

ПРОИЗВОДНЫЕ

Механический, физический, геометрический
и экономический смысл производных.

- ▶ **Производная** (функции в точке) — основное понятие дифференциального исчисления, характеризующее скорость изменения функции (в данной точке). Определяется как предел отношения приращения функции к приращению её аргумента при стремлении приращения аргумента к нулю, если такой предел существует.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ

Задание. Найти производную функции $y = \sin(\operatorname{tg}(\sqrt{x}))$

Решение. По правилу дифференцирования сложной функции:

$$y' = (\sin(\operatorname{tg}(\sqrt{x})))' = \cos(\operatorname{tg}(\sqrt{x})) \cdot (\operatorname{tg}(\sqrt{x}))'$$

В свою очередь производная $(\operatorname{tg}(\sqrt{x}))'$ также берется по правилу дифференцирования сложной функции:

$$y' = \cos(\operatorname{tg}\sqrt{x}) \cdot \frac{1}{\cos^2\sqrt{x}} \cdot (\sqrt{x})'$$

$$y' = \cos(\operatorname{tg}\sqrt{x}) \cdot \frac{1}{\cos^2\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$y' = \frac{\cos(\operatorname{tg}\sqrt{x})}{2\sqrt{x} \cos^2\sqrt{x}}$$

Ответ. $y' = \frac{\cos(\operatorname{tg}\sqrt{x})}{2\sqrt{x} \cos^2\sqrt{x}}$

ПРИМЕР РЕШЕНИЯ

- ▶ **Производной** функции $y = f(x)$ в точке X называется предел, если он существует, отношения приращения функции к приращению аргумента при стремлении последнего к нулю.
- 2. геометрически – как угловой коэффициент касательной к графику функции в этой точке.

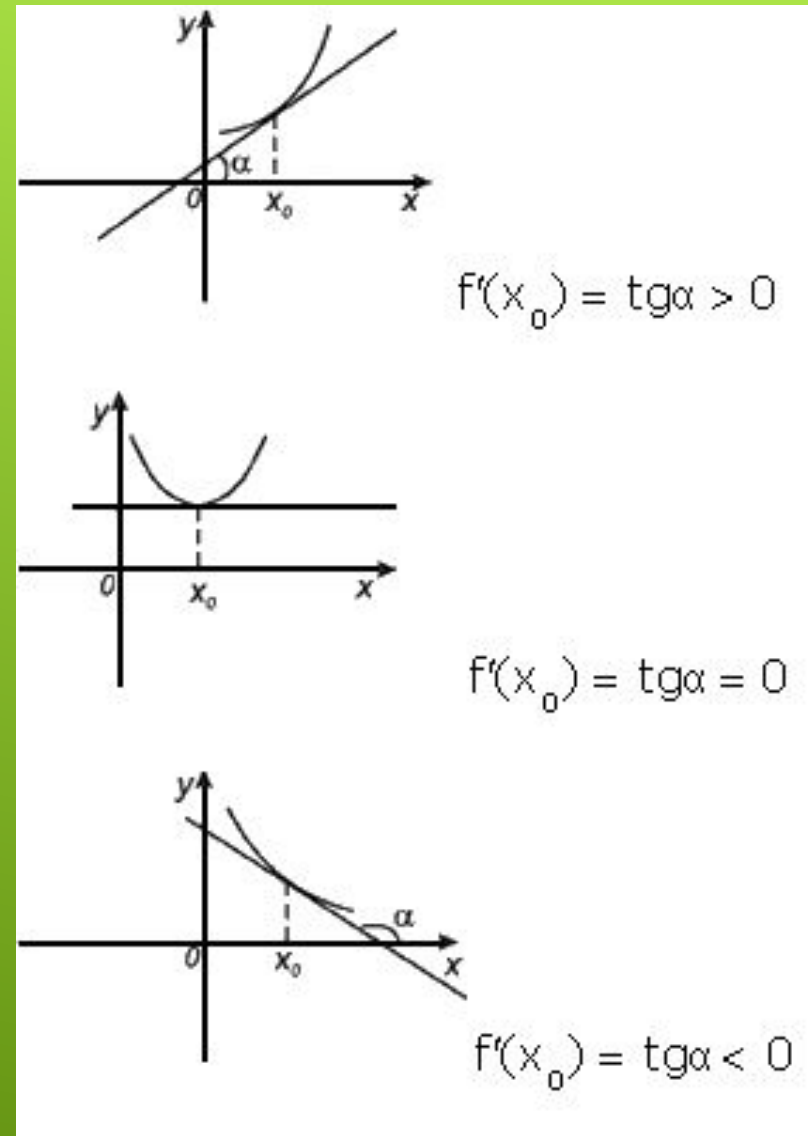
ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ



- ▶ Производная в точке x_0 равна угловому коэффициенту касательной к графику функции $y=f(x)$ в этой точке
- ▶ **Уравнение касательной** к графику функции $y=f(x)$ в точке x_0 :

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

ПРИМЕР РЕШЕНИЯ



- Если точка движется вдоль оси x и ее координата изменяется по закону $x(t)$, то мгновенная скорость точки:

$$v(t) = x'(t)$$

**ФИЗИЧЕСКИЙ СМЫСЛ
ПРОИЗВОДНОЙ.**



- ▶ Производительность труда есть производная объема продукции по времени.

**ЭКОНОМИЧЕСКИЙ СМЫСЛ
ПРОИЗВОДНОЙ**



Экономический смысл производной

Производительность труда есть производная объема продукции по времени. Рассмотрим некоторые понятия, иллюстрирующие экономический смысл производной.

Пусть $y(x)$ — функция, характеризующая, например, издержки производства, где x — количество

$$y(x)$$

выпускаемой продукции. Тогда отношение $\frac{y(x)}{x}$ описывает средние издержки, приходящиеся на одно изделие. Средняя величина обозначается Ay или Af (от английского «average».) Среднее приращение,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

средний прирост, средняя скорость изменения определяется отношением $\frac{\Delta y}{\Delta x}$. Производная

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

выражает предельные (маргинальные от английского «marginal») издержки производства. Величину $Mf(x) = y'$ называют мгновенным приростом или мгновенной скоростью изменения y . Аналогично можно определить предельную выручку, предельный доход, предельную полезность и другие предельные величины.

ПРИМЕР РЕШЕНИЯ

Рассмотрим движение материальной точки вдоль координатной оси, причём задан закон движения функцией $x(t)$ времени t . В течение интервала времени от t_0 до $t_0 + \Delta t$ материальная точка перемещается на расстояние $\Delta x = x(t_0 + \Delta t) - x(t_0)$, а её средняя скорость равна

$$v_{cp} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

При $\Delta t \rightarrow 0$ значение средней скорости стремится к определенной величине, которая называется мгновенной скоростью $v(t_0)$ материальной точки в момент времени t_0 , то есть

$$v(t_0) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

А по определению производной, величина, стоящая в правой части, равна $x'(t_0)$, то есть

$$v(t_0) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = x'(t_0)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ

Итак, механический смысл производной: скорость – это производная координаты по времени:

$$v(t) = x'(t)$$

МЕХАНИЧЕСКИЙ СМЫСЛ ПРОИЗВОДНОЙ