



ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЛОГИЧЕСКИХ ВЫРАЖЕНИЙ

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ И
АЛГЕБРЫ ЛОГИКИ

10 класс



ИЗДАТЕЛЬСТВО

БИНОМ

Ключевые слова

- законы алгебры логики
- коммутативные законы
- ассоциативные законы
- дистрибутивные законы
- закон противоречия
- закон идемпотентности
- закон двойного отрицания
- законы де Моргана
- законы поглощения



Основные законы алгебры

ЛОГИКИ

Законы алгебры логики (свойства логических операций) позволяют упростить процесс анализа истинности логического выражения с большим количеством переменных и операций.

Закон двойного отрицания

$$\overline{\overline{A}} = A$$

A	$\overline{A}$	$\overline{\overline{A}}$
0	1	0
1	0	1

A	$\overline{A}$	$A \vee \overline{A}$
0	1	1
1	0	1

A	$\overline{A}$	$A \& \overline{A}$
0	1	0
1	0	0

Основные законы алгебры логики

Все законы могут быть доказаны с помощью таблиц истинности.

Законы де Моргана

$$\overline{A \vee B} = \bar{A} \& \bar{B}$$

$$\overline{A \& B} = \bar{A} \vee \bar{B}$$

Доказательство закона де Моргана

A	B	$A \vee B$	$\overline{A \vee B}$	$\bar{A}$	$\bar{B}$	$\bar{A} \& \bar{B}$
0	0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	1	0	0
1	0	1	0	0	1	0
1	1	1	0	0	0	0



Докажите второй закон самостоятельно.

Основные законы алгебры логики

Переместительные законы

$$A \vee B = B \vee A$$

$$A \& B = B \& A$$

Упростить выражения: $A \vee A \& B$; $A \& (A \vee B)$

$$\underline{A} \vee A \& B \quad A \& 1 \vee A \& B = A \& (1 \vee B) = A \& 1 = A$$

Закон поглощения (I)

$$A \vee (A \& B) = A$$

$$A \& (A \vee B) = A \& A \vee A \& B = A \vee A \& B = A$$

Закон поглощения (II)

$$A \& (A \vee B) = A$$

Основные законы алгебры логики

Доказательство распределительного
(дистрибутивного) закона

A	B	C	$B \vee C$	$A \& (B \vee C)$	$A \& B$	$A \& C$	$(A \& B) \vee (A \& C)$
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	1	0	1	1
1	1	0	1	1	1	0	1
1	1	1	1	1	1	1	1



Основные законы алгебры

ЛОГИКИ

Распределительный
(дистрибутивный) закон (II)

$$A \vee (B \& C) = (A \vee B) \& (A \vee C)$$

$$(A \vee B) \& (A \vee C)$$

$$(A \vee B) \& A \vee (A \vee B) \& C$$

$$A \& (A \vee B) \vee C \& (A \vee B)$$

$$A \vee C \& (A \vee B)$$

$$A \vee A \& C \vee C \& B$$

$$A \vee A \& B = A$$

Доказательство

$$A \& (B \vee C) = (A \& B) \vee (A \& C)$$

Переместительный
 $A \& B = B \& A$

Поглощения
 $A \& (A \vee B) = A$

Распределительный
 $A \& (B \vee C) = (A \& B) \vee (A \& C)$

Поглощения
 $A \vee A \& B = A$

Основные законы алгебры логики

$$A \vee A \& B = A$$

$$A \vee A \& B = A$$



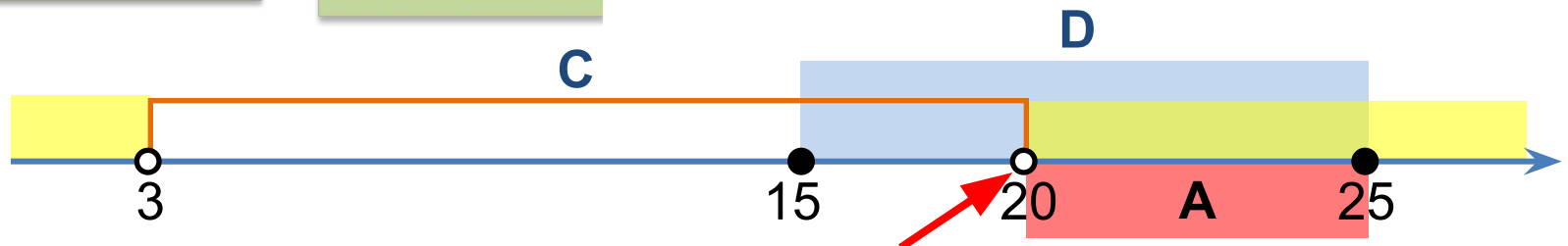
Законы алгебры логики выполняются для операций
Какие законы использовали?

$$A \vee A \& B = A$$

Ответ не зависит от отрезка B

$$A \vee A \& B = A$$

$$A \vee A \& B = A$$



Ответ: 4

Не
входит!

Основные законы алгебры логики

№ 2. Сколько решений имеет система уравнений:

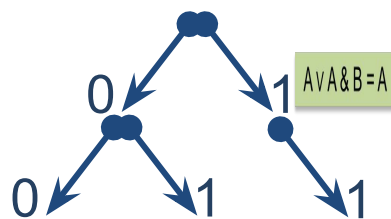
$$A \vee A \& B = A$$

$$A \vee A \& B = A$$

$$A \vee A \& B = A$$

$$A \vee A \& B = A$$

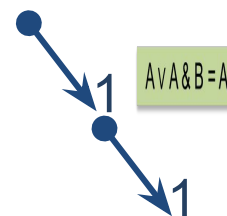
Важно отметить, что в первом уравнении $A \vee A \& B = A$ используется закон поглощения, а во втором уравнении $A \vee A \& B = A$ используется закон идемпотентности.



$$A \vee A \& B = A + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 17$$

$$A \vee A \& B = A$$

$$17 \cdot 15 = 255$$



$$1 \cdot 15 = 15$$

$$A \vee A \& B = A$$

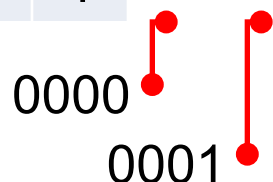
Ответ: 255

Логические функции

Логическое выражение может рассматриваться как способ описания логической функции.

A	B
0	0
0	1
1	0
1	1

Сколько разных функций от двух переменных?



Запишите в общем виде количество различных функций от N переменных.
Для $n = 2$ существует 16 различных логических функций.

Логические функции

Логическое выражение может рассматриваться как способ описания логической функции.

[illegible]
$$F(A,B)=0$$
$$F(A, B) = A \& B$$
$$A \vee A \& B = A$$
$$A \vee A \wedge B = A$$
$$A \vee A \& B = A$$
$$A \vee A \& B = A$$
$$A \vee A \& B = A$$

штрих Шеффера (отрицание конъюнкции, И-НЕ)

$$A \vee A \& B = A$$

стрелка Пирса (отрицание
дизъюнкции, ИЛИ-НЕ)

Составление логического выражения

Функция от любого количества переменных может быть выражена через функции двух переменных. Любую функцию можно представить через конъюнкцию, дизъюнкцию и отрицание.

A	B	C	F
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	0

$$A \vee A \& B = A$$

$$A \vee A \& B = A$$

$$A \vee A \& B = A$$

II способ

При построении функции можно ориентироваться как на 0, так и на 1 в последнем столбце.

F=1, если во 2-ой, **ИЛИ** в 3-ей, **ИЛИ** в 6-ой строке стоят 1.

Запишем выражение в строке так, чтобы была описана только эта строка.

$$A \vee A \& B = A$$

$$A \vee A \& B = A$$

$$A \vee A \& B = A$$

Совершенная дизъюнктивная нормальная форма (СДНФ)

Используя законы логики, можно записать функцию через другие операции.

Составление логического выражения

Функция от любого количества переменных может быть выражена через функции двух переменных.

Любую функцию можно представить через конъюнкцию, дизъюнкцию и отрицание.

A	B	C	F
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

$$A \vee A \& B = A$$

$$A \vee A \& B = A$$

$F=0$, если во 2-ой **ИЛИ** в 5-ой строке стоят 0.

Запишем выражение в строке так, чтобы была описана только эта строка:

$$A \vee A \& B = A \quad A \vee A \& B = A$$

Совершенная конъюнктивная нормальная форма (СКНФ)

Запись функции в таком виде можно было получить описывая функцию **НЕ** F , а затем применяя законы де Моргана.

Самое главное

Способ определения истинности логического выражения путём построения его таблицы истинности становится неудобным при увеличении количества логических переменных, т. к. за счёт существенного увеличения числа строк таблицы становятся громоздкими. В таких случаях выполняются преобразования логических выражений в равносильные. Для этого используют свойства логических операций, которые иначе называют законами алгебры логики. Аналогичные законы имеют место и в алгебре множеств.

Логическая функция может быть задана с помощью таблицы истинности или аналитически, т. е. с помощью логического выражения.

Для всякой таблицы истинности можно составить соответствующее ей логическое выражение.



Вопросы и задания



$$A \vee A \& B = A$$

Решение

$$A \vee A \& B = A$$

2. Упростите логическую формулу:

$$A \vee A \& B = A = A \vee A \& B = A$$

Ответ

Вопросы и задания



$$A \vee A \& B = A$$

Решение

$$A \vee A \& B = A$$

Только одно истинно

Все истинны

4. Проверьте обладает ли операция импликации ассоциативностью?

$$(A \vee A \& B) = A \neq A \vee A \& B = A$$



$$A \vee A \& B = A$$



$$A \vee A \& B = A$$

$\neq$

Решение