Тема 2. Ковариация и собственный вектор

1. Подготовка данных

Временной ряд рассматривается либо как некоторая выборка из генеральной совокупности либо как описание некоторой детерминированной функции.

Все значения каждого признака в различные моменты времени образуют временной ряд, который обозначается вектором

$$x_i = \{x_{1i}^0, x_{2i}^0, \ldots, x_{mi}^0\}^T$$

Показатели центра распределени

Среднеарифметические значения временных рядов:

$$\bar{x}_i = \frac{1}{m} \sum_{k}^{m} x^{0}_{ki}$$

Мода — это наиболее часто наблюдаемая величина изучаемого временного ряда

Медиана — это значение наблюдения, которое находится в середине ранжированного ряда данных, т.е. наблюдение, занимающее срединное положение

Показатели вариации

Дисперсия – отклонение наблюдаемого значения (для каждого наблюдения) от среднего арифметического (несмещенная оценка) :

$$\sigma_{x_1} = \frac{\sum_{k=1}^{m} (x_{k1}^{0} - \bar{x}_1)(x_{k1}^{0} - \bar{x}_1)}{m}$$

Если размер выборки относительно ограничен, то для более точного расчета применяется формула смещенной (исправленной) дисперсии:

$$\sigma_{x_1} = \frac{\sum_{k=1}^{m} (x_{k1}^{0} - \bar{x}_1)(x_{k1}^{0} - \bar{x}_1)}{m-1}$$

Показатели вариации

Среднеквадратическое (стандартное) отклонение показывает абсолютное отклонение измеренных значений от среднего арифметического и определяется по формуле :

$$\varepsilon_{x_1} = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^{m} (x_{k1}^{0} - \bar{x}_1)(x_{k1}^{0} - \bar{x}_1)}{m}} = \sqrt{\sigma_{x_1}}$$

Показатели вариации

Ковариация двух случайных величин определяется следующим образом (несмещенная оценка)

$$\operatorname{cov}(x_1^0 x_2^0) = \sigma_{x_1 x_2} = \frac{\sum_{k=1}^{m} (x_{k1}^0 - \bar{x}_1)(x_{k2}^0 - \bar{x}_2)}{m}$$

Если размер выборки относительно ограничен, то для более точного расчета применяется формула смещенной (исправленной) ковариации:

$$\operatorname{cov}(x_1^0 x_2^0) = \sigma_{x_1 x_2} = \frac{\sum_{k=1}^{m} (x_{k1}^0 - \bar{x}_1)(x_{k2}^0 - \bar{x}_2)}{m-1}$$

Показатели вариации

Коэффициент корреляции

$$r_{x_1 x_2} = \frac{\sigma_{x_1 x_2}}{\varepsilon_{x_1^0} \varepsilon_{x_2^0}}$$

Коэффициент корреляции– это безразмерная величина, которая может принимать значения из отрезка :

- 1– имеет место абсолютная положительная корреляция между рассматриваемыми величинами
- -1– имеет место абсолютная отрицательная корреляция между рассматриваемыми величинами
- 0 – линейная корреляционная связь отсутствует.

Ковариационная матри

Пространство признаков описывается матрицей

$$\mathbf{X}^0 = \begin{bmatrix} x_{11}^0 & x_{12}^0 & \cdots & x_{1i}^0 & \cdots & x_{1n}^0 \\ x_{21}^0 & x_{22}^0 & \cdots & x_{2i}^0 & \cdots & x_{2n}^0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{i1}^0 & x_{i2}^0 & \cdots & x_{ii}^0 & \cdots & x_{in}^0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{m1}^0 & x_{m2}^0 & \cdots & x_{mi}^0 & \cdots & x_{mn}^0 \end{bmatrix}$$

или

$$\mathbf{X}^0 = [x_1^0 \quad x_2^0 \quad \cdots \quad x_{\mathrm{n}}^0]$$

Операции с данными

При вычислении ковариационной и корреляционной матриц используются операции вычитания средних (**центрирование**) и деления на стандарты (**нормирование**).

Операция **нормирования** в пространстве соответствует изменению масштабов по всем осям координат так, чтобы величина рассеяния, характеризуемая величиной дисперсии, стала равной единице.

Ковариационная матри

При вычислении ковариационной матрицы используется операция **«центрирование»**.

$$\mathbf{A} = \frac{1}{m}\mathbf{X}^{T}\,\mathbf{X}$$

$$\mathbf{X} = [x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_{\mathrm{n}}]$$

$$x_{ji} = x_{ji}^{0} - \bar{x}_i$$

Среднемесячные курсы изменения валют в 2007 году

Дата	Доллар США, x_1	Евро, x_2	$x_1 - \bar{x}_1$	$x_2 - \bar{x}_2$	$(x_1 - \bar{x}_1)(x_2 - \bar{x}_2)$
Январь	**26.53**	**34.39**	**0.95**	**-0.62**	**-0.58800**
Февраль	**26.34**	**34.41**	**0.76**	**-0.60**	**-0.45845**
Март	**26.11**	**34.57**	**0.52**	**-0.44**	**-0.22887**
Апрель	**25.84**	**34.89**	**0.26**	**-0.12**	**-0.030282**
Май	**25.82**	**34.91**	**0.24**	**-0.10**	**-0.024225**
Июнь	**25.91**	**34.78**	**0.33**	**-0.23**	**-0.076827**
Июль	**25.54**	**35.03**	**-0.04**	**0.02**	**-0.000816**
Август	**25.62**	**34.90**	**0.04**	**-0.11**	**-0.004653**
Сентябрь	**25.33**	**35.16**	**-0.25**	**0.15**	**-0.036817**
Октябрь	**24.90**	**35.39**	**-0.69**	**0.38**	**-0.262545**
Ноябрь	**24.47**	**35.91**	**-1.12**	**0.90**	**-1.006731**
Декабрь	**24.57**	**35.78**	**-1.01**	**0.77**	**-0.778048**
	$\bar{x}_1$	$\bar{x}_2$		**Сумма**	**-3.496277**
	25.58	**35.01**		**Ковариация**	**-0.317843**

Ковариационная матрица

	Доллар США	Евро
Доллар США	**0.4345**	**-0.318**
Евро	**-0.318**	**0.2372**

Вычисление корреляционной матр

При вычисление корреляционной матрицы используются операции центрирование и нормирование

$$r_{x_1^0 x_2^0} = \frac{\sigma_{x_1 x_2}}{\varepsilon_{x_1^0}\varepsilon_{x_2^0}}$$

$$\mathbf{A}_k = \mathbf{EAE}$$

$\mathbf{E}$ - диагональная матрица (нормирование)

	Доллар США	Евро
Доллар США	1,0	-0,989
Евро	-0,989	1,0

Матрица вторых момент

Вычисление вторых моментов $\mu_{x_1 x_2} = \frac{\sum_{k=1}^{m} x_{k1}^0 x_{k2}^0}{m-1}$

$$\mathbf{A}^0 = \frac{1}{m-1}(\mathbf{X}^0)^T \mathbf{X}^0$$

	Доллар США	Евро
Доллар США	714,35	976,72
Евро	976,72	1337,4

Матрица нормированных вторых моме

При вычислении матрицы нормированных начальных вторых моментов используется операция нормирование

$$\bar{\mu}_{x_1^0 x_2^0} = \frac{\mu_{x_1^0 x_2^0}}{\varepsilon_{x_1^0} \varepsilon_{x_2^0}}$$

$$\mathbf{A}_k^0 = \mathbf{P}\mathbf{A}^0\mathbf{P}$$

	Доллар США	Евро
Доллар США	1,0	0,999
Евро	0,999	1,0

Матрица

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1i} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2i} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{i1} & x_{i2} & \cdots & x_{ii} & \cdots & x_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{m1} & x_{m2} & \cdots & x_{mi} & \cdots & x_{mn} \end{bmatrix}$$

Транспонированная матрица

$$\mathbf{X}^{0^T} = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{21} & \cdots & x_{i1} & \cdots & x_{m1} \\ x_{12} & x_{22} & \cdots & x_{i2} & \cdots & x_{m2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{1i} & x_{2i} & \cdots & x_{ii} & \cdots & x_{mi} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{1n} & x_{2n} & \cdots & x_{in} & \cdots & x_{mn} \end{bmatrix}$$

Умножение матрицы на вектор

$$\mathbf{c} = \mathbf{X}\mathbf{b} \qquad c_i = \sum_{k=1}^{m} x_{ik} b_k$$

$$\begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_i \\ \vdots \\ c_n \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1i} & \cdots & x_{1m} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2i} & \cdots & x_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \boxed{x_{i1}} & \boxed{x_{i2}} & \boxed{\cdots} & \boxed{x_{ii}} & \boxed{\cdots} & \boxed{x_{im}} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{ni} & \cdots & x_{nm} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_i \\ \vdots \\ b_m \end{Bmatrix}$$

Собственный вектор

Пример вектора и собственного вектора

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 1 \\ 3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2 \times 1 + 3 \times 3 \\ 2 \times 1 + 1 \times 3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 11 \\ 5 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 1{,}5 \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 3 \\ 2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 4 \times 3 + 3 \times 2 \\ 3 \times 3 + 1{,}5 \times 2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 18 \\ 12 \end{Bmatrix} = 6 \times \begin{Bmatrix} 3 \\ 2 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 1{,}5 \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 2 \\ -3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 4 \times 2 - 3 \times 3 \\ 3 \times 2 - 1{,}5 \times 3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \end{Bmatrix} = -0{,}5 \times \begin{Bmatrix} 2 \\ -3 \end{Bmatrix}$$

Собственный вектор

Уравнение собственных векторов

$$\mathbf{Xb} - \lambda\mathbf{b} = 0$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 1{,}5 \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 3 \\ 2 \end{Bmatrix} - 6 \times \begin{Bmatrix} 3 \\ 2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 18 \\ 12 \end{Bmatrix} - 6 \times \begin{Bmatrix} 3 \\ 2 \end{Bmatrix} = 0$$

Алгоритм вычисления собственных векторов

1. Выбрать произвольное начальное (нулевое) приближение собственного вектора b_0

Положить k=0

2. Найти $\mathbf{b}_1^* = \mathbf{A}\mathbf{b}_0$ $\lambda^{(1)} = \max(b_1^*)$

Вычислить первое приближение собственного вектора

$$b_{1(i)} = b_{1(i)}^* / \lambda^1$$

Алгоритм вычисления собственных векторов

3. Найти $\mathbf{b}^*_{k+1} = \mathbf{A}\mathbf{b}_k$ $\lambda^{(k+1)} = \max(b^*_{k+1})$

Вычисляем k+1 приближение собственного вектора

$$b_{k+1(i)} = b^*_{k+1(i)} / \lambda^{k+1}$$

Вычисляется норма ошибки $\varepsilon = \left\| \mathbf{b}_{k=1} - \mathbf{b}_k \right\|$

Полагаем k=k+1.

4. Шаг 3 повторяется пока $\varepsilon > \varepsilon_{\lim}$

Собственный вектор

Свойства собственных векторов.

1. Матрица n x n имеет n собственных векторов.
2. Если собственный вектор умножить на ненулевой коэффициент, то результирующий вектор также является собственным вектором.

Собственный вектор

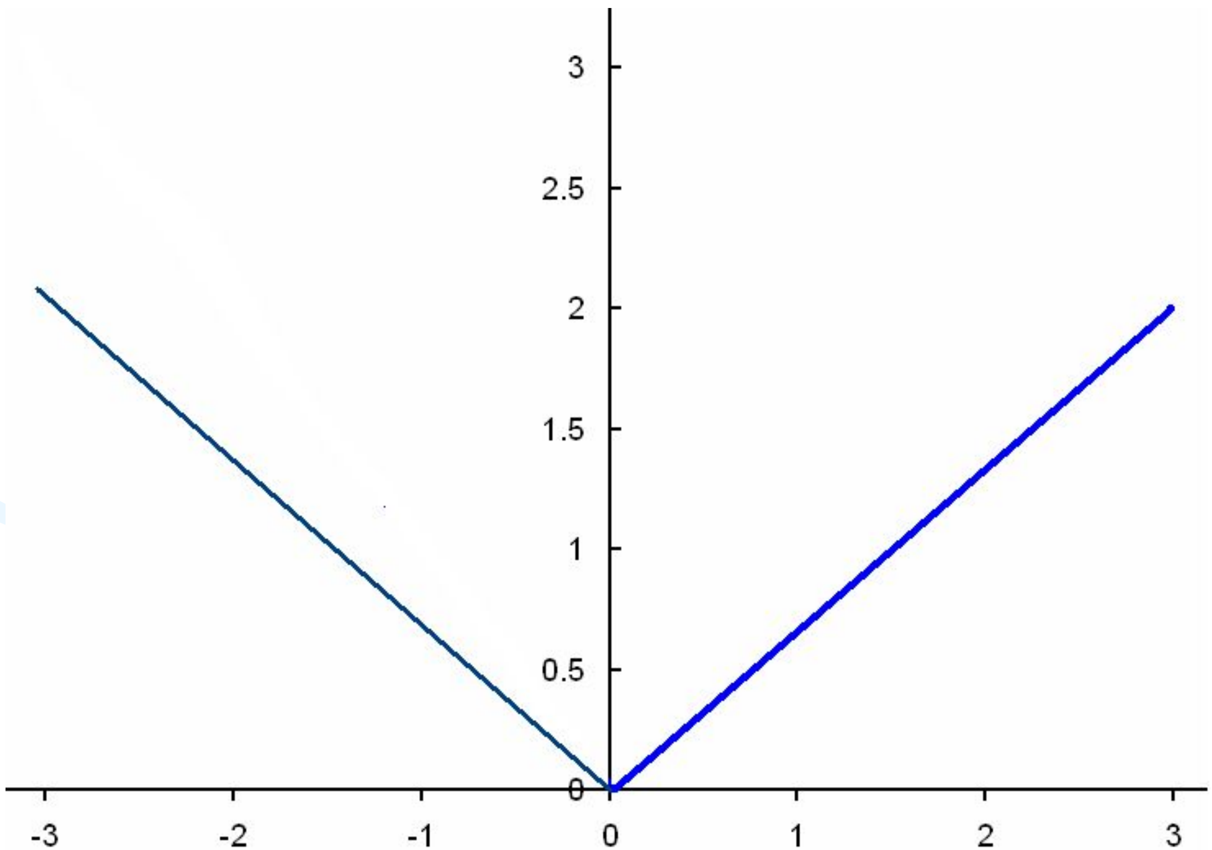
3. Ортогональность собственных векторов

$$b_j^T \mathbf{A} b_i = \begin{cases} a_i & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

$$b_j^T b_i = \begin{cases} a_i & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

Собственный вектор

3. Ортогональность собственных векторов



Упражнение. Для следующей квадратной матрицы определить какие векторы являются собственными

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -4 & 1 & 2 \\ -6 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Векторы

$$\begin{Bmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{Bmatrix} \quad \begin{Bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{Bmatrix} \quad \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{Bmatrix} \quad \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \begin{Bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{Bmatrix}$$