

Методы решения
дифференциальных уравнений
в частных производных
Введение

Дифференциальное уравнение в частных производных

$$F\left(x_1, x_2, \dots, x_n, U, \frac{\partial U}{\partial x_1}, \frac{\partial U}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial U}{\partial x_n}, \frac{\partial^2 U}{\partial x_1^2}, \dots\right) = 0.$$

Здесь U — зависимая переменная (функция), x_i — независимые переменные. Существенно то, что неизвестная функция $U(x_i)$ зависит более, чем от одной переменной.

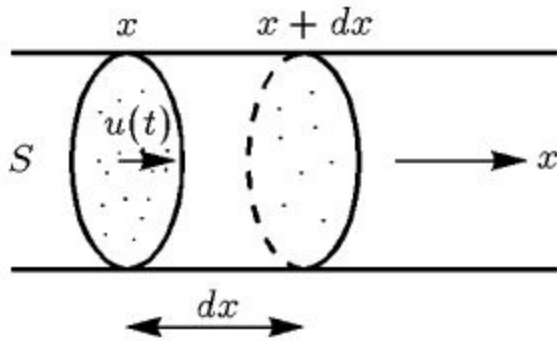
Порядком уравнения называется порядок старшей частной производной.

Квазилинейное уравнение — уравнение линейное относительно всех старших производных от неизвестной функции.

Линейное уравнение — уравнение линейное относительно функции и всех ее частных производных.

Системы ДУЧП

Уравнение непрерывности (переноса)

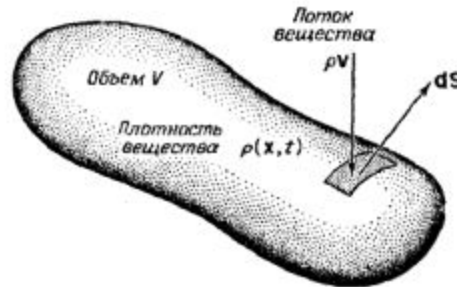


$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial x} u(t) = 0, \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0,$$

с начальным условием

$$\rho(x, 0) = \rho_0(x), \quad -\infty < x < \infty.$$

Уравнение непрерывности (переноса)



Фиг. 3.3. Сохранение массы среды.

Масса, заключенная в объеме V , может измениться только с появлением суммарного потока массы $\rho \mathbf{v} dS$ через поверхность S объема V . В результате получаем уравнение непрерывности (3.1).

$$\text{энергия в объеме } V = \iiint_V \epsilon(\mathbf{x}, t) d\tau;$$

$$\text{поток через } S = - \oint_S \mathbf{q} dS;$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \epsilon(\mathbf{x}, t) d\tau = - \oint_S \mathbf{q} dS. \quad (3.1)$$

Применяя теорему Гаусса — Остроградского к правой части уравнения (3.1) и считая объем V постоянным, получаем

$$\iiint_V \frac{\partial \epsilon}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{q} d\tau = 0. \quad (3.2)$$

Уравнение переноса

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{v} \nabla \rho + \rho \nabla \mathbf{v} = 0,$$

или

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \mathbf{v} = 0,$$

где $d/dt = \partial/\partial t + \mathbf{v} \nabla$ — полная производная по времени, или лагранжева производная. Из того факта, что плотность жидкости можно рассматривать как свойство, локализованное в элементе движущейся жидкости, следует, что плотность переносится вместе с жидкостью.

В случае несжимаемой (хотя и с переменной плотностью) жидкости уравнение сохранения массы имеет вид

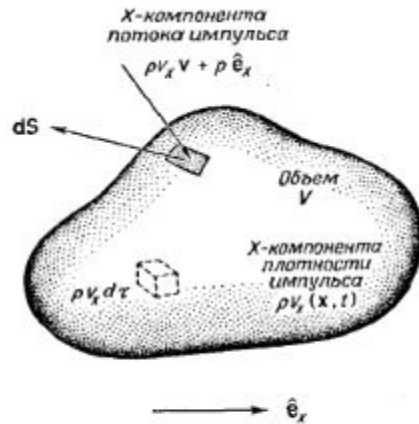
$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{v} \nabla \rho = 0. \quad (3.24)$$

Это уравнение называется уравнением переноса.

$$\omega = kv$$

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{kv} = \frac{\lambda}{|v|}.$$

Уравнение сжимаемой жидкости



Фиг. 3.4. Сохранение импульса в среде.

Поток импульса через поверхность S включает в себя импульс переноса и поток давления.

$\iiint_V \rho v_x d\tau$. - X-проекция импульса объема жидкости

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \rho v_x d\tau = - \oint_S (\rho v_x \mathbf{v} + p \hat{e}_x) dS.$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \rho v_x d\tau = - \iiint_V \nabla (\rho v_x \mathbf{v} + p \hat{e}_x) d\tau, \quad (3.13)$$

$$\frac{\partial \rho v_x}{\partial t} + \nabla (\rho v_x \mathbf{v} + p \hat{e}_x) = 0. \quad (3.14)$$

Аналогично получаются уравнения движения для Y - и Z -направлений. Объединим эти три уравнения в виде

$$\frac{\partial \rho \mathbf{v}}{\partial t} + \nabla (\rho \mathbf{v} \mathbf{v} + p \mathbf{I}) = 0, \quad (3.15)$$

где $\mathbf{I}$ — единичный тензор. Мы записали здесь гидродинамические уравнения (гл. 9), описывающие движение сжимаемой среды.

Уравнения классической гидродинамики

масса:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \rho \mathbf{v} = 0;$$

импульс:

$$\frac{\partial \rho \mathbf{v}}{\partial t} + (\nabla \rho \mathbf{v}) \mathbf{v} = - \nabla p;$$

внутренняя энергия:

$$\frac{\partial \rho \epsilon}{\partial t} + p \nabla \mathbf{v} + \nabla (\rho \epsilon \mathbf{v}) = 0.$$

уравнение состояния

$$\epsilon = \epsilon(p, \rho)$$

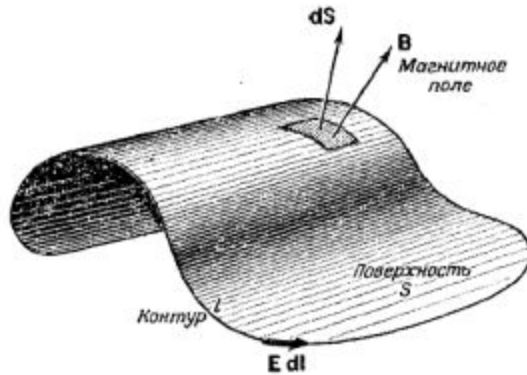
$$\epsilon = \frac{kT}{m(\gamma - 1)} = \frac{p}{\rho(\gamma - 1)}$$

Уравнение теплопроводности

Пусть плотность энергии ϵ пропорциональна температуре T . Из эксперимента известно, что поток тепла $\mathbf{q}$ зависит от градиента температуры. Поэтому, вводя коэффициент пропорциональности (коэффициент теплопроводности) κ , получим уравнение диффузии

$$\frac{\partial T}{\partial t} - \nabla \kappa \nabla T = 0. \quad (3.3)$$

Уравнения электромагнетизма



Это, конечно, согласуется с уравнениями Максвелла, так как, используя закон Гаусса ($\nabla \mathbf{E} = 4\pi \mathbf{j}$), где $\mathbf{E}$ — электрическое поле, имеем

$$\nabla \left(\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + 4\pi \mathbf{j} \right) = 0; \quad (3.6)$$

интегрируя это выражение и учитывая, что $\nabla[\nabla \mathbf{X}] = 0$, получаем

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + 4\pi \mathbf{j} = [\nabla \mathbf{X}]. \quad (3.7)$$

Неизвестный вектор $\mathbf{X}$ пропорционален магнитному полю в соответствии с законом Ампера.

В теории электромагнетизма Максвелла уравнения в частных производных описывают законы сохранения, например закон сохранения *электрического заряда*. В этом случае скорость изменения заряда в объеме V должна равняться потоку заряда (ток $\mathbf{j}$) через поверхность S . Если ρ — плотность заряда $\rho(\mathbf{x}, t)$, то

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \rho d\tau = - \oiint_S \mathbf{j} d\mathbf{S}, \quad (3.4)$$

и, применяя теорему о дивергенции, получаем

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \mathbf{j} = 0. \quad (3.5)$$

Аналогично закон Фарадея выражает сохранение *магнитного потока*: магнитный поток не может создаваться или уничтожаться, поскольку скорость изменения полного потока через поверхность S связана лишь с электрическим полем вдоль границы l поверхности S (фиг. 3.2):

$$\frac{\partial}{\partial t} \iint_S \mathbf{B} d\mathbf{S} = - \oint_l c \mathbf{E} d\mathbf{l}. \quad (3.8)$$

Применяя теорему Стокса, получаем

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + [\nabla \mathbf{E}] = 0. \quad (3.9)$$

Консервативные ДУ

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \mathbf{f} = 0, \quad (3.16)$$

где $\mathbf{u}$ — неизвестная векторная функция, а $\mathbf{f}$ — „поток“:
 $\mathbf{f} = \mathbf{f}(\mathbf{u})$.

Уравнение диффузии

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \kappa \frac{\partial u}{\partial x} = 0,$$

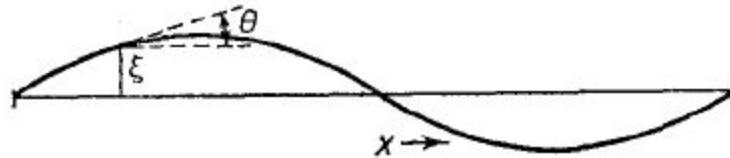
$$i\omega + \kappa k^2 = 0,$$

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\kappa k^2} = \frac{\lambda^2}{2\pi\kappa}.$$

Волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} - V_s^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = 0.$$

В данном случае параметр V_s определяется натяжением T струны и величиной массы m , приходящейся на единицу длины, $V_s = \sqrt{T/m}$. Если L представляет собой



Фиг. 3.5. Волна на струне.

$\xi(x, t)$ — отклонение от положения равновесия; $\theta(x, t)$ — угловое отклонение

$$-\omega^2 + k^2 V_s^2 = 0.$$

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{V_s k} = \frac{\lambda}{V_s}.$$

Уравнение Пуассона и Лапласа

Уравнение Пуассона — эллиптическое дифференциальное уравнение в частных производных, которое описывает

- электростатическое поле,
- стационарное поле температуры,
- поле давления,
- поле потенциала скорости в гидродинамике.

Оно названо в честь знаменитого французского физика и математика Симеона Дени Пуассона.

Это уравнение имеет вид: $\Delta\varphi = f$,

где Δ — оператор Лапласа, или лапласиан, а f — вещественная или комплексная функция на некотором многообразии.

В трёхмерной декартовой системе координат уравнение принимает форму:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \varphi(x, y, z) = f(x, y, z).$$

В декартовой системе координат оператор Лапласа записывается в форме ∇^2 и уравнение Пуассона принимает вид:

$$\nabla^2 \varphi = f.$$

Если f стремится к нулю, то уравнение Пуассона превращается в уравнение Лапласа (уравнение Лапласа — частный случай уравнения Пуассона):

$$\Delta\varphi = 0.$$

$$\omega \rightarrow \infty,$$

$$\tau \rightarrow 0,$$

Классификация ДУЧП 2-го порядка

$$a \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + b \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} + c \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + d \frac{\partial \phi}{\partial x} + e \frac{\partial \phi}{\partial y} + f \phi + g = 0; \quad (3.34)$$

a, b, c, d, e, f и g могут быть функциями независимых переменных x, y , а возможно, и искомой функции ϕ — тогда уравнение будет нелинейным. Формально уравнения в частных производных классифицируются следующим образом:

гиперболические уравнения — при $b^2 - 4ac > 0$;
параболические уравнения — при $b^2 - 4ac = 0$;
эллиптические уравнения — при $b^2 - 4ac < 0$.

Аппроксимация производных конечными разностями

Основная идея МКР:

на область изменения независимых переменных накладывается сетка* и решение ищется не в виде непрерывной функции $U(x, t)$, а в виде дискретного, конечного множества чисел U_i^n , представляющих (заменяющих) функцию $U(x, t)$ на дискретном, конечном множестве значений независимых переменных, т.е. в узлах наложенной сетки. Мы ищем конечный дискретный набор чисел U_i^n над соответствующими узлами сетки.

Простейшей сеткой является равномерная прямоугольная сетка. Такая сетка образуется при пересечении линий $x = x_i = i \cdot h$ ($i = 0, 1, \dots, N$) и $t = t_n = n \cdot \tau$ ($n = 0, 1, \dots$) (см. рис. справа). h — шаг сетки по координате, τ — по времени.

Граничные и начальные условия

Начальные условия (НУ) — условия, определяющие значения искомой функции (и возможно, некоторых ее производных) при одном значении независимой переменной (например, в начальный момент времени, т.е. при $t = 0$).

Если в уравнении присутствует только первая производная по времени (как в уравнении теплопроводности), то достаточно задать одно начальное условие, например, распределение температуры в начальный момент. Если же в уравнении присутствует вторая производная по времени (волновое уравнение), то необходимы два НУ, например, положение струны в начальный момент и скорость движения ее точек.

Граничные условия (ГУ) — условия, определяющие значения искомой функции (и возможно, некоторых ее производных) на границе пространственной области, внутри которой ищется решение (при различных значениях независимых переменных).

ГУ бывают трех типов:

- Задаются значения функции на границе — задача Дирихле,
- Задаются значения производной функции по нормали к границе — задача Неймана,
- Задаются условия Робина: $\left(\frac{\partial U}{\partial n}\right)_G + kU_G = F$ — смешанная граничная задача.

Аппроксимация производных конечными разностями

Слайд №2: Аппроксимация производных.

Определение: замена частных производных в исходном ДУ отношениями конечных разностей.

Общий подход

Неизвестная функция в окрестности выбранного узла записывается в виде полинома

$$U(x) = U_i^n + a(x - x_i) + b(x - x_i)^2 + c(x - x_i)^3 + \dots$$

Искомые производные с точностью до известных численных коэффициентов — это коэффициенты a , b , c , и т.д. Далее, используя значения функции $U(x)$ в соседних узлах наложенной сетки*,

$$\begin{aligned} U_{i-1}^n &= U_i^n - ah + bh^2 - ch^3 + \dots, \\ U_{i+1}^n &= U_i^n + ah + bh^2 + ch^3 + \dots, \\ U_{i-2}^n &= U_i^n - a(2h) + b(2h)^2 - c(2h)^3 + \dots, \\ &\dots \end{aligned}$$

получаем систему уравнений для расчета неизвестных коэффициентов.

Аппроксимация 1-го порядка ТОЧНОСТИ

Используя в дополнение к выбранному i -му узлу наложенной сетки* $i + 1$ -ый, получаем формулу правой аппроксимации* первой производной

$$a = \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)_{i,n} = \frac{U_{i+1}^n - U_i^n}{h} .$$

Для оценки погрешности* аппроксимации производной по этой формуле значения функции в соседних узлах необходимо представить в виде ряда Тейлора

$$U_{i+1}^n = U_i^n + U_x h + \frac{1}{2} U_{xx} h^2 + \dots .$$

Подставляя это разложение, видим

$$a = U_{x(i,n)} + \frac{1}{2} U_{xx(i,n)} h + \dots , \quad \text{Погрешность} \sim O(h) .$$

Формула правой аппроксимации первого порядка точности. Аналогичная формула для аппроксимации производной по времени называется аппроксимацией вперед по времени.

Аппроксимация 1-го порядка ТОЧНОСТИ

Используя в дополнение к выбранному i -му узлу наложенной сетки* $i - 1$ -ый, получаем формулу левой аппроксимации* первой производной

$$a = \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)_{i,n} = \frac{U_i^n - U_{i-1}^n}{h} .$$

Для оценки погрешности* аппроксимации производной по этой формуле значения функции в соседних узлах необходимо представить в виде ряда Тейлора

$$U_{i-1}^n = U_i^n - U_x h + \frac{1}{2} U_{xx} h^2 + \dots .$$

Подставляя это разложение, видим

$$a = U_{x(i,n)} - \frac{1}{2} U_{xx(i,n)} h + \dots , \quad \text{Погрешность} \sim O(h) .$$

Формула левой аппроксимации первого порядка точности. Аналогичная формула для аппроксимации производной по времени называется аппроксимацией назад по времени.

Центральная аппроксимация 2-го порядка

Используя в дополнение к выбранному i -му узлу наложенной сетки* $i - 1$ -ый и $i + 1$ узлы,

$$\begin{cases} U_{i-1}^n = U_i^n - ah + bh^2, \\ U_{i+1}^n = U_i^n + ah + bh^2, \end{cases}$$

получаем формулу центральной аппроксимации* первой производной

$$a = \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)_{i,n} = \frac{U_{i+1}^n - U_{i-1}^n}{2h}.$$

Для оценки погрешности* аппроксимации производной по этой формуле значения функции в соседних узлах необходимо представить в виде рядов Тейлора. Подставляя эти ряды, получим

$$a = U_{x(i,n)} - \frac{1}{6} U_{xxx(i,n)} h^2 + \dots, \quad \text{Погрешность} \sim O(h^2).$$

Формула центральной аппроксимации второго порядка точности. Аналогично строится формула центральной аппроксимации для производной по времени.

Центральная аппроксимация 2-ой производной

Используя в дополнение к выбранному i -му узлу наложенной сетки* $i - 1$ -ый и $i + 1$ узлы,

$$\begin{cases} U_{i-1}^n = U_i^n - ah + bh^2, \\ U_{i+1}^n = U_i^n + ah + bh^2, \end{cases}$$

получаем формулу центральной аппроксимации* второй производной

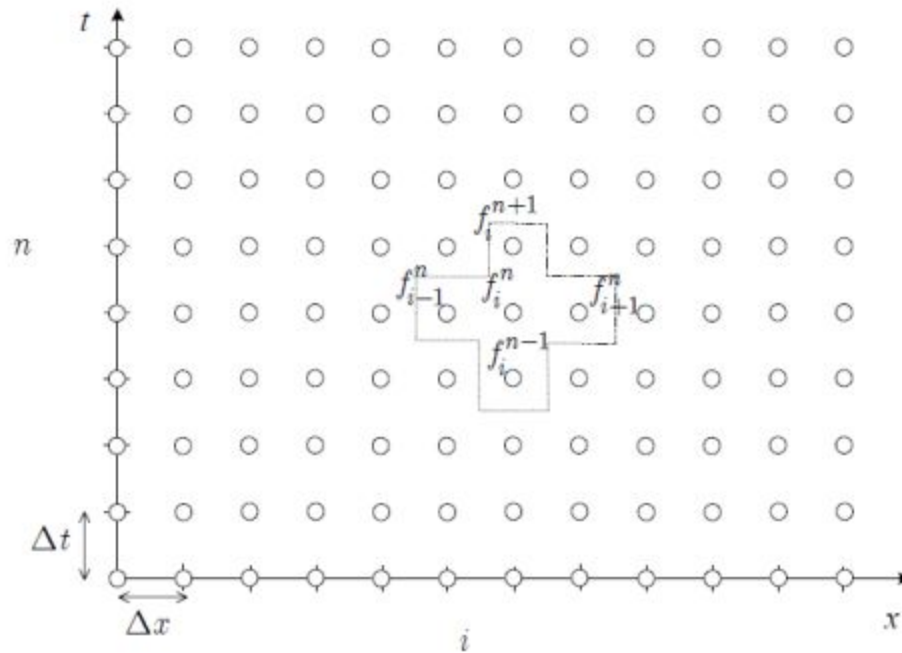
$$b = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{U_{i+1}^n - 2U_i^n + U_{i-1}^n}{2h^2}.$$

Для оценки погрешности* аппроксимации производной по этой формуле значения функции в соседних узлах необходимо представить в виде рядов Тейлора. Подставляя эти ряды, получим

$$b = \frac{1}{2} U_{xx(i,n)} + \frac{1}{24} U_{xxx(i,n)} h^2 + \dots. \quad \text{Погрешность} \sim O(h^2).$$

Формула центральной аппроксимации второго порядка точности.

Сетки и шаблоны



- Given the Initial Conditions: f_i^{-1} , f_i^0
- Given the Boundary Conditions: f_0^n , $f_{N_x}^n$
- Solve for f_i^{n+1} , $\forall_i$

Точность аппроксимации

Для повышения точности аппроксимации производной необходимо использовать большее количество соседних точек.

Так, например, для второй производной помимо $i - 1$ -ого и $i + 1$ -ого узлов (стандартная формула центральной аппроксимации) можно использовать еще $i - 2$ -ой и $i + 2$ -ой узлы:

$$\begin{cases} U_{i-2}^n = U_i^n - a(2h) + b(2h)^2 - c(2h)^3 + d(2h)^4, \\ U_{i-1}^n = U_i^n - ah + bh^2 - ch^3 + dh^4, \\ U_{i+1}^n = U_i^n + ah + bh^2 + ch^3 + dh^4, \\ U_{i+2}^n = U_i^n + a(2h) + b(2h)^2 + c(2h)^3 + d(2h)^4. \end{cases}$$

Решая данную систему относительно коэффициента b , получаем более точную формулу центральной аппроксимации* второй производной

$$b = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{16(U_{i+1}^n + U_{i-1}^n) - (U_{i+2}^n + U_{i-2}^n) - 30U_i^n}{24h^2}.$$

Для оценки погрешности* аппроксимации производной по этой формуле значения функции в соседних узлах необходимо представить в виде рядов Тейлора. Подставляя эти ряды, получим

$$b = \frac{1}{2} U_{xx(i,n)} - \frac{1}{180} U_{(i,n)}^{(IV)} h^4 + \dots, \quad \text{т.е. погрешность} \sim O(h^4).$$

Это центральная аппроксимация четвертого порядка точности.

Явные и неявные схемы

Методы составления схем

- Метод разностной аппроксимации
- Интегро-интерполяционный метод (законы сохранения)
- Метод неопределенных коэффициентов

Сходимость

Сходимость

Множество U_i^n называют численным решением ДУ, если выполняется условие сходимости:

$$\|U_i^n - U(x = ih, t = n\tau)\|_v \rightarrow 0, \quad \text{при } h \rightarrow 0, \text{ и } \tau \rightarrow 0.$$

Двойными вертикальными линиями отмечена норма отклонения численного (дискретного) решения от истинного решения. Норму отклонения над дискретным пространством узлов v можно ввести, например, так

$$\|\dots\|_v = \max_v |U - U_i^n|.$$

Анализ устойчивости по методу Неймана

$$\frac{du}{dt} = Lu.$$

$$u_j^{n+1} = T(\Delta t, \Delta) u_j^n,$$

$$u_j^n = \hat{u}^n e^{ikx_j},$$

$$\hat{u}^{n+1} = G(\Delta t, \Delta, k) \hat{u}^n,$$

Исследуется поведение Фурье-мод на сетке независимо друг от друга.

Требуется устойчивость для каждой из мод в отдельности.

G – матрица перехода разностной схемы для выбранной фурье-моды с волновым числом k .

Устойчивость моды предполагает, что если ее амплитуда в начальный момент времени конечна, то она должна оставаться конечной на всех n шагах.

Тогда
$$\hat{u}^n = \sum_{\mu} \hat{u}_{\mu}^0 g_{\mu}^n s^{(\mu)}.$$

и условие устойчивости - $|\hat{u}_{\mu}^0 g_{\mu}^n| < K |\hat{u}_{\mu}^0|,$

Разложим моду по собственным векторам G

$$\hat{u}^0 = \sum_{\mu} \hat{u}_{\mu}^0 s^{(\mu)}.$$

$$G s^{(\mu)} = g_{\mu} s^{(\mu)},$$

или

$$|g_{\mu}| < K^{1/n}.$$

$$K^{1/n} \rightarrow 1 \text{ при } n \rightarrow \infty$$

$$|g_{\mu}| \leq 1$$

$$|g_{\mu}| = \sqrt{g_{\mu}^* g_{\mu}}$$

Анализ устойчивости

- Матрица перехода может меняться по пространственной и временной сеткам – условие устойчивости должно выполняться глобально.

Анализ уравнения переноса

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{v \Delta t}{2\Delta} (u_{j+1}^n - u_{j-1}^n).$$

$$\hat{u}^{n+1} e^{ikx_j} = \hat{u}^n e^{ikx_j} - \frac{v \Delta t}{2\Delta} \hat{u}^n (e^{ikx_{j+1}} - e^{ikx_{j-1}}),$$

или

$$\hat{u}^{n+1} = \left\{ 1 - i \frac{v \Delta t}{\Delta} \sin(k\Delta) \right\} \hat{u}^n. \quad (3.55)$$

Таким образом, множитель перехода $g(\Delta t, \Delta, k)$ для схемы является комплексным

$$g = 1 - i\alpha, \quad (3.56)$$

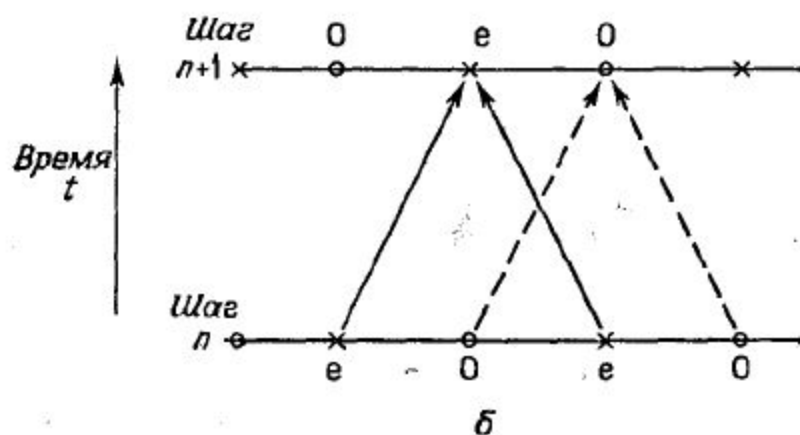
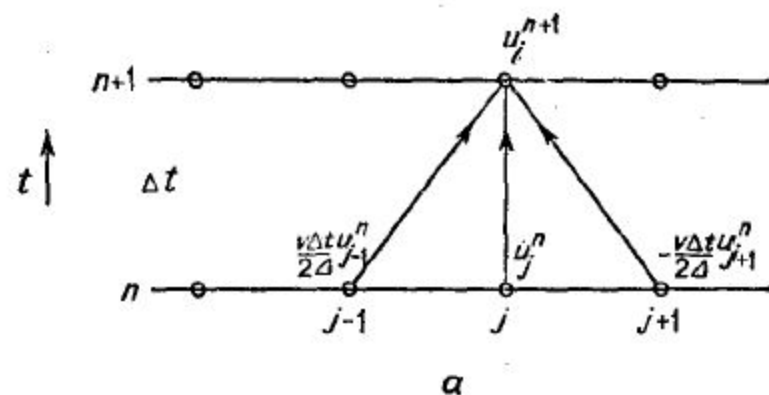
где

$$\alpha = \frac{v \Delta t}{\Delta} \sin(k\Delta),$$

и, следовательно, нужно брать модуль комплексного множителя перехода:

$$|g|^2 = gg^* = 1 + \alpha^2. \quad (3.57)$$

Видно, что для этой схемы модуль множителя перехода всегда больше единицы и что условие Неймана (3.47) не может выполняться ни при каких ненулевых α и ни при каких временных шагах. Разностной схеме (3.54) свойственна *неустойчивость* для всех временных шагов Δt , и она показывает, что не все согласованные и наглядные схемы полезны.



Фиг. 3.7. Неустойчивая схема первого порядка (3.54) для решения уравнения переноса.

a — производная по времени вычисляется по точкам $(n+1, j)$ и (n, j) , а по пространству — по точкам $(n, j+1)$ и $(n, j-1)$; б — схема неустойчива, поскольку существуют две взаимопроникающие сетки, не связанные в том смысле, что перенос по сетке «е» происходит независимо от переноса по сетке «0».

Схема Лакса

Можно найти устойчивую, полезную схему первого порядка для уравнения переноса, заменяя u_j^n в явном алгоритме (3.54) на пространственное среднее:

$$u_j^{n+1} = \frac{1}{2} (u_{j+1}^n + u_{j-1}^n) - \frac{v \Delta t}{2\Delta} (u_{j+1}^n - u_{j-1}^n). \quad (3.58)$$

Этот алгоритм в применении к гиперболическим уравнениям известен как схема Лакса [6] и широко применяется. Исследуем, как и ранее, устойчивость этой схемы. Подставляя в схему отдельную фурье-моду, получим соотношение

$$\hat{u}^{n+1} = \left\{ \cos(k\Delta) - i \frac{v \Delta t}{\Delta} \sin(k\Delta) \right\} \hat{u}^n, \quad (3.59)$$

$$g = \cos(k\Delta) - i \frac{v \Delta t}{\Delta} \sin(k\Delta). \quad (3.60)$$

Квадрат модуля этого комплексного множителя перехода

$$\begin{aligned} gg^* &= \cos^2(k\Delta) + \left(\frac{v \Delta t}{\Delta} \right)^2 \sin^2(k\Delta) = \\ &= 1 - \sin^2(k\Delta) \left\{ 1 - \left(\frac{v \Delta t}{\Delta} \right)^2 \right\}. \end{aligned} \quad (3.61)$$

Следовательно, условие устойчивости Неймана (3.47) будет выполнено для всех волновых чисел k , если

$$\begin{aligned} \frac{|v \Delta t|}{\Delta} &\leq 1, \\ \Delta t &\leq \frac{\Delta}{|v|}. \end{aligned} \quad (3.62)$$

Это условие для шага по времени является примером условия устойчивости Куранта — Фридрихса — Леви [7],

Дисперсия и диффузия на сетке

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(u_j^{n+1} - u_j^{n-1}) + \frac{1}{2}(u_j^{n+1} - 2u_j^n + u_j^{n-1}) = \\ = \frac{1}{2}(u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n) - \\ - \frac{v \Delta t}{2\Delta}(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n). \end{aligned} \quad (3.63)$$

Это уравнение, теперь уже с точностью второго порядка, эквивалентно дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\Delta^2}{2\Delta t} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + v \frac{\partial u}{\partial x} = 0. \quad (3.64)$$

Разностная схема Лакса соответствует ДУ с диффузионным членом (3), который компенсирует нестабильность, связанную с тем, что схема не центрирована по времени.

Дисперсия сетки

$$\frac{\partial u}{\partial t} + v \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad u(x, t) = \hat{u} e^{i(\omega t - kx)},$$

$$\omega = vk.$$

Для уравнения переноса дисперсия линейна, все гармоники имеют одинаковые фазовую и групповую скорости

Обратимся теперь к разностной схеме (3.58) и подставим в нее фурье-моду:

$$\hat{u} e^{i[\omega(t^n + \Delta t) - kx_j]} = \frac{1}{2} \hat{u} e^{i(\omega t^n - kx_j)} \left\{ (e^{ik\Delta} + e^{-ik\Delta}) - \frac{v \Delta t}{\Delta} (e^{ik\Delta} - e^{-ik\Delta}) \right\}. \quad (3.67)$$

Приводя подобные члены, получаем

$$e^{i\omega \Delta t} = \cos(k\Delta) - \frac{v \Delta t}{\Delta} i \sin(k\Delta). \quad (3.68)$$

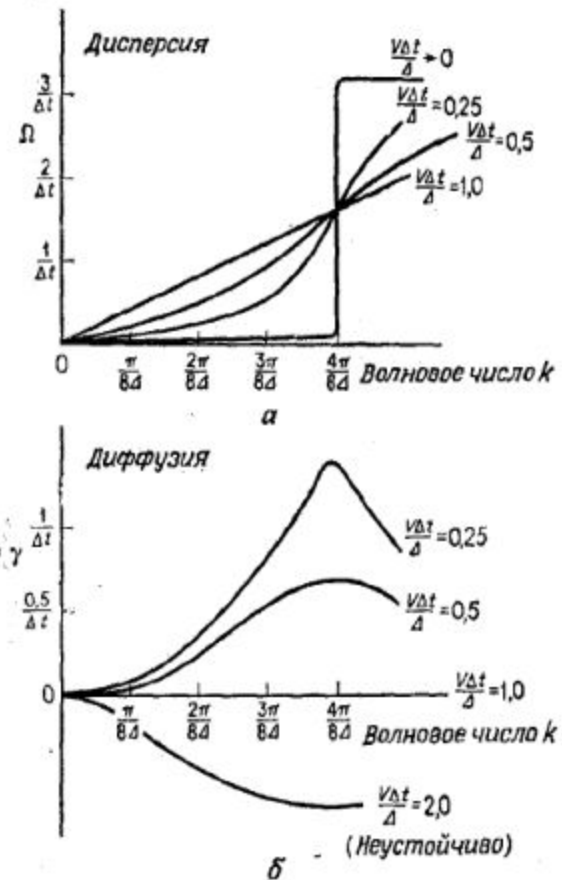
В общем случае ω комплексно, и, используя обозначение $\omega = \Omega + i\gamma$, можно приравнять отдельно действительные и мнимые части дисперсионного соотношения:

$$\operatorname{tg}(\Omega \Delta t) = \frac{v \Delta t}{\Delta} \operatorname{tg}(k\Delta); \quad (3.69)$$

$$e^{-2\gamma \Delta t} = \cos^2(k\Delta) + \left(\frac{v \Delta t}{\Delta} \right)^2 \sin^2(k\Delta). \quad (3.70)$$

В частном случае, когда $v \Delta t / \Delta = 1$, γ равно нулю и

$$\Omega = vk, \quad (3.71)$$



Фиг. 3.8. а — дисперсия; б — диффузия в методе Лакса для уравнения переноса.

Численные эффекты на сетке становятся сильными для коротких длин волн ($k\Delta \rightarrow 1/2 \pi$).

Дисперсия сетки для одномерного волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad u(x, t) = e^{j(\omega t - kx)} \quad \begin{aligned} -\omega^2 &= c^2 \cdot (-k^2) \\ \omega^2 &= c^2 k^2 \rightarrow k = \pm \omega / c \end{aligned}$$

$$v_p = \frac{\omega}{k} = \pm c \quad \begin{aligned} 2\omega \frac{d\omega}{dk} &= c^2 \cdot (2k) \\ v_g = \frac{d\omega}{dk} &= \frac{2c^2 k}{2\omega} = \frac{c^2}{\omega} \cdot \left(\pm \frac{\omega}{c} \right) = \pm c \end{aligned}$$

Теперь рассмотрим дисперсию схемы

$$\frac{u_i^{n+1} - 2u_i^n + u_i^{n-1}}{(\Delta t)^2} + O[(\Delta t)^2] = c^2 \left\{ \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{(\Delta x)^2} + O[(\Delta x)^2] \right\} \quad (2.10)$$

$$u_i^{n+1} \equiv (c\Delta t)^2 \left[\frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{(\Delta x)^2} \right] + 2u_i^n - u_i^{n-1} \quad u_i^n = u(x_i, t_n) = e^{j(\omega n \Delta t - \tilde{k} i \Delta x)}$$

$$\cos(\omega \Delta t) = \left(\frac{c\Delta t}{\Delta x} \right)^2 \cdot [\cos(\tilde{k} \Delta x) - 1] + 1$$

Дисперсия сетки для одномерного волнового уравнения

Рассмотрим случай очень плотной сетки $(\Delta t \rightarrow 0, \Delta x \rightarrow 0)$

$$1 - \frac{(\omega \Delta t)^2}{2} \equiv \left(\frac{c \Delta t}{\Delta x} \right)^2 \cdot \left[1 - \frac{(\tilde{k} \Delta x)^2}{2} - 1 \right] + 1$$

$$\frac{\omega^2 (\Delta t)^2}{2} = \frac{c^2 (\Delta t)^2}{(\Delta x)^2} \cdot \frac{\tilde{k}^2 (\Delta x)^2}{2} \rightarrow \omega^2 = c^2 \tilde{k}^2 \rightarrow \tilde{k} = \pm \frac{\omega}{c}$$

Рассмотрим случай $(c \Delta t = \Delta x)$

$$\cos(\omega \Delta t) = 1 \cdot [\cos(\tilde{k} \Delta x) - 1] + 1 = \cos(\tilde{k} \Delta x)$$

$$\tilde{k} \Delta x = \pm \omega \Delta t \rightarrow \tilde{k} = \pm \frac{\omega \Delta t}{\Delta x} = \pm \frac{\omega \Delta t}{c \Delta t} = \pm \frac{\omega}{c}$$

Дисперсия сетки для одномерного волнового уравнения

Общий случай (дисперсия на сетке)

$$\tilde{k} = \frac{1}{\Delta x} \cos^{-1} \left\{ 1 + \left(\frac{\Delta x}{c \Delta t} \right)^2 \cdot [\cos(\omega \Delta t) - 1] \right\}$$

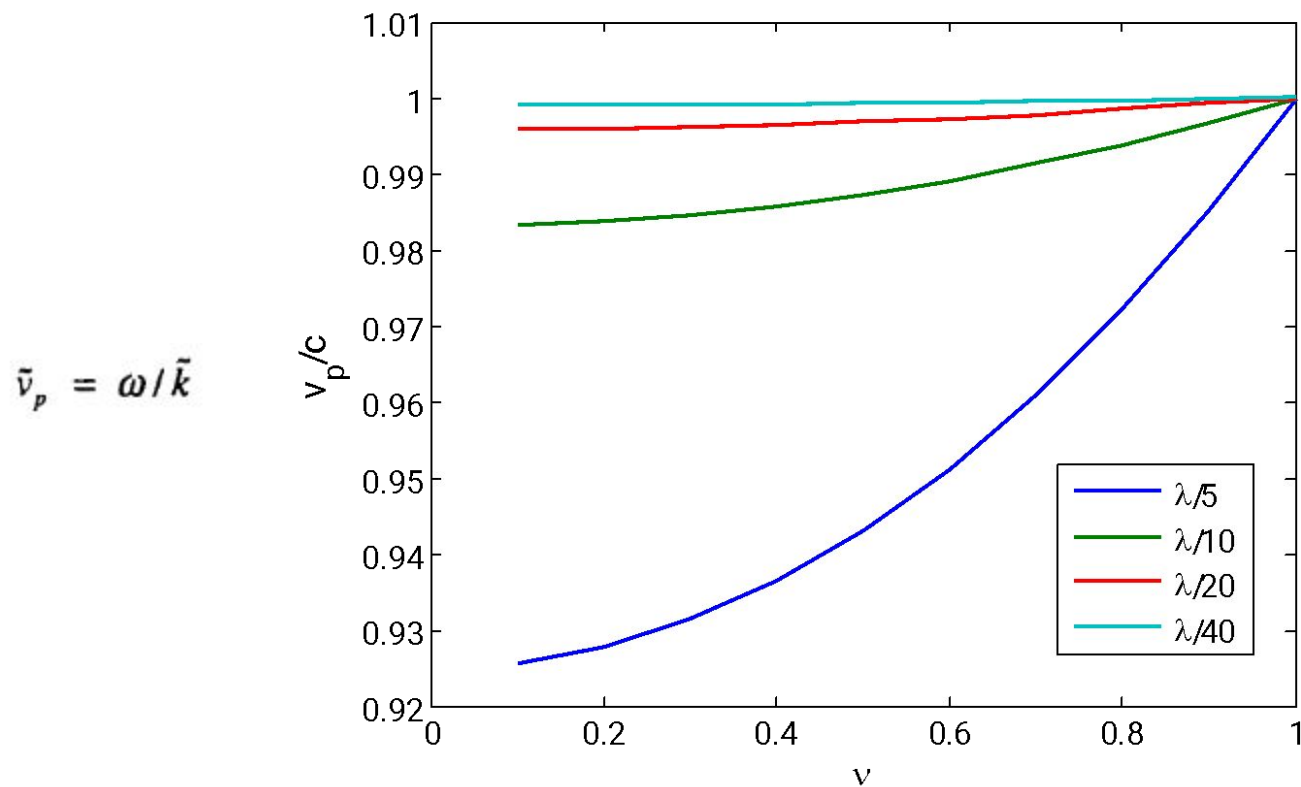


Схема 2-го порядка точности по времени и пространству (Лакса-Вендрофа)

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} = 0. \quad \text{Вспомогательный шаг:}$$

$$u_{j+1/2}^{n+1/2} = \frac{1}{2}(u_j^n + u_{j+1}^n) - \frac{\Delta t}{2\Delta}(F_{j+1}^n - F_j^n). \quad (3.92)$$

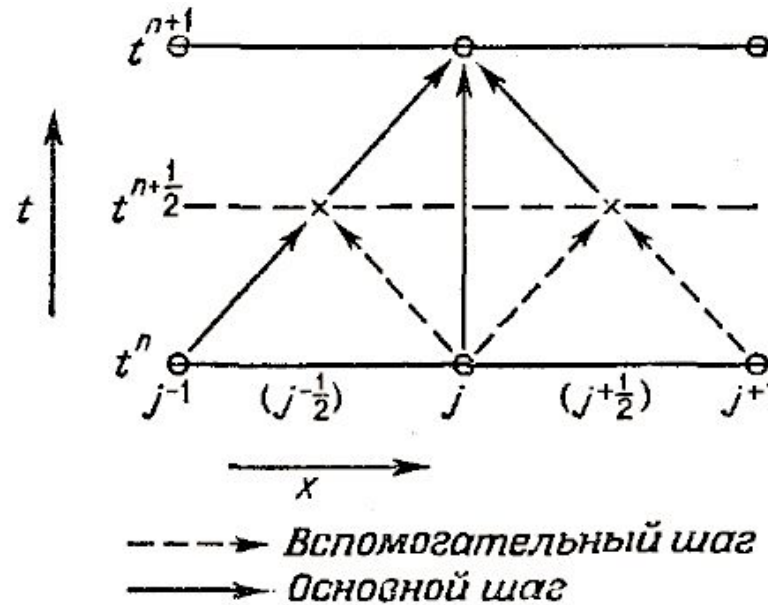
Эти значения теперь используются для определения потоков в промежуточных временных и пространственных точках:

$$F_{j+1/2}^{n+1/2} = F(u_{j+1/2}^{n+1/2}). \quad (3.93)$$

Основной шаг:

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta}(F_{j+1/2}^{n+1/2} - F_{j-1/2}^{n+1/2}). \quad (3.94)$$

Схема 2-го порядка точности по времени и пространству (Лакса-Вендрофа)



Фиг. 3.11. Консервативный двухшаговый метод Лакса -- Вендрофа на сетке в плоскости $(x - t)$.

Метод Лакса используется для получения промежуточных величин на полущагах по времени $(n + 1/2, j + 1/2)$. Эти величины используются для центрирования по времени интеграла, чтобы получить точность второго порядка.

Устойчивость метода Лакса-Вендрофа

Устойчивость метода можно исследовать, снова обращаясь к уравнению переноса, где $F = v\psi$. Для фурье-моды $\exp(ikx)$ множитель перехода g определяется из уравнений (3.92) и (3.94):

$$\begin{aligned} g &= 1 - \frac{\Delta t v}{\Delta} \left[i \sin(k\Delta) - \frac{\Delta t v}{\Delta} \{\cos(k\Delta) - 1\} \right] = \\ &= 1 - i\alpha \sin(k\Delta) + \alpha^2 \{\cos(k\Delta) - 1\}, \end{aligned} \quad (3.95)$$

где $\alpha = \Delta t v / \Delta$. Множитель перехода g вновь комплексный и квадрат его модуля равен

$$\begin{aligned} gg^* &= [1 + \alpha^2 \{\cos(k\Delta) - 1\}]^2 + \alpha^2 \sin^2(k\Delta) = \\ &= 1 - \alpha^2 (1 - \alpha^2) \{1 - \cos(k\Delta)\}^2. \end{aligned} \quad (3.96)$$

$$\alpha^2 \leq 1,$$

$$\Delta t \leq \frac{\Delta}{|v|}, \quad (3.97)$$

т. е. снова требуется выполнение условий Куранта — Фридрихса — Леви.

Диффузия в схеме Лакса-Вендрофа

$$gg^* = 1 - \alpha^2(1 - \alpha^2) \frac{k^4 \Delta^4}{4} + o(k^4 \Delta^4). \quad (3.98)$$

Таким образом, численная диффузия имеет четвертый порядок малости по волновому числу, так что длинные волны подвержены возмущению лишь в минимальной степени, в то же время эффект диффузии четвертого порядка малости оказывается даже полезным для сглаживания разрывов на сетке (см. гл. 9). Кроме того, необходимо отметить, что в методе Лакса — Вендрофа не вносятся никаких посторонних и дополнительных численных мод. Эти преимущества метода привели к его широкому применению.

Условие устойчивости в многомерных задачах гиперболического типа

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} = 0, \quad F_x = v_x u \text{ и } F_y = v_y u$$

Метод Лакса

$$u_{ij}^{n+1} = \frac{1}{4} (u_{i+1,j}^n + u_{i-1,j}^n + u_{i,j+1}^n + u_{i,j-1}^n) - \frac{\Delta t}{2\Delta} v_x (u_{i+1,j}^n - u_{i-1,j}^n) - \frac{\Delta t}{2\Delta} v_y (u_{i,j+1}^n - u_{i,j-1}^n). \quad (3.107)$$

$$u_{j,l}^n = \hat{u}_{k_x k_y}^n e^{ik_x \Delta} e^{ik_y \Delta}$$

$$u_{j,l}^{n+1} = \hat{u}_{k_x k_y}^{n+1} e^{ik_x \Delta} e^{ik_y \Delta}$$

$$\hat{u}_{k_x k_y}^{n+1} = \hat{u}_{k_x k_y}^n g$$

Используя обозначения $\theta_x = \Delta t v_x / \Delta$, $\theta_y = \Delta t v_y / \Delta$, $\alpha = k_x \Delta$ и $\beta = k_y \Delta$, множителю перехода g двойной фурье-моды можно придать вид

$$g = \frac{1}{2} \cos \alpha + \frac{1}{2} \cos \beta - i\theta_x \sin \alpha - i\theta_y \sin \beta. \quad (3.108)$$

Поскольку выражение комплексно, вычислим модуль множителя перехода

$$gg^* = \left(\frac{1}{2} \cos \alpha + \frac{1}{2} \cos \beta \right)^2 + (\theta_x \sin \alpha + \theta_y \sin \beta)^2.$$

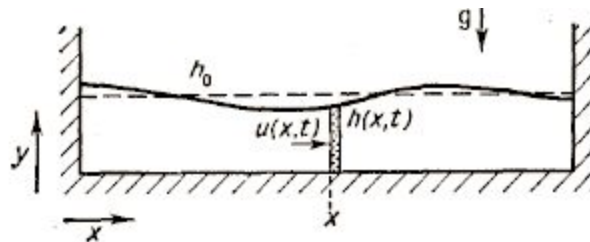
Перегруппировав члены, можно написать

$$gg^* = 1 - (\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta) \left\{ \frac{1}{2} - (\theta_x^2 + \theta_y^2) \right\} - \frac{1}{4} (\cos \alpha - \cos \beta)^2 - (\theta_y \sin \alpha - \theta_x \sin \beta)^2. \quad (3.109)$$

$$\frac{1}{2} - (\theta_x^2 + \theta_y^2) \geq 0$$

$$\Delta t \leq \frac{\Delta}{(v_x^2 + v_y^2)^{1/2} \sqrt{2}},$$

Задачи гидродинамики / свободная поверхность / метод маркеров

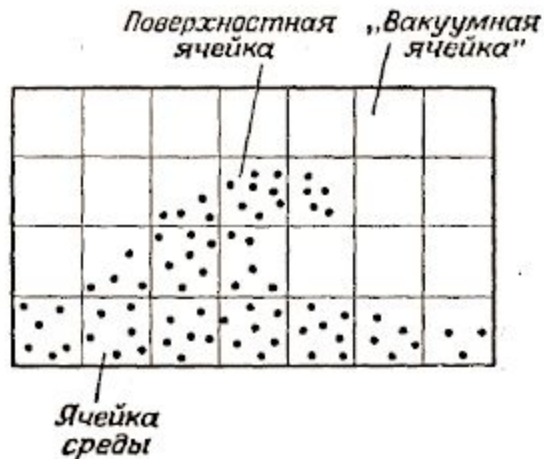


$$\Delta t \leq \frac{\Delta}{\sqrt{gh}},$$

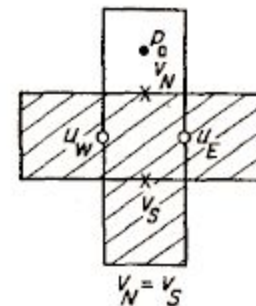
Фиг. 9.9. Волны на поверхности тяжелой жидкости в мелком резервуаре.

Каждый вертикальный столб жидкости перемещается как целое и характеризуется высотой $h(x, t)$ и горизонтальной скоростью $u(x, t)$.

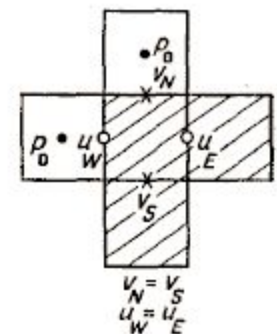
$$n \nabla \bar{p} = g n.$$



Фиг. 9.10. Метод маркеров на сетке.
Маркеры определяют ячейки, занятые жидкостью.



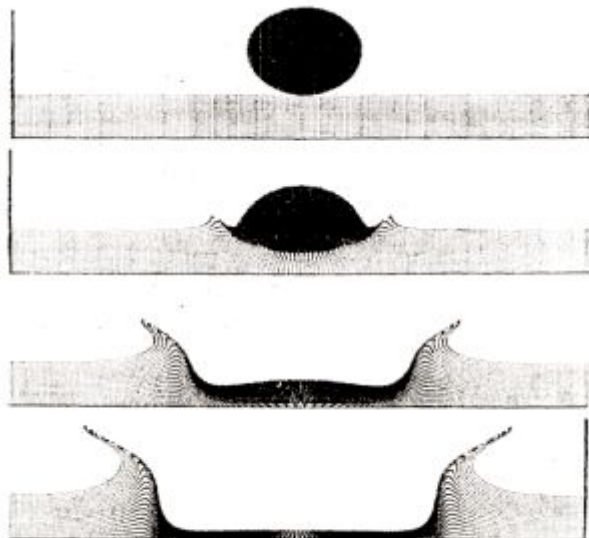
а



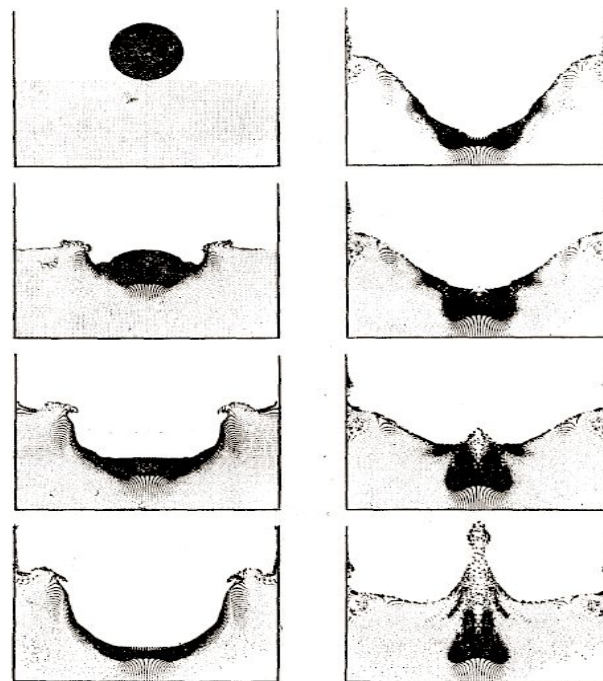
б



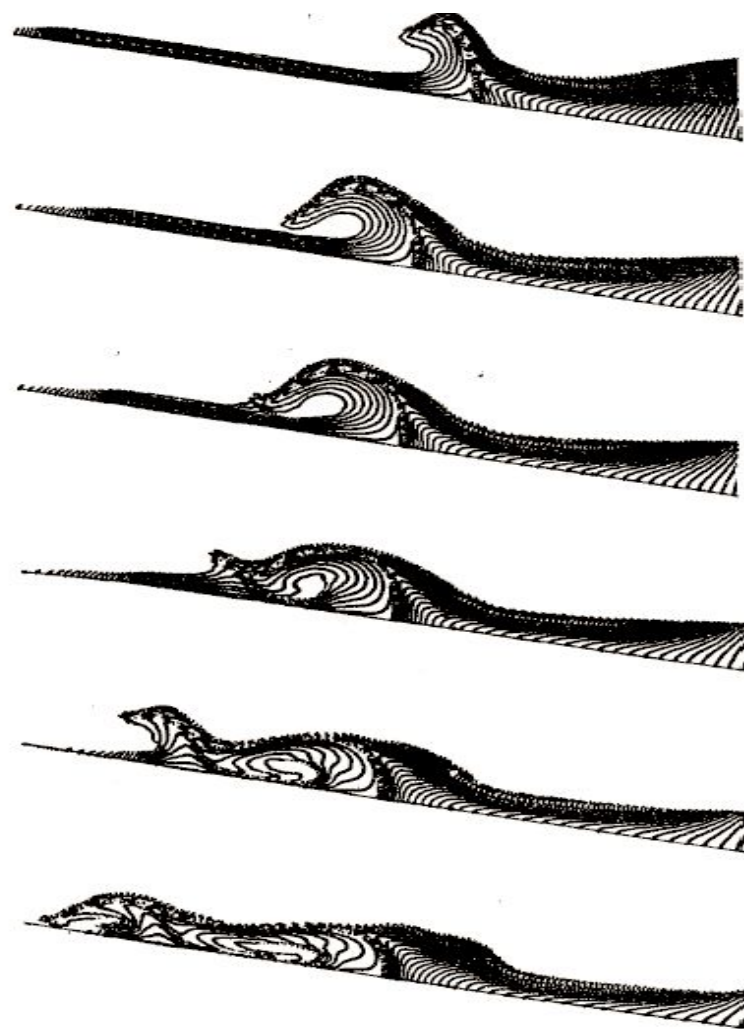
Фиг. 9.13. Фотография всплеска от капли жидкости (из работы [47])
В трехмерном случае край короны неустойчив из-за неустойчивости Рэлея —
Тейлора.



Фиг. 9.12. Всплеск от падения капли жидкости в мелкий бассейн.
Моделирование выполнено методом маркеров на сетке в двумерном случае
(из работы [74]). Эту фигуру можно сравнить с фотографией всплеска от капли
(фиг. 9.13) и с всплеском в сжимаемой жидкости, рассчитанным с помощью
метода частиц в дробке (фиг. 6.17).

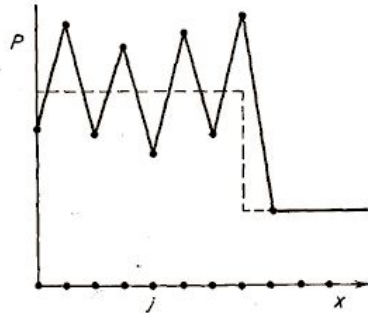


Фиг. 9.14. Всплеск от падения капли жидкости в глубокий бассейн,
рассчитанный методом маркеров на сетке (из работы [73]).

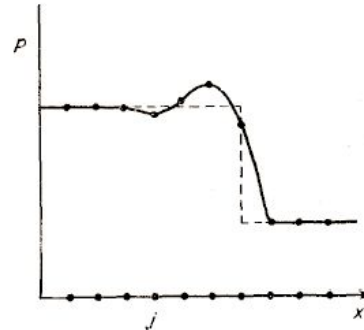


Фиг. 9.15. Прибой на морском берегу, рассчитанный методом маркер-
 керов на сетке (из работы [68]).
 Изображенные в виде точек меченые частицы (маркеры) показывают области
 ламинарного течения и области турбулентности.

Задачи гидродинамики / разрывы и ударные волны



Фиг. 9.22. Ложные нелинейные колебания за фронтом ударной волны, образующиеся при эйлеровом разностном расчете в отсутствие искусственной вязкости.
Длина колебаний связана с шагом сетки.



Фиг. 9.23. Ударная волна на разностной сетке при внесении искусственной вязкости.
Энергия колебаний, обусловленных дискретностью сетки, преобразуется в тепловую энергию.

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0,$$

the **total variation** (TV) is given by,

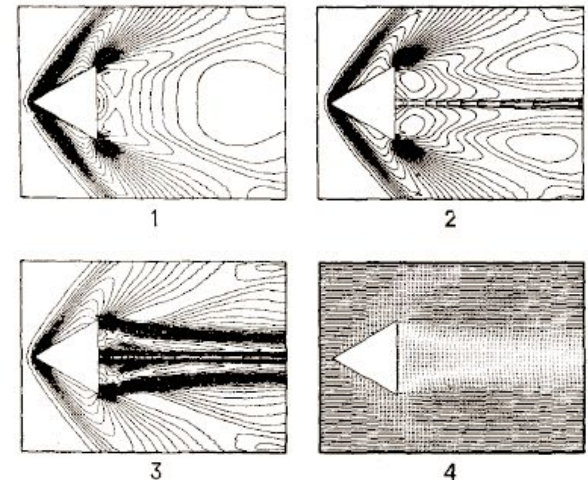
$$TV = \int \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right| dx,$$

and the **total variation** for the discrete case is,

$$TV = \sum_j |u_{j+1} - u_j|.$$

A numerical method is said to be **total variation diminishing** (TVD) if,

$$TV(u^{n+1}) \leq TV(u^n).$$



Фиг. 9.21. Диаграммы стационарных состояний при сверхзвуковом движении конуса с углом 30° при вершине через однородный газ.
1 — давление; 2 — плотность; 3 — удельная внутренняя энергия; 4 — скорость.
Решения получены эйлеровым разностным методом.

Harten, Ami (1983), "High resolution schemes for hyperbolic conservation laws", *J. Comput. Phys.*, **49**: 357–393

Консервативные схемы

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{F}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{F}_z}{\partial z} = 0, \quad (9.91)$$

где неизвестные функции образуют вектор-столбец $\mathbf{u} = \{\rho, \rho v_x, \rho v_y, \rho v_z, \frac{1}{2} \rho v^2 + p\}$. При этом потоки определены соотношениями

$$\mathbf{F}_x = \begin{bmatrix} \rho v_x \\ \rho v_x^2 + p \\ \rho v_y v_x \\ \rho v_z v_x \\ \left(\rho e + \frac{1}{2} \rho v^2 + p\right) v_x \end{bmatrix}; \quad \mathbf{F}_y = \begin{bmatrix} \rho v_y \\ \rho v_x v_y \\ \rho v_y^2 + p \\ \rho v_z v_y \\ \left(\rho e + \frac{1}{2} \rho v^2 + p\right) v_y \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{F}_z = \begin{bmatrix} \rho v_z \\ \rho v_x v_z \\ \rho v_y v_z \\ \rho v_z^2 + p \\ \left(\rho e + \frac{1}{2} \rho v^2 + p\right) v_z \end{bmatrix}. \quad (9.92)$$

Схема FDTD для задач электродинамики

Faraday's Law:

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\nabla \times \vec{E} - \vec{J}_m$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \iint_s \vec{B} \cdot d\hat{S} = -\oint_c \vec{E} \cdot d\hat{l} - \iint_s \vec{J}_m \cdot d\hat{S}$$

Gauss's Law for the electric field:

$$\nabla \cdot \vec{D} = 0$$

$$\oiint_s \vec{D} \cdot d\hat{S} = 0$$

Ampere's Law:

$$\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \nabla \times \vec{H} - \vec{J}_e$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \iint_s \vec{D} \cdot d\hat{S} = \oint_c \vec{H} \cdot d\hat{l} - \iint_s \vec{J}_e \cdot d\hat{S}$$

Gauss's Law for the magnetic field:

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

$$\oiint_s \vec{B} \cdot d\hat{S} = 0$$

$$\vec{B} = \mu \vec{H}$$

$$\vec{J}_m = \rho' \vec{H}$$

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E}$$

$$\vec{J}_e = \sigma \vec{E}$$

Схема FDTD для задач электродинамики

$$\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = -\frac{1}{\mu} \nabla \times \vec{E} - \frac{\rho'}{\mu} \vec{H}$$

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon} \nabla \times \vec{H} - \frac{\sigma}{\varepsilon} \vec{E}$$

$$\frac{\partial H_x}{\partial t} = \frac{1}{\mu} \cdot \left(\frac{\partial E_y}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial y} - \rho' H_x \right)$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial t} = \frac{1}{\mu} \cdot \left(\frac{\partial E_z}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial z} - \rho' H_y \right)$$

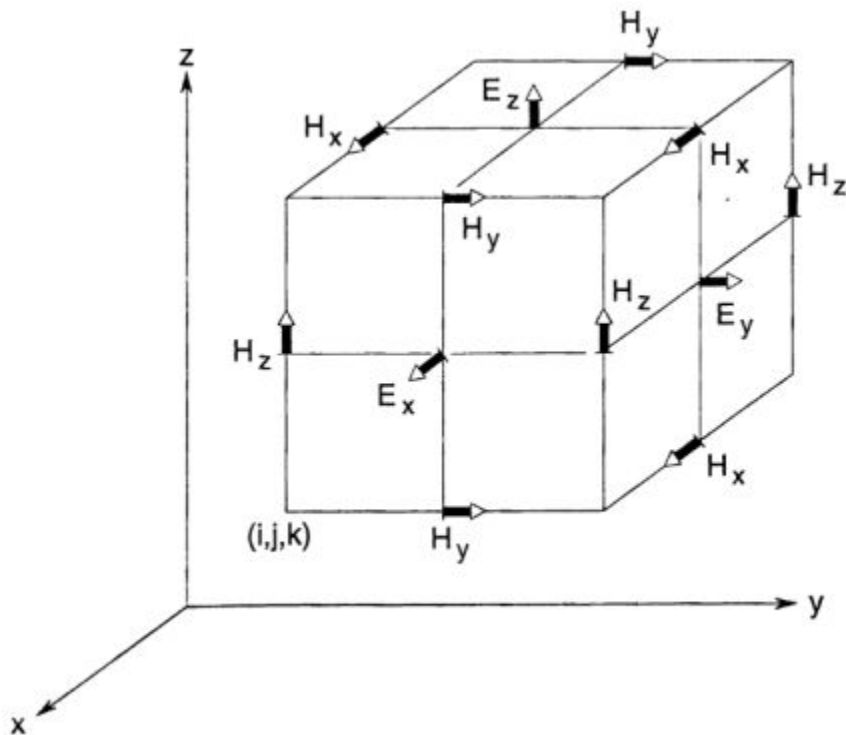
$$\frac{\partial H_z}{\partial t} = \frac{1}{\mu} \cdot \left(\frac{\partial E_x}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial x} - \rho' H_z \right)$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon} \cdot \left(\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} - \sigma E_x \right)$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon} \cdot \left(\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} - \sigma E_y \right)$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon} \cdot \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} - \sigma E_z \right)$$

Схема FDTD для задач электродинамики



$$\oiint_{\text{Yee cell}} \vec{D}(t) \cdot d\hat{S} = \oiint_{\text{Yee cell}} \vec{D}(t=0) \cdot d\hat{S} = 0$$

Схема FDTD для задач электродинамики

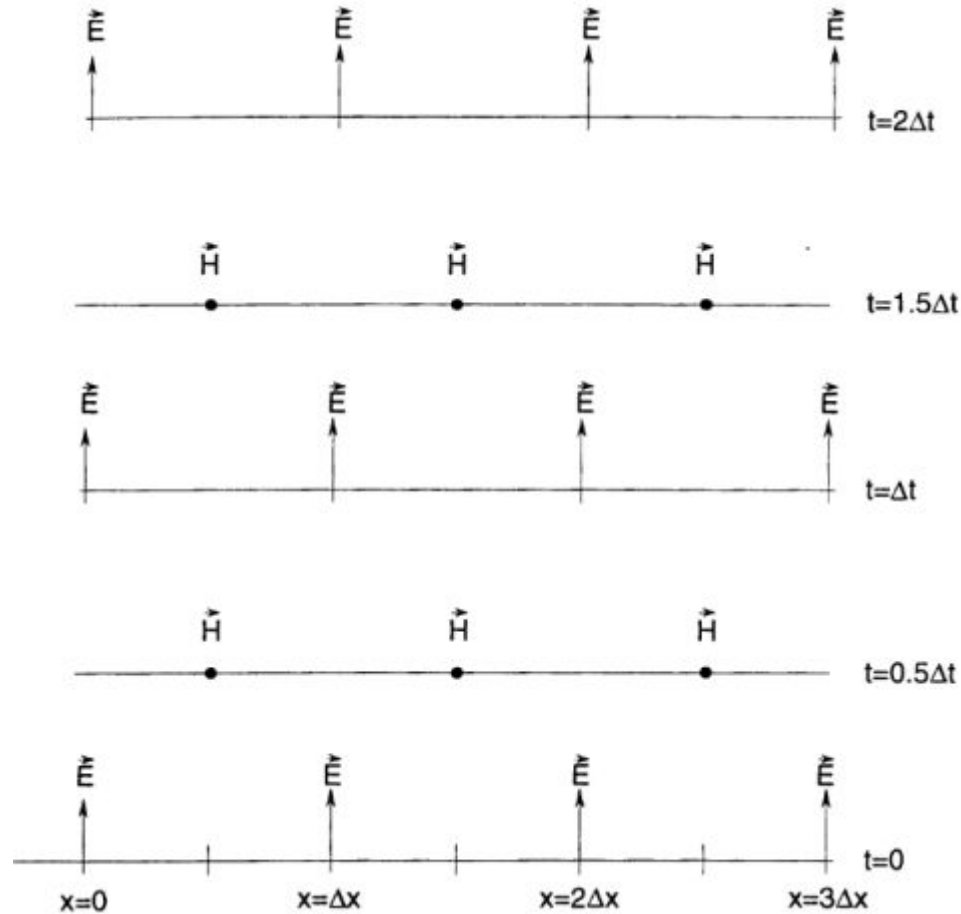


Схема FDTD для задач электродинамики

$$\frac{\partial u}{\partial x}(i\Delta x, j\Delta y, k\Delta z, n\Delta t) = \frac{u_{i+1/2, j, k}^n - u_{i-1/2, j, k}^n}{\Delta x} + O[(\Delta x)^2]$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(i\Delta x, j\Delta y, k\Delta z, n\Delta t) = \frac{u_{i, j, k}^{n+1/2} - u_{i, j, k}^{n-1/2}}{\Delta t} + O[(\Delta t)^2]$$

Схема FDTD для задач электродинамики

$$H_x|_{i,j,k}^{n+1/2} - H_x|_{i,j,k}^{n-1/2} = \frac{\Delta t}{\mu_{i,j,k}} \left[\frac{E_y|_{i,j,k+1/2}^n - E_y|_{i,j,k-1/2}^n}{\Delta z} - \frac{E_z|_{i,j+1/2,k}^n - E_z|_{i,j-1/2,k}^n}{\Delta y} - \rho'_{i,j,k} \left(\frac{H_x|_{i,j,k}^{n+1/2} + H_x|_{i,j,k}^{n-1/2}}{2} \right) \right]$$

$$H_x|_{i,j,k}^{n+1/2} = \left(\frac{1 - \frac{\rho'_{i,j,k} \Delta t}{2\mu_{i,j,k}}}{1 + \frac{\rho'_{i,j,k} \Delta t}{2\mu_{i,j,k}}} \right) H_x|_{i,j,k}^{n-1/2} + \left(\frac{\frac{\Delta t}{\mu_{i,j,k}}}{1 + \frac{\rho'_{i,j,k} \Delta t}{2\mu_{i,j,k}}} \right) \cdot \left(\frac{E_y|_{i,j,k+1/2}^n - E_y|_{i,j,k-1/2}^n}{\Delta z} - \frac{E_z|_{i,j+1/2,k}^n - E_z|_{i,j-1/2,k}^n}{\Delta y} \right) \quad (3.26a)$$

$$H_z|_{i,j,k}^{n+1/2} = \left(\frac{1 - \frac{\rho'_{i,j,k} \Delta t}{2\mu_{i,j,k}}}{1 + \frac{\rho'_{i,j,k} \Delta t}{2\mu_{i,j,k}}} \right) H_z|_{i,j,k}^{n-1/2} + \left(\frac{\frac{\Delta t}{\mu_{i,j,k}}}{1 + \frac{\rho'_{i,j,k} \Delta t}{2\mu_{i,j,k}}} \right) \cdot \left(\frac{E_x|_{i,j+1/2,k}^n - E_x|_{i,j-1/2,k}^n}{\Delta y} - \frac{E_y|_{i+1/2,j,k}^n - E_y|_{i-1/2,j,k}^n}{\Delta x} \right) \quad (3.26c)$$

Схема FDTD для задач электродинамики

$$E_x|_{i,j,k}^{n+1} = \left(\frac{1 - \frac{\sigma_{i,j,k} \Delta t}{2\varepsilon_{i,j,k}}}{1 + \frac{\sigma_{i,j,k} \Delta t}{2\varepsilon_{i,j,k}}} \right) E_x|_{i,j,k}^n + \left(\frac{\frac{\Delta t}{\varepsilon_{i,j,k}}}{1 + \frac{\sigma_{i,j,k} \Delta t}{2\varepsilon_{i,j,k}}} \right) \cdot \left(\frac{H_z|_{i,j+1/2,k}^{n+1/2} - H_z|_{i,j-1/2,k}^{n+1/2}}{\Delta y} - \frac{H_y|_{i,j,k+1/2}^{n+1/2} - H_y|_{i,j,k-1/2}^{n+1/2}}{\Delta z} \right) \quad (3.27a)$$

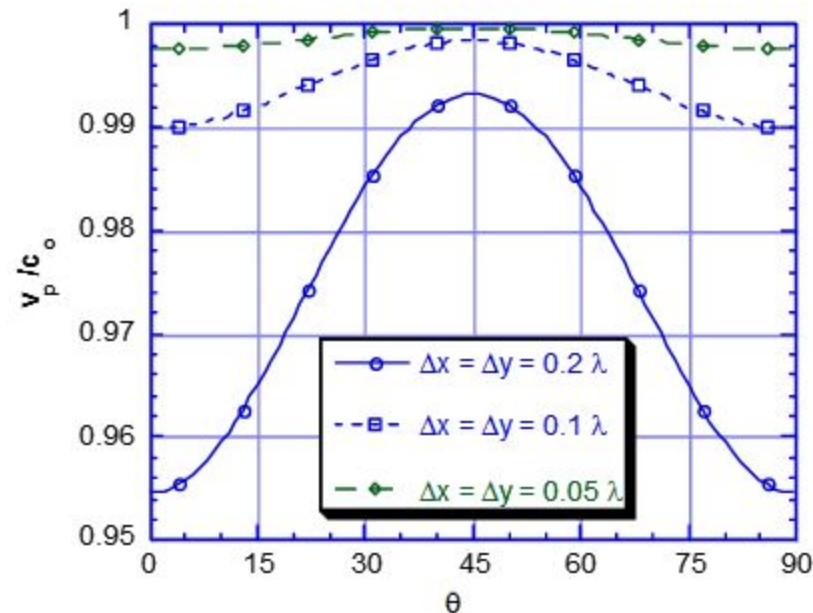
$$E_y|_{i,j,k}^{n+1} = \left(\frac{1 - \frac{\sigma_{i,j,k} \Delta t}{2\varepsilon_{i,j,k}}}{1 + \frac{\sigma_{i,j,k} \Delta t}{2\varepsilon_{i,j,k}}} \right) E_y|_{i,j,k}^n + \left(\frac{\frac{\Delta t}{\varepsilon_{i,j,k}}}{1 + \frac{\sigma_{i,j,k} \Delta t}{2\varepsilon_{i,j,k}}} \right) \cdot \left(\frac{H_x|_{i,j,k+1/2}^{n+1/2} - H_x|_{i,j,k-1/2}^{n+1/2}}{\Delta z} - \frac{H_z|_{i+1/2,j,k}^{n+1/2} - H_z|_{i-1/2,j,k}^{n+1/2}}{\Delta x} \right) \quad (3.27b)$$

$$E_z|_{i,j,k}^{n+1} = \left(\frac{1 - \frac{\sigma_{i,j,k} \Delta t}{2\varepsilon_{i,j,k}}}{1 + \frac{\sigma_{i,j,k} \Delta t}{2\varepsilon_{i,j,k}}} \right) E_z|_{i,j,k}^n + \left(\frac{\frac{\Delta t}{\varepsilon_{i,j,k}}}{1 + \frac{\sigma_{i,j,k} \Delta t}{2\varepsilon_{i,j,k}}} \right) \cdot \left(\frac{H_y|_{i+1/2,j,k}^{n+1/2} - H_y|_{i-1/2,j,k}^{n+1/2}}{\Delta x} - \frac{H_x|_{i,j+1/2,k}^{n+1/2} - H_x|_{i,j-1/2,k}^{n+1/2}}{\Delta y} \right)$$

Дисперсия сетки в многомерных задачах

- Numerical Dispersion:

Numerical Phase Velocity: $\Delta t = 0.9$ C.L.



- $v_p < c_o$
- Anisotropic Behavior

УСТОЙЧИВОСТЬ

$$\Delta t \leq \frac{1}{c \sqrt{\frac{1}{(\Delta x)^2} + \frac{1}{(\Delta y)^2} + \frac{1}{(\Delta z)^2}}}$$

$$\Delta t \leq \frac{1}{c \sqrt{\frac{1}{\Delta^2} + \frac{1}{\Delta^2} + \frac{1}{\Delta^2}}} = \frac{1}{c \sqrt{\frac{3}{\Delta^2}}} = \frac{\Delta}{c\sqrt{3}}$$

Computational Electrodynamics: The Finite-Difference Time-Domain Method, Third Edition

Allen Taflove