

Логарифмические уравнения

Уравнения вида $\log_a f(x) = \log_a h(x)$, где $a \neq 1$, $a > 0$ называют логарифмическими уравнениями

$$\log_a f(x) = \log_a h(x)$$



$$\begin{cases} f(x) = h(x) \\ f(x) > 0 \\ h(x) > 0 \end{cases}$$

Методы решения логарифмических уравнений:

1. Функционально-графический метод.
2. Метод потенцирования.
3. Метод введения новой переменной.

Логарифмические уравнения. Примеры

Пример 1

$$\log_3(x^2 - 3x - 5) = \log_3(7 - 2x)$$

$$\begin{cases} x^2 - 3x - 5 = 7 - 2x \\ 7 - 2x > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 - x - 12 = 0 \\ x < 3,5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = -3 \\ x_2 = 4 \\ x < 3,5 \end{cases}$$

$$x = -3$$

Ответ: -3.

Пример 2

$$\log_2(x + 4) + \log_2(2x + 3) = \log_2(1 - 2x)$$

$$\log_2(x + 4)(2x + 3) = \log_2(1 - 2x)$$

$$\begin{cases} (x + 4)(2x + 3) = (1 - 2x) \\ x + 4 > 0 \\ 2x + 3 > 0 \\ 1 - 2x > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x^2 + 13x + 11 = 0 \\ x > -4 \\ x > -1,5 \\ x < 0,5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = -5,5 \\ -1,5 < x < 0,5 \end{cases}$$

Ответ : -1.

Логарифмические уравнения. Примеры

Пример 3

$$\log_{x+4}(x^2 - 1) = \log_{x+4}(5 - x)$$

$$\begin{cases} x^2 - 1 = 5 - x, \\ x^2 - 1 > 0, \\ 5 - x > 0, \\ x + 4 > 0, \\ x + 4 \neq 1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + x - 6 = 0, \\ \begin{cases} x > 1, \\ x < -1; \end{cases} \\ -4 < x < 5, \\ x \neq -3; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x_1 = -3 \\ x_2 = 2 \end{cases} \\ x \neq -3 \\ \begin{cases} -4 < x < -1, \\ 1 < x < 5; \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow x = 2$$

Ответ: 2.

Логарифмические уравнения. Примеры

Пример 4

$$x^{1-\log_5 x} = 0,04$$

Т.к. обе части равенства принимают только положительные значения, прологарифмируем их по основанию 5:

$$\log_5 x^{1-\log_5 x} = \log_5 0,04$$

$$\log_5 0,04 = \log_5 \frac{1}{25} = \log_5 5^{-2} = -2$$

$$(1 - \log_5 x) \log_5 x = \log_5 0,04$$

$$\text{ОДЗ : } x > 0$$

$$\log_5 x - \log_5^2 x = -2$$

$$\log_5^2 x - \log_5 x - 2 = 0$$

пусть $\log_5 x = t$, тогда

$$t^2 - t - 2 = 0$$

$$\begin{cases} t_1 = 2 \\ t_2 = -1 \end{cases}$$

Вернемся к исходной переменной

$$\begin{cases} \log_5 x = 2, \\ \log_5 x = -1; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \text{ОДЗ}^2, \\ x = 5^{-1}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 25 \in \quad, \\ \text{ОДЗ}, 2 \in \quad. \end{cases}$$

Ответ: 0,2; 25.

Логарифмические уравнения. Примеры

Пример 5

$$\log_x (3x^{\lg x} + 4) = 2 \lg x$$

$$\text{ОДЗ : } \begin{cases} x \neq 1, \\ x > 0; \end{cases}$$

По определению логарифма

$$x^{2 \lg x} = 3x^{\lg x} + 4$$

Пусть $x^{\lg x} = t$, где $t > 0$ тогда

$$t^2 - 3t - 4 = 0$$

$$\begin{cases} \text{не удовлетворяет} \\ t = 4 \end{cases}$$

Вернемся к исходной переменной

$$x^{\lg x} = 4$$

Прологарифмируем обе части
по основанию 10:

$$\lg(x^{\lg x}) = \lg 4$$

$$\lg x \lg x = \lg 4$$

$$\lg^2 x = \lg 4$$

$$\lg x = \pm \sqrt{\lg 4}$$

$$x = 10^{\pm \sqrt{\lg 4}}$$

$$\text{Ответ : } 10^{\pm \sqrt{\lg 4}}.$$

Логарифмические неравенства

Неравенства вида $\log_a f(x) > \log_a g(x)$, где $a \neq 1$, $a > 0$ называют логарифмическими неравенствами

$$\log_a f(x) > \log_a g(x)$$

$$a > 1$$

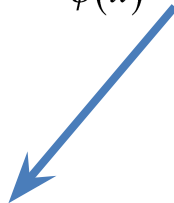
$$\begin{cases} f(x) > g(x), \\ f(x) > 0, \\ g(x) > 0. \end{cases}$$

$$0 < a < 1$$

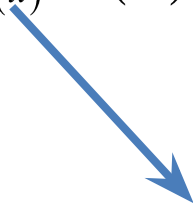
$$\begin{cases} f(x) < g(x), \\ f(x) > 0, \\ g(x) > 0. \end{cases}$$

Логарифмические неравенства

$$\log_{\varphi(x)} f(x) > \log_{\varphi(x)} g(x)$$


$$\begin{cases} 0 < \varphi(x) < 1 \\ f(x) < g(x), \\ f(x) > 0, \\ g(x) > 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 < \varphi(x) < 1 \\ f(x) < g(x), \\ f(x) > 0. \end{cases}$$


$$\begin{cases} \varphi(x) > 1 \\ f(x) > g(x), \\ f(x) > 0, \\ g(x) > 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \varphi(x) > 1 \\ f(x) > g(x), \\ g(x) > 0. \end{cases}$$

Логарифмические неравенства. Примеры

Пример 1

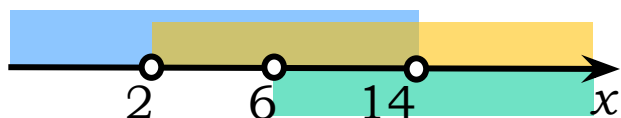
$$\log_3(2x - 4) > \log_3(14 - x)$$

т.к. $a = 3 > 1$, то

$$\begin{cases} 2x - 4 > 14 - x, \\ 2x - 4 > 0, \\ 14 - x > 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x > 18, \\ x > 2, \\ x < 14; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > 6, \\ x > 2, \\ x < 14; \end{cases}$$



Ответ: (6; 14).

Пример 2

$$\log_{\frac{1}{2}}(16 + 4x - x^2) \leq -4$$

$$\log_{\frac{1}{2}}(16 + 4x - x^2) \leq \log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^{-4}$$

$$\log_{\frac{1}{2}}(16 + 4x - x^2) \leq \log_{\frac{1}{2}} 16$$

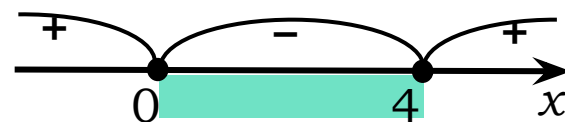
т.к. $a = \frac{1}{2} < 1$, то

$$\begin{cases} 16 + 4x - x^2 \geq 16, \\ 16 + 4x - x^2 > 0; \text{ — лишнее условие} \end{cases}$$

$$4x - x^2 \geq 0$$

$$x^2 - 4x \leq 0$$

$$x(x - 4) \leq 0$$



Ответ: [0; 4].

Логарифмические неравенства. Примеры

Пример 3

$$\lg x + \lg(45 - x) < 2 + \lg 2$$

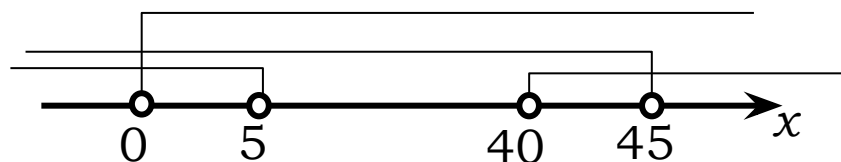
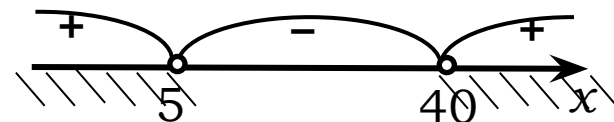
$$\lg(x(45 - x)) < \lg 100 + \lg 2$$

$$\lg(45x - x^2) < \lg 200$$

т.к. $a = 10 > 1$, то

$$\begin{cases} 45x - x^2 < 200, \\ 45 - x > 0, \\ x > 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 - 45x + 200 > 0, & \text{н.ф.: } x^2 - 45x + 200 = 0 \\ x < 45, \\ x > 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = 5, \\ x_2 = 40; \end{cases}$$



Ответ: $(0; 5) \cup (40; 45)$.

Логарифмические неравенства. Примеры

Пример 4

$$\log_2^2 x^2 - 5\log_2 x + 1 \leq 0 \quad \text{ОДЗ : } x > 0$$

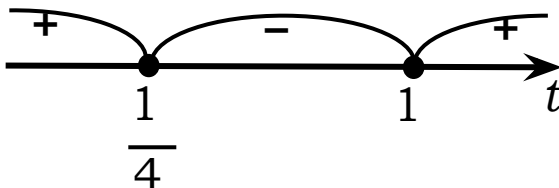
$$(2\log_2 x)^2 - 5\log_2 x + 1 \leq 0$$

$$4\log_2^2 x - 5\log_2 x + 1 \leq 0$$

пусть $\log_2 x = t$, тогда

$$4t^2 - 5t + 1 \leq 0$$

$$\text{н.ф.} : 4t^2 - 5t + 1 = 0$$

$$\left[\begin{array}{l} t_1 = \frac{1}{4}, \\ t_2 = 1; \end{array} \right.$$

$$\frac{1}{4} \leq t \leq 1$$

Вернемся к исходной переменной

$$\frac{1}{4} \leq \log_2 x \leq 1, \text{ т.к. } a = 2, \text{ то}$$

$$\sqrt[4]{2} \leq x \leq 2$$

Ответ : $[\sqrt[4]{2}; 2]$.

Логарифмические неравенства. Примеры

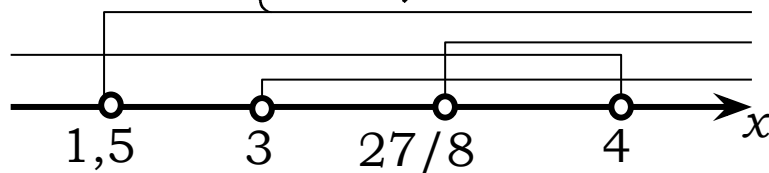
Пример 5

$$\log_{x-2}(2x-3) > \log_{x-2}(24-6x)$$

Возможны два случая :

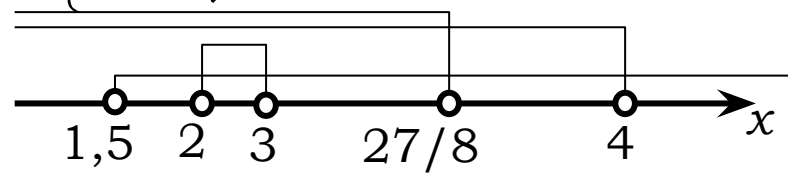
$$1) \begin{cases} x-2 > 1, \\ 2x-3 > 24-6x, \\ 2x-3 > 0, \\ 24-6x > 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > 3, \\ x > \frac{27}{8}, \\ x > 1,5, \\ x < 4; \end{cases}$$



$$2) \begin{cases} 0 < x-2 < 1, \\ 2x-3 < 24-6x, \\ 2x-3 > 0, \\ 24-6x > 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2 < x < 3, \\ x < \frac{27}{8}, \\ x > 1,5, \\ x < 4; \end{cases}$$



$$x \in (27/8;$$

$$x \in (2; 3)$$

$$\text{Ответ: } (2; 3) \cup (27/8; 4)$$

4)

Логарифмическая комедия математический софизм

«2>3»

$$\frac{1}{4} > \frac{1}{8} - \text{очевидно}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 > \left(\frac{1}{2}\right)^3$$

$$\lg\left(\frac{1}{2}\right)^2 > \lg\left(\frac{1}{2}\right)^3$$

$$\cancel{2 \cdot \lg\left(\frac{1}{2}\right)} > \cancel{3 \cdot \lg\left(\frac{1}{2}\right)}$$

$2 > 3$ – неверно!!!