

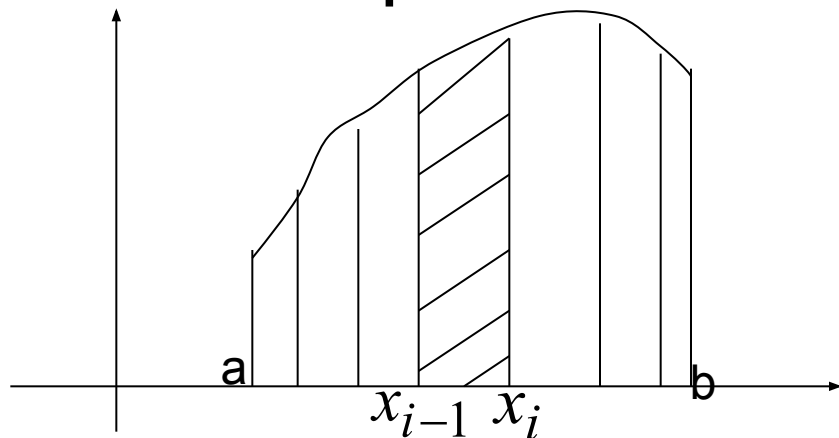
***Проект на тему:
приложение
определенного интеграла
в геометрии***

Подготовили ученики 12 «А» класса:

***Война Анатолий,
Досан Филипп,
Козловский Андрей,
Хобенко Мария***

Задача о вычислении площади плоской фигуры

Решим задачу о вычислении площади фигуры, ограниченной графиком функции $y = f(x)$ отрезками прямых $x = a$, $x = b$ и осью Ox . Такую фигуру называют криволинейной трапецией

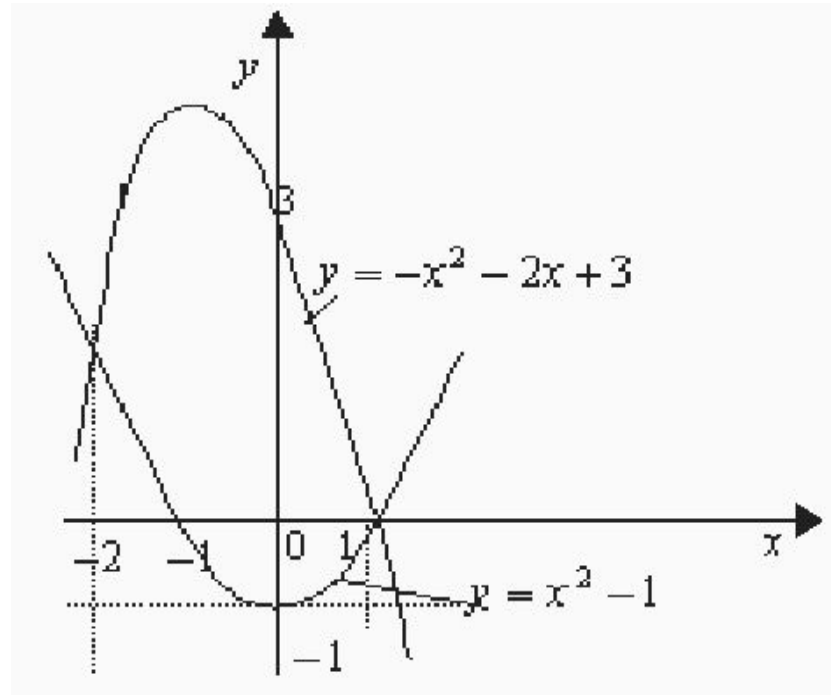


Задача о вычислении площади плоской фигуры

Разобьем отрезок $[a, b]$ на n частей точками $a = x_0, x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_i, \dots, x_n = b$. При этом криволинейная трапеция разобьется на n элементарных криволинейных трапеций. Заменяем каждую такую криволинейную трапецию прямоугольником с основанием $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, где $i = 1, 2, \dots, n$ и высотой $h = f(\bar{x}_i)$, где $\bar{x}_i$ - произвольно выбранная внутри отрезка $[x_{i-1}, x_i]$ точка.

Примеры

Вычислить площадь фигуры,
ограниченной линиями $y = -x^2 - 2x + 3$ и
 $y = x^2 - 1$



Продолжение

Получим

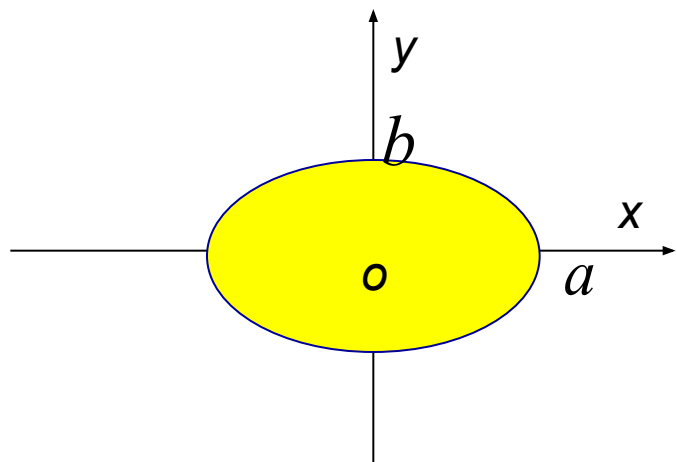
$$\begin{aligned} S &= \int_{-2}^1 [(-x^2 - 2x + 3) - (x^2 - 1)] dx = \int_{-2}^1 (-2x^2 - 2x + 4) dx = \\ &= -2 \int_{-2}^1 (x^2 + x - 2) dx = -2 \left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x \right) \Big|_{-2}^1 = \\ &= -2 \left[\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} - 2 \right) - \left(-\frac{8}{3} + \frac{4}{2} - 4 \right) \right] = -2 \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} - 2 + \frac{8}{3} - 6 \right) = \\ &= -2 \left(3 - 8 + \frac{1}{2} \right) = -2 \left(-\frac{9}{2} \right) = 9 \end{aligned}$$

Примеры

Найти площадь эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

Параметрические уравнения эллипса

$$x = a \cos t, y = b \sin t.$$



$$\begin{aligned} S &= 4 \int_{\pi/2}^0 b \sin t (-a \sin t) dt = \\ &= 4ab \int_0^{\pi/2} \sin^2 t dt = 4ab \int_0^{\pi/2} \frac{1 - \cos 2t}{2} dt = \\ &= \frac{1}{2} 4ab \left(t - \frac{1}{2} \sin 2t \right)_0^{\pi/2} = 2ab \frac{\pi}{2} = \pi ab. \end{aligned}$$

Вычисление объема тела вращения

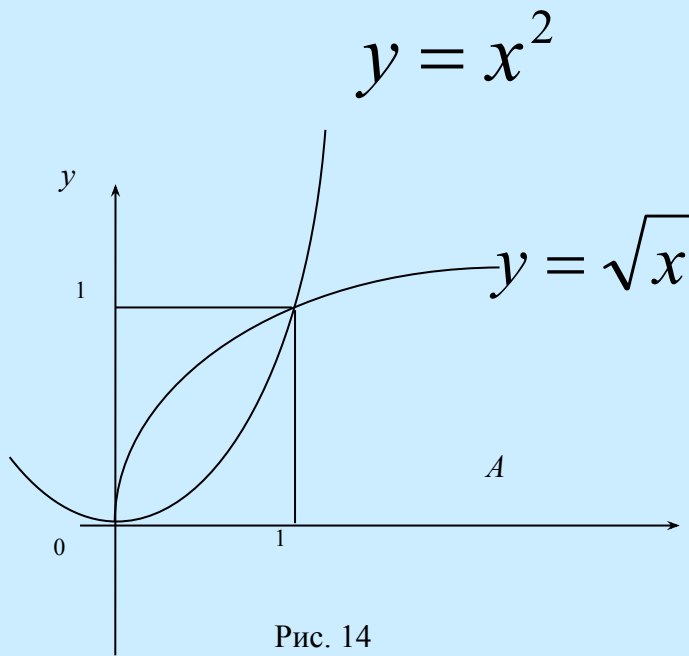


Рис. 14

Искомый объем
можно найти как
разность объемов,
полученных
вращением вокруг
оси Ox
криволинейных
трапеций,
ограниченных
линиями $y = \sqrt{x}$ и
 $y = x^2$

Решение

Тогда

$$\begin{aligned} V_x &= \pi \int_0^1 (\sqrt{x})^2 dx - \pi \int_0^1 (x^2)^2 dx = \\ &= \pi \int_0^1 x dx - \pi \int_0^1 x^4 dx = \pi \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_0^1 - \pi \cdot \frac{x^5}{5} \Big|_0^1 = \\ &= \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{5} = \frac{3\pi}{10} \end{aligned}$$