



ЛИЦЕЙ-ИНТЕРНАТ
естественных наук
при Саратовском государственном аграрном
университете им. Н.И. Вавилова

Лекция по алгебре. Тема: логарифмические уравнения.

Преподаватель математики Хохлова С.Н., Мещенко Н.В.

Определение:

Уравнение, содержащее переменную под знаком логарифма, называются логарифмическими.

Наприм

ер:
1) $\log_5 x = -2$; 2) $\lg(x^2 + 5) = \sqrt{5}$;

3) $\ln(x^3 - 1) = \pi$; 4) $\log_{(-x^2 + x - 6)} 25 = -2$

I. Типы простейших логарифмических уравнений

$$1) \log_a x = b,$$

$$x = a^b$$

Наприм

$$\text{ер: } \log_3 x = 0,5,$$

$$x = 3^{0,5},$$

$$x = \sqrt{3}.$$

$$2) \log_a (f(x)) = b,$$

$$f(x) = a^b.$$

$$a \neq 0, a \neq \sqrt{3}.$$

имеет единственное решение

$$2) \ln x = 0,$$

$$x = 1.$$

Ответ : 1.

$$2) \log_a (f(x)) = b,$$

$$f(x) = a^b.$$

Наприм

ер: $1) \log_3 (2x - 1) = 2,$

$$2x - 1 = 3^2,$$

$$2x = 9 + 1,$$

$$x = 5.$$

Ответ : 5.

$$2) \log_2 (x + 3) = \log_2 16,$$

$$x + 3 = 16,$$

$$x = 13.$$

Ответ : 13.

$$3) \log_3 (\log_4 x) = 0,$$

$$\log_4 x = 3^0,$$

$$x = 4.$$

Ответ : 4.

$$3) \log_a (f(x)) = g(x),$$

$$f(x) = a^{g(x)}$$

Наприм

ер: $\log_7 (x+8) = -x,$

$$x + 8 = 7^{-x},$$

Рассмотрим
функцию

Рассмотрим
функцию $g(x) = \left(\frac{1}{7}\right)^x$

Графики этих функций могут пересекаться не более, чем в одной точке. Значит, уравнение имеет не более

Линейная функция, где $k > 0$,

возрастает на $\mathbb{R}$.
Показательная
функция,

где $0 < a < 1$, убывает
на $\mathbb{R}$.

Типы простейших логарифмических уравнений.

Логарифмическое
уравнение

$$4) \log_a (f(x)) = \log_a (g(x))$$

равносильно каждой из
следующих систем:

$$\begin{cases} f(x) > 0, \\ f(x) = g(x) \end{cases} \text{ или } \begin{cases} g(x) > 0, \\ f(x) = g(x) \end{cases}$$

Для решения данного уравнения ¹ переходят
только к одной из этих систем (той, той
которая проще), ~~либо~~ решают уравнение $f(x) = g(x)$, которое может
иметь

² корни, посторонние для исходного уравнения,
и

$$4) \log_a (f(x)) = \log_a (g(x))$$

$$\begin{cases} f(x) > 0, \\ f(x) = g(x) \end{cases} \text{ или } \begin{cases} g(x) > 0, \\ f(x) = g(x) \end{cases}$$

Например: 1) $\ln(x^2 - 6x + 9) = \ln(3x + 9),$
 $x^2 - 6x + 9 = 3x + 9,$

$$x^2 - 9x = 0,$$

$$\begin{cases} x = 0, \\ x = 9. \end{cases}$$

Проверка:

$$x = 0$$

$$\ln(0^2 - 6 \cdot 0 + 9) = \ln(3 \cdot 0 + 9)$$

$$\ln 9 = \ln 9 - \text{верно}.$$

$$x = 9,$$

$$\ln(9^2 - 6 \cdot 9 + 9) = \ln(3 \cdot 9 + 9),$$

$$\ln 36 = \ln 36 - \text{верно}.$$

Ответ: 0;

$$4) \log_a (f(x)) = \log_a (g(x))$$

$$\begin{cases} f(x) > 0, \\ f(x) = g(x) \end{cases} \text{ или } \begin{cases} g(x) > 0, \\ f(x) = g(x) \end{cases}$$

Например:

$$2) \log_2 (x^2 + x - 2) = 1 + \log_2 x,$$

$$\log_2 (x^2 + x - 2) = \log_2 2 + \log_2 x,$$

$$\log_2 (x^2 + x - 2) = \log_2 2x,$$

$$\begin{cases} x^2 + x - 2 = 2x, \\ 2x > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x - 2 = 0, \\ x > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1, \\ x = 2, \\ x > 0; \end{cases} \Leftrightarrow x = 2$$

Ответ: 2.

II. Уравнения с неизвестным в основании логарифма

Наприм

ер:

$$1) \log_x 5 = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, \\ x \neq 1, \\ x^3 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{5}$$

Ответ $\sqrt[3]{5}$

$$2) \log_{-x} 25 = -2 \Leftrightarrow \begin{cases} -x > 0, \\ -x \neq 1, \\ (-x)^{-2} = 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0, \\ x \neq -1, \\ x^2 = \frac{1}{25} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -0,2 \\ x = 0,2 \\ x < 0, x \neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow x = -0,2$$

Ответ: - 0,2

**При решении логарифмических уравнений
часто используют свойства логарифмов**

$$\log_a (f(x)g(x)) = \log_a f(x) + \log_a g(x)$$

$$\log_a \frac{f(x)}{g(x)} = \log_a f(x) - \log_a g(x)$$

$$\log_a (f(x))^p = p \cdot \log_a f(x)$$

**что приводит к возникновению опасности
потери корней заданного уравнения.**

**Следует пользоваться формулами
в таком виде:**

$$\log_a (f(x)g(x)) = \log_a |f(x)| + \log_a |g(x)|$$

$$\log_a \frac{f(x)}{g(x)} = \log_a |f(x)| - \log_a |g(x)|$$

$$\log_a (f(x))^p = p \cdot \log_a |f(x)|$$

где p – четное число.

Наприм

ер:

$$1) \log_{16} x + \log_4 x + \log_2 x = 7;$$

$$\frac{1}{4} \log_2 x + \frac{1}{2} \log_2 x + \log_2 x = 7;$$

$$\frac{7}{4} \log_2 x = 7;$$

$$\log_2 x = 4;$$

$$x = 16.$$

Ответ: 16

Например:

$$2) \quad 2(\lg x - \lg 6) = \lg x - 2\lg(\sqrt{x} - 1);$$

$$\begin{cases} x > 0, \\ \sqrt{x} - 1 > 0, \\ \lg \frac{x^2}{36} = \lg \frac{x}{(\sqrt{x} - 1)^2}, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, x > 1, \\ \frac{x^2}{36} = \frac{x}{(\sqrt{x} - 1)^2}, \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 1, \\ x(\sqrt{x} - 1)^2 = 36 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 1, \\ x = 9, \end{cases} \Leftrightarrow x = 9.$$

1) Обе части уравнения

$$\text{Имеем } \frac{x(\sqrt{x} - 1)^2}{36} = 6,$$

$$\left(\frac{\sqrt{x}(\sqrt{x} - 1)}{6} \right)^2 = 6, \quad \begin{cases} t = \sqrt{a}, \\ t = -\sqrt{a}. \end{cases}$$

Пусть $t = \sqrt{x}(\sqrt{x} - 1)$, причем $t > 0$,
разделим на x (т.к. $x > 0$)

$$\text{имеем } \frac{t^2}{x} = 6 \neq 0,$$

$$\text{и умножим на } 36(\sqrt{x} - 1)^2$$

Поскольку $\sqrt{x}(\sqrt{x} - 1) > 0$,
т.к. $x \neq 1$,

$$\begin{cases} t = 3, \\ t = -2, \end{cases} \Leftrightarrow t = 3.$$

$$\text{Тогда } \sqrt{x} = 3 \Leftrightarrow x = 9.$$

Ответ: 9.

III. Метод замены переменной в логарифмическом уравнении.

**Пусть логарифмическое уравнение
имеет вид :**

$$A \cdot \log_a^2 f(x) + B \cdot \log_a f(x) + C = 0$$

Тогда вводят новую переменную

**$t = \log_a f(x)$, где t – любое число
(ОДЗ уравнения: $f(x) > 0$) и получают
квадратное уравнение $At^2 + Bt + C = 0$.**

Пример.

Решить уравнение $\lg^2 x - \lg x^3 = -2$

Решение. $\lg^2 x - 3 \cdot \lg x + 2 = 0, \underline{x} \geq$
 $\underline{0}$

Пусть $\lg x = t$, t – любое число, тогда
уравнение примет вид $t^2 - 3 \cdot t + 2 = 0$.

Откуда $t_1 = 1, t_2 = 2$.

$$\begin{array}{ll} 1) \lg x = 1 & 2) \lg x = 2 \\ x = 10 & x = 100 \end{array}$$

Ответ: 10; 100

IV. Решение уравнений методом приведения к одному основанию.

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

Пример 1. Решить уравнение

$$\log_{\sqrt{5}} x - \log_5 x + \log_{5\sqrt{5}} x = 3,75$$

Решение.

$$2 \cdot \log_5 x - \log_5 x + \frac{2}{3} \cdot \log_5 x = 3,75$$

Пусть $\log_5 x = t$, t – любое число, тогда
уравнение примет вид

$$2 \cdot t - t + \frac{2}{3} \cdot t = \frac{15}{4}$$

$$\frac{5}{3} \cdot t = \frac{15}{4}, \quad t = \frac{9}{4}$$

$$\log_5 x = \frac{9}{4}, \quad x = 5^{9/4}, \quad x = 25^4 \sqrt[4]{5}$$

Пример 2. Решить уравнение

$$\log_2 x + \log_x 2 = 2$$

Решение.

Одз: $b > 0, x \neq 1$
 $\log_a x > 0, x \neq 1$
 $\log_b a$

$$\log_2 x + \frac{1}{\log_2 x} = 2$$

1) Пусть $\log_2 x = t, \underline{t \neq 0},$

тогда $t + 1/t = 2,$

$$t^2 - 2t + 1 = 0,$$

$$(t - 1)^2 = 0,$$

$$t = 1.$$

2) Имеем,

$$\log_2 x = 1,$$

$$\text{то } x = 2.$$

Ответ: 2.

V. Решение уравнений методом логарифмирования.

Пример. Решить уравнение

$$x^{\log_3 3x} = 9$$

Решение.

$$\log_3 x^{\log_3 3x} = \log_3 9$$

Так как логарифмическая функция

определена при $x > 0$, то обе части

уравнения положительны.

Логарифмируем обе части уравнения по

основанию 3, имеем

$$(\log_3 3 + \log_3 x) \cdot \log_3 x = 2$$

$$(1 + \log_3 x) \cdot \log_3 x = 2$$

$$\log_3^2 x + \log_3 x = 2$$

Пусть $\log_3 x = t$, t – любое число, тогда
 $t^2 + t - 2 = 0$, $t_1 = 1$, $t_2 = -2$.

$$\begin{aligned} 1) \log_3 x &= 1 \\ x &= 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) \log_3 x &= -2 \\ x &= 1/9 \end{aligned}$$

Ответ: 3; 1/9

Домашнее задание.

- 1) Разобрать и выучить лекцию.**
- 2) Никольский, 10 кл., п.6.2, №6.11(у)
№ 6.13(а,г), 6.14(б,в), 6.16(б,г),
6.17(а,б), 6.18(а), 6.19(в)**