_{10}$.

Замечания:

- Целые числа остаются целыми, а правильные дроби – правильными в любой системе счисления.

- Конечной десятичной дроби в другой системе счисления может соответствовать бесконечная (иногда периодическая) дробь.

  В этом случае количество знаков в представлении дроби в новой системе берется *в зависимости от требуемой точности*.

Перевод из восьмеричной в шестнадцатеричную систему и обратно осуществляется через двоичную систему

(с помощью триад и тетрад)

$F4F{,}88_{(16)} = 1111\ 0100\ 1111{,}\ 1000\ 1000_{(2)} =$

$111\ 101\ 001\ 111{,}\ 100\ 010_{(2)} = 7517{,}42_{(8)}$

Двоичная система счисления широко используется в информатике и вычислительной технике, поэтому полезным оказывается знание первых шестнадцати степеней двойки:

$2^3 = 8;$ $2^7 = 128;$ $2^{11} = 2048;$ $2^{15} = 32\,768;$

$2^4 = 16;$ $\boxed{2^8 = 256;}$ $2^{12} = 4096;$ $2^{16} = 65\,536.$

$2^5 = 32;$ $2^9 = 512;$ $2^{13} = 8192;$

$2^6 = 64;$ $2^{10} = 1024;$ $2^{14} = 16\,384;$

Задачка

- Учитель утверждает, что в его классе 100 учеников, при этом их них 32 мальчика и 24 девочки.

Возможно ли такое?

Пусть X – основание системы счисления

$100 = X^2$

$32 = 3*x+2$

$24 = 2*x+4$

$X*X - 5*X - 6 = 0$; $X = ?$

Ответ: ДА, в *шестеричной* с/с !

двоично-десятичная система

- В такой системе каждая десятичная цифра кодируется определенной комбинацией цифр двоичной системы.
- Обозначение каждой десятичной цифры называется ***тетрадой***.

Примеры:

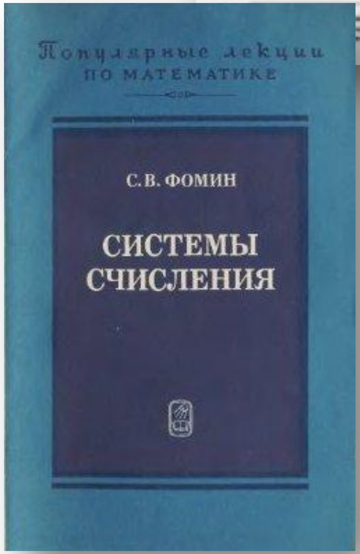
$125_{10} = 0001\ \ 0010\ \ 0101_{2\text{-}10}$ (3 тетрады)

0000 = 0	0100 = 4	1000 = 8
0001 = 1	0101 = 5	1001 = 9
0010 = 2	0110 = 6	
0011 = 3	0111 = 7	

Литература для самостоятельной работы

- Гашков С.Б. **Системы счисления и их применение**. Серия: Библиотека «Математическое просвещение». // М.: МЦНМО, 2004. - 52 с.: ил.

- Фомин С. В. **Системы счисления.** Серия «Популярные лекции по математике», выпуск 40. // М.: Наука, 1987. - 48 с.



Задачи для программирования:

- Циклические сдвиги http://www.e-olymp.com/ru/problems/27
- A + B в двоичной с/с http://www.e-olymp.com/ru/problems/1001
- Римские числа http://www.e-olymp.com/ru/problems/7
- Единицы http://www.e-olymp.com/ru/problems/622
- Коды Грея http://www.e-olymp.com/ru/problems/1780
- Системы счисления http://www.e-olymp.com/ru/problems/1008
- Какая система счисления?
  http://www.e-olymp.com/ru/problems/1377

http://www.e-olymp.com/