

Тема 4:

Часть 3:

Расчет максимального отношения сигнал-шум на выходе оптимального приемника.
Оптимальное обнаружение и различение сигналов.

Максимальное отношение сигнал-шум на выходе коррелятора

Пример: корреляционный приемник для оценки задержки импульса

Принимаемое
колебание

$$y(t) = s(t - \tau_0) + n(t)$$

$$\hat{\tau} = \arg \max_{\tau \in [\tau_{\min}, \tau_{\max}]} R(\tau) = \arg \max_{\tau \in [\tau_{\min}, \tau_{\max}]} \left(\int_0^T y(t) s_{\tau}(t) dt \right) = \arg \max_{\tau \in [\tau_{\min}, \tau_{\max}]} q(\tau)$$

Корреляционный
интеграл

$$q_c(\tau) = \frac{2}{G_0} \int_0^T s(t - \tau_0) s(t - \tau) dt$$

$$q(\tau) = \frac{2}{G_0} \int_0^T y(t) s(t - \tau) dt = q_c(\tau) + q_{\text{ш}}(\tau)$$

- сигнальная функция
(регулярная)

$$q_{\text{ш}}(\tau) = \frac{2}{G_0} \int_0^T n(t) s(t - \tau) dt$$

- шумовая функция
(случайная)

Максимальное отношение сигнал-шум по
напряжению:

$$\rho_{\max} = \frac{q_{c \max}}{\sigma_{q_{\text{ш}}}}$$

Вычисление максимума сигнальной функции $q_{\text{с max}}$

Сигнальная функция как скалярное произведение векторов:

$$q_{\text{с}}(\tau) = \frac{2}{G_0} \int_0^T s(t - \tau_0) s(t - \tau) dt = \frac{2}{G_0} (\mathbf{s}_{\tau_0}, \mathbf{s}_{\tau})$$

$$\left. \begin{aligned} \|\mathbf{s}_{\tau}\| &= \sqrt{(\mathbf{s}_{\tau}, \mathbf{s}_{\tau})} = \sqrt{\int_0^T s^2(t - \tau) dt} = \sqrt{E_{\text{с}}} \\ \|\mathbf{s}_{\tau_0}\| &= \sqrt{(\mathbf{s}_{\tau_0}, \mathbf{s}_{\tau_0})} = \sqrt{\int_0^T s^2(t - \tau_0) dt} = \sqrt{E} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \|\mathbf{s}_{\tau}\| = \|\mathbf{s}_{\tau_0}\| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\mathbf{s}_{\tau_0}, \mathbf{s}_{\tau}) = \max_{\tau} (\mathbf{s}_{\tau_0}, \mathbf{s}_{\tau}) \text{ , т.е. } \sup_{\tau} (\mathbf{s}_{\tau_0}, \mathbf{s}_{\tau}) \quad (s(t - \tau) = s(t - \tau_0))$$

$$q_{\text{с max}} = q_{\text{с}}(\tau_0) = \frac{2}{G_0} \int_0^T s(t - \tau_0)^2 dt = \frac{2E_{\text{с}}}{G_0}$$

Вычисление СКО шумовой функции $\sigma_{q_{\text{ш}}}$

Дисперсия шумовой функции:

$$q_{\text{ш}}(\tau) = \frac{2}{G_0} \int_0^T n(t)s(t-\tau)dt$$

так как $\overline{q_{\text{ш}}(\tau)} = 0$, то $\sigma_{q_{\text{ш}}}^2 = \overline{q_{\text{ш}}^2(\tau)} = \frac{2}{G_0} \int_0^T n(t_1)s(t_1-\tau)dt_1 \cdot \frac{2}{G_0} \int_0^T n(t_2)s(t_2-\tau)dt_2 =$

$$= \sigma_{q_{\text{ш}}}^2 = \left(\frac{2}{G_0} \right)^2 \int_0^T \int_0^T \overline{n(t_1)n(t_2)} s(t_1-\tau)s(t_2-\tau)dt_1dt_2$$

АКФ шума $\overline{n(t_1)n(t_2)} = K_n(t_2 - t_1) = K_n(x) = \frac{G_0}{2} \delta(x)$

$$\begin{aligned} \sigma_{q_{\text{ш}}}^2 &= \left(\frac{2}{G_0} \right)^2 \int_0^T \int_0^T \frac{G_0}{2} \delta(t_2 - t_1) s(t_1 - \tau) s(t_2 - \tau) dt_1 dt_2 = \frac{2}{G_0} \int_0^T s(t_1 - \tau) \left[\int_0^T \delta(t_2 - t_1) s(t_2 - \tau) dt_2 \right] dt_1 = \\ &= \frac{2}{G_0} \int_0^T s(t_1 - \tau)^2 dt_1 = \frac{2E_c}{G_0} \Rightarrow \sigma_{q_{\text{ш}}} = \sqrt{\frac{2E_c}{G_0}} \end{aligned}$$

$s(t_1 - \tau)$

$$\rho_{\text{max}} = \frac{q_{\text{c max}}}{\sigma_{q_{\text{ш}}}} = \sqrt{\frac{2E_c}{G_0}}$$

Оптимальное обнаружение сигнала

(полностью известный сигнал)

Принятая смесь сигнала и шума

$$y(t) = \lambda s(t) + n(t) = s_{\lambda}(t) + n(t)$$

$$\lambda = \begin{cases} 1 & \text{если сигнал есть} \\ 0 & \text{если сигнала нет} \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} \text{обнаружение} \\ \text{сигнала} \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \text{оценка} \\ \text{параметра } \lambda \end{bmatrix}$$

Апостериорная вероятность параметра

λ

$$p_{ps}(\lambda) = p^{q(\lambda)} e^{-\frac{E_c(\lambda)}{G_0}} p_{pr}(\lambda)$$

$$q(\lambda) = \frac{2}{G_0} \int_0^T y(t) \lambda s(t) dt -$$

$$E_c(\lambda) = \frac{2}{G_0} \int_0^T \lambda^2 s^2(t) dt -$$

Оптимальное обнаружение сигнала

(полностью известный сигнал)

$$\lambda = 1$$

$$s_{\lambda}(t) = \lambda s(t) = s(t)$$

$$q(1) = \frac{2}{G_0} \int_0^T y(t)s(t)dt \stackrel{def}{=} q$$

$$E_c(1) = \int_0^T s^2(t)dt \stackrel{def}{=} E_c$$

$$p_{ps}(1) = p^q e^{-\frac{E_c}{G_0}} p_{pr}(1)$$

$$\lambda = 0$$

$$s_{\lambda}(t) = \lambda s(t) = 0$$

$$q(0) = 0$$

$$E_c(0) = 0$$

$$p_{ps}(0) = p_{pr}(0)$$

Оптимальное обнаружение сигнала

(полностью известный сигнал)

Оценка
параметра

$$\hat{\lambda} = \begin{cases} \text{сигнал есть), если } p_{ps}(1) > p_{ps}(0) \\ \text{сигнала нет), если } p_{ps}(1) < p_{ps}(0) \end{cases}$$

Случай, когда $p_{ps}(1) > p_{ps}(0)$

$$c e^q e^{-\frac{E_c}{G_0}} p_{pr}(1) > c p_{pr}(0) \Rightarrow e^q > \frac{p_{pr}(0)}{p_{pr}(1)} e^{\frac{E_c}{G_0}} \Rightarrow q > \ln \frac{p_{pr}(0)}{p_{pr}(1)} + \frac{E_c}{G_0}$$

$$p_{pr}(1) \stackrel{\text{def}}{=} p_{pr} \Rightarrow p_{pr}(0) = 1 - p_{pr}$$

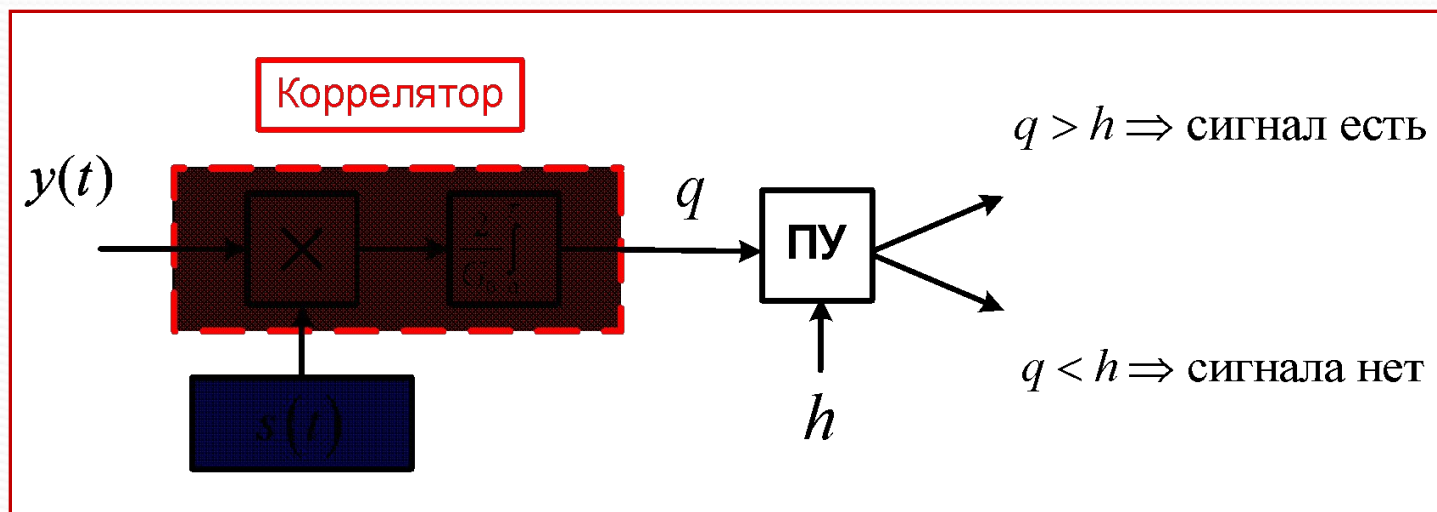
Алгоритм оптимального
обнаружения

$$q = \frac{2}{G_0} \int_0^T y(t)s(t)dt > \ln \frac{1 - p_{pr}}{p_{pr}} + \frac{E_c}{G_0}$$

порог h

Оптимальный корреляционный обнаружитель

(полностью известный сигнал)



Оптимальный порог

$$h = \frac{E_c}{G_0} + \ln \frac{1 - p_{pr}}{p_{pr}}$$

Характеристики оптимального обнаружителя

(полностью известный сигнал)

Возможные ситуации при обнаружении

обнаружения

$\hat{\lambda}$	λ	1	0
1		правильное обнаружение $P_{\text{обн}}$	ложное срабатывание [ложная тревога (ЛТ)] $P_{\text{ЛТ}}$
0		пропуск сигнала $P_{\text{проп}}$	правильное необнаружение $P_{\text{необн}}$

$$P_{\text{проп}} + P_{\text{обн}} = 1$$

$$P_{\text{необн}} + P_{\text{ЛТ}} = 1$$

Независимые вероятности:

$$P_{\text{обн}} = P\{q > h | \lambda = 1\} \text{ — обнаружение (Detection) —}$$

$$P_{\text{ЛТ}} = P\{q > h | \lambda = 0\} \text{ — ложная тревога (False Alarm) —}$$

Характеристики оптимального обнаружителя

(полностью известный сигнал)

Статистические характеристики корреляционного интеграла

Корреляционный интеграл $q(\lambda) = \frac{2}{G_0} \int_0^T y(t)s(t)dt = \frac{2}{G_0} \int_0^T [\lambda s(t) + n(t)]s(t)dt =$

$$= \lambda \frac{2}{G_0} \int_0^T s^2(t)dt + \frac{2}{G_0} \int_0^T n(t)s(t)dt = \lambda \frac{2E_c}{G_0} + q_{\text{ш}}$$

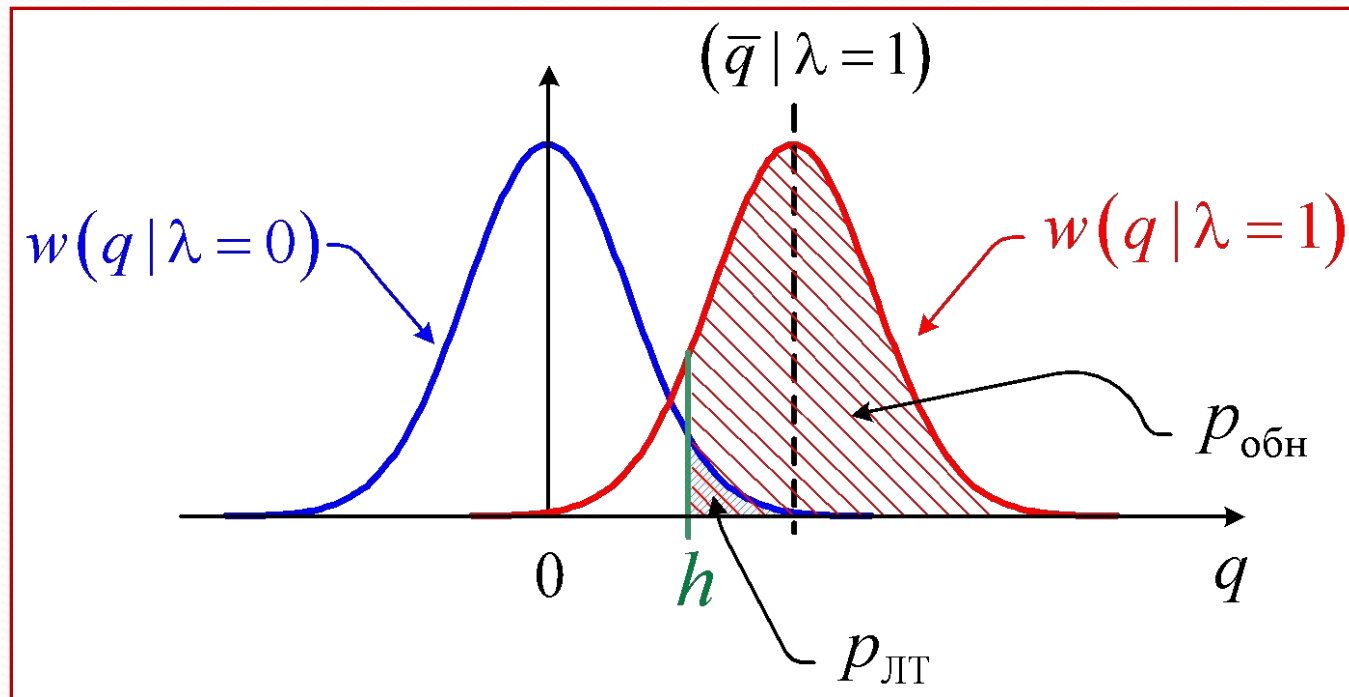
$$\left. \begin{array}{l} \overline{q_{\text{ш}}} = 0 \\ \mathbf{D}\{q_{\text{ш}}\} = \frac{2E_c}{G_0} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{ll} \text{мат.ожидание} & \overline{q(\lambda)} = (\bar{q} | \lambda) = \lambda \frac{2E_c}{G_0} \\ \text{дисперсия} & \mathbf{D}\{q(\lambda)\} = \sigma_q^2 = \frac{2E_c}{G_0} \end{array} \right.$$

Условная плотность вероятности корреляционного интеграла:

$$w(q | \lambda) = \frac{1}{\sigma_q \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(q - (\bar{q} | \lambda))^2}{2\sigma_q^2}}$$

Характеристики оптимального обнаружителя

(полностью известный сигнал)



Вероятность ложной тревоги

$$p_{\text{ЛТ}} = \mathbf{P}\{q > h | \lambda = 0\} = \int_h^{\infty} w(q | \lambda = 0) dq$$

Вероятность обнаружения

$$p_{\text{обн}} = \mathbf{P}\{q > h | \lambda = 1\} = \int_h^{\infty} w(q | \lambda = 1) dq$$

Характеристики оптимального обнаружителя

(полностью известный сигнал)

Вероятность ложной тревоги

$$\begin{aligned} p_{\text{ЛТ}} &= \int_h^{\infty} w(q | \lambda = 0) dq = \\ &= 1 - \int_{-\infty}^h w(q | \lambda = 0) dq = \\ &= 1 - \int_{-\infty}^h \frac{1}{\sigma_q \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{q^2}{2\sigma_q^2}} dq = \\ &= 1 - \Phi\left(\frac{h}{\sigma_q}\right) = 1 - \Phi\left(h / \sqrt{\frac{2E_c}{G_0}}\right) \end{aligned}$$

$$p_{\text{ЛТ}} = 1 - \Phi\left(\frac{h}{\sigma_q}\right)$$

Вероятность обнаружения

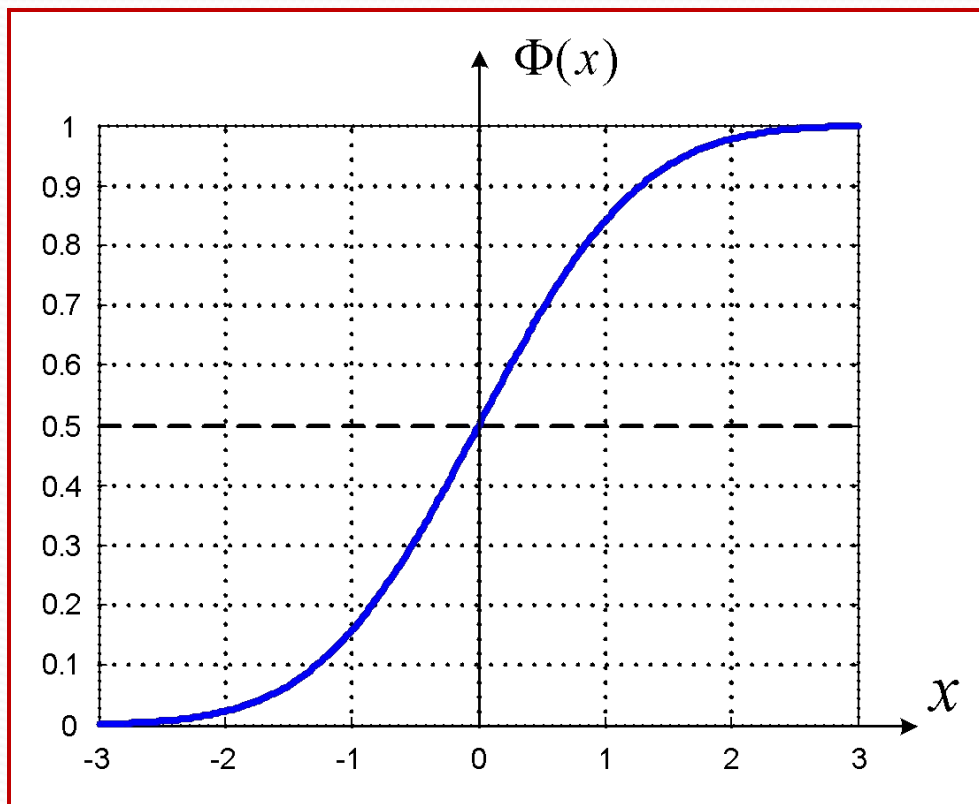
$$\begin{aligned} p_{\text{обн}} &= \int_h^{\infty} w(q | \lambda = 1) dq = 1 - \int_{-\infty}^h w(q | \lambda = 1) dq = \\ &= 1 - \int_{-\infty}^h \frac{1}{\sigma_q \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(q - (\bar{q} | \lambda = 1))^2}{2\sigma_q^2}} dq = 1 - \Phi\left(\frac{h - (\bar{q} | \lambda = 1)}{\sigma_q}\right) = \\ &= 1 - \Phi\left(\frac{h - \frac{2E_c}{G_0}}{\sqrt{\frac{2E_c}{G_0}}}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{h}{\sqrt{\frac{2E_c}{G_0}}} - \sqrt{\frac{2E_c}{G_0}}\right) \end{aligned}$$

$$p_{\text{обн}} = 1 - \Phi\left(\frac{h}{\sigma_q} - \sqrt{\frac{2E_c}{G_0}}\right)$$

Характеристики оптимального обнаружителя

(полностью известный сигнал)

Интеграл вероятности $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz$



$$\Phi(0) = \frac{1}{2}$$

$$\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$$

Характеристики оптимального обнаружителя

(полностью известный сигнал)

Обнаружение по критерию максимума апостериорной вероятности

Полная вероятность
ошибки

$$p_{\text{ош}} = p_{\text{проп}} \cdot p_{pr} + p_{\text{лт}} \cdot (1 - p_{pr}) = \min$$

при оптимальном пороге

$$h = \ln \frac{1 - p_{pr}}{p_{pr}} + \frac{E_c}{G_0}$$

Обнаружение по критерию Неймана-Пирсона

$p_{\text{обн}} = \text{при заданной допустимой } p_{\text{лт}}$

$$p_{\text{обн}} = 1 - \Phi \left(\frac{h}{\sigma_q} - \sqrt{\frac{2E_c}{G_0}} \right) = \Phi \left(\sqrt{\frac{2E_c}{G_0}} - \frac{h}{\sigma_q} \right)$$

$$p_{\text{лт}} = 1 - \Phi \left(\frac{h}{\sigma_q} \right) \Rightarrow \frac{h}{\sigma_q} = \Phi^{-1}(1 - p_{\text{лт}}) \text{ - нормированный порог}$$

$$p_{\text{обн}} = \Phi \left(\sqrt{\frac{2E_c}{G_0}} - \Phi^{-1}(1 - p_{\text{лт}}) \right)$$

Характеристики оптимального обнаружителя

(полностью известный сигнал)

Характеристики (кривые)
обнаружения
по критерию Неймана-Пирсона

