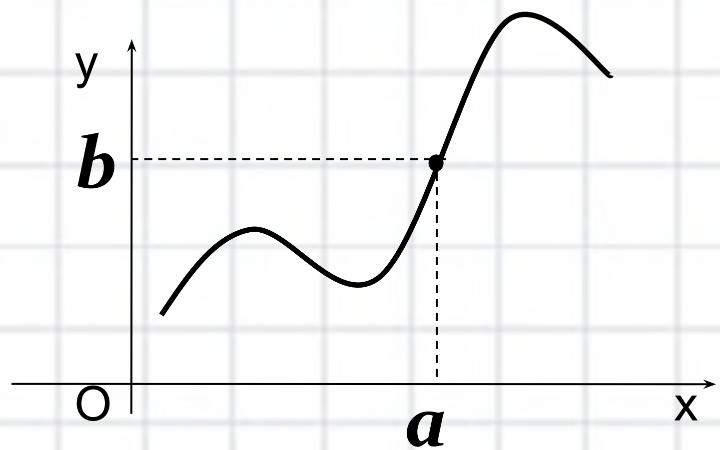
Понятие предела функции

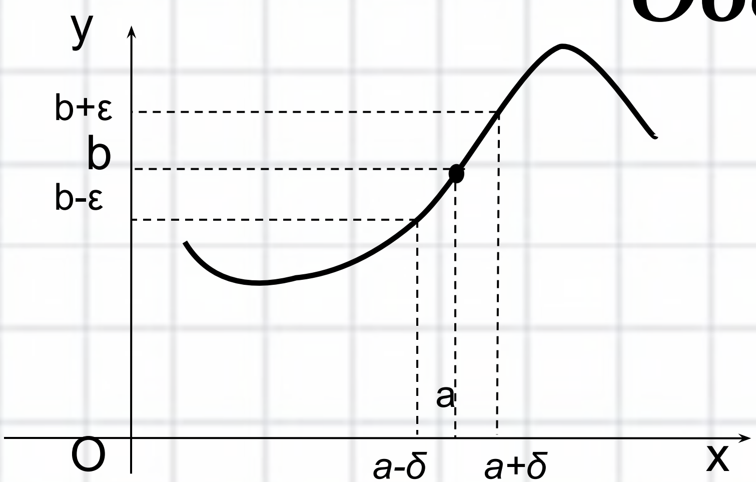
Предел функции в точке

- *Пусть даны две переменные величины X и Y, связанные функциональной зависимостью* $Y = f(X)$ *которая определена в некоторой окрестности точки* ***a****, кроме, быть может, самой точки* ***a****.*



Определение:

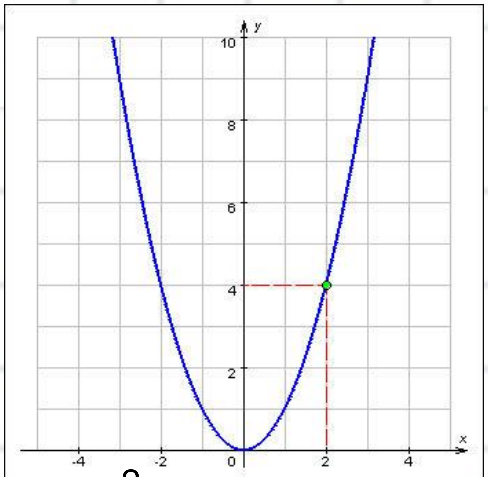
- *Число **b** называется **<u>пределом</u>** функции **f(x)** в точке **a**, если для всех значений **x**, достаточно близких к **a** и отличных от **a**, значение функции **f(x)** сколь угодно мало отличаются от **b**.*
- ***Обозначается предел:***



$$\lim_{x \to a} f(x) = b$$

- ***Все основные элементарные функции**:* *постоянные, степенная функция (x^{α}), показательная функция (a^{x}), тригонометрические функции (sinx, cosx, tgx и ctgx) и обратные тригонометрические функции (arcsinx, arccosx, arctgx и arcctgx) во всех внутренних точках своих областей определения* ***имеют пределы, совпадающие с их значениями в этих точках.***

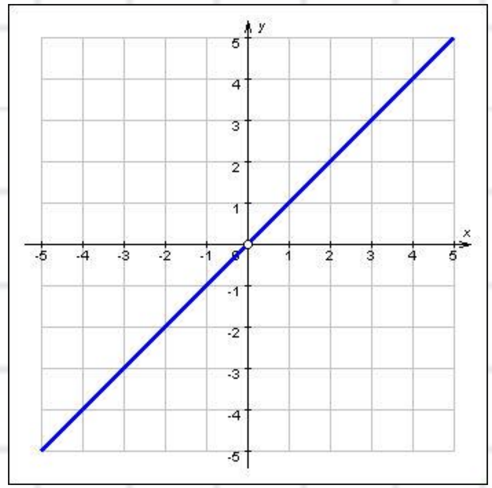
Примеры функций, имеющих предел в точке



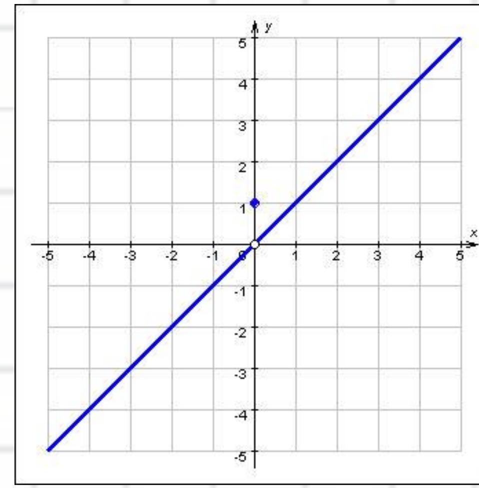
$y = x^2$

$$\lim_{x \to 2} x^2 = 4$$

Предел функции при $x \to 2$ равен 4 (при $x \to 2$ значения функции $\to 4$).



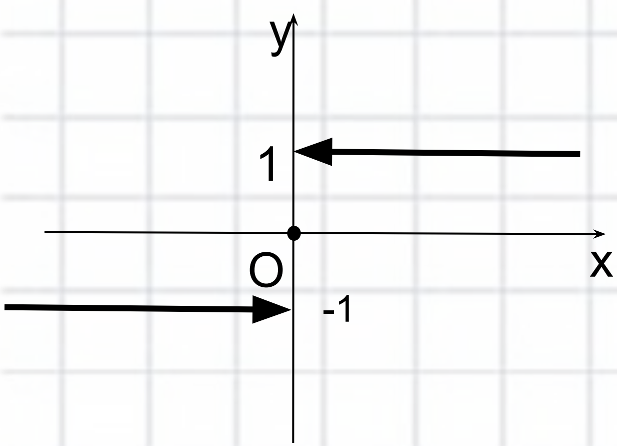
$$y = \frac{x^2}{x}$$

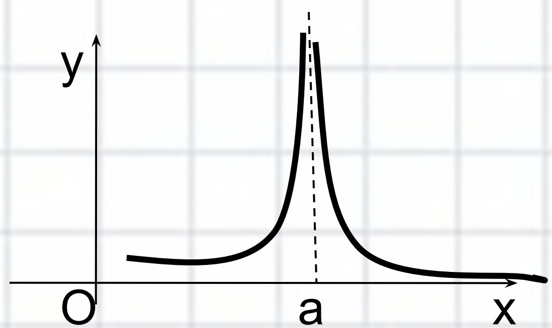


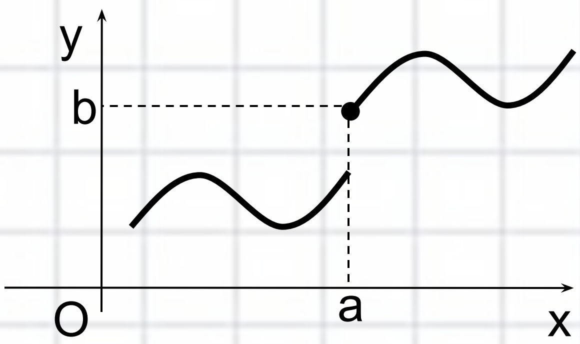
$$y = \begin{cases} x, & \text{если } x \neq 0; \\ 1, & \text{если } x = 0. \end{cases}$$

Предел функций при $x \to 0$ равен 0.

Примеры функций, не имеющих предел в точке







Свойства предела функции

Если функции $f\,(x)$ и $g\,(x)$ имеют конечные пределы в точке a, причем $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A,$ $\lim\limits_{x \to a} g(x) = B,$

То

$$\lim_{x \to a} \left(f(x) + g(x)\right) = A + B$$

$$\lim_{x \to a} \left(f(x) g(x)\right) = AB,$$

$$\lim_{x \to a} \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{A}{B},$$

если $B \neq 0$ и если $g\,(x) \neq 0$ в окрестности точки $\boldsymbol{a}$.

Примеры вычисления предела функции в точке:

Сначала просто пытаемся подставить число, к которому стремится ***x*** в функцию

1. **Пример:**

$$\lim_{x\to 3}(x^2-5x+8)=9-15+8=2$$

2. **Пример:**

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-5x+8}{x^2-x+4}.$$

Предел числителя $\lim_{x\to 3}(x^2-5x+8)=9-15+8=2$

Предел знаменателя $\lim_{x\to 3}(x^2-x+4)=9-3+4=10$

Используя теорему о пределе частного, получим

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-5x+8}{x^2-x+4}=\frac{\lim\limits_{x\to 3}(x^2-5x+8)}{\lim\limits_{x\to 3}(x^2-x+4)}=\frac{2}{10}=\frac{1}{5}.$$

3. **Пример:**

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-5x+8}{x-3}.$$

Предел числителя $\lim_{x\to 3}(x^2-5x+8)=9-15+8=2$

Предел знаменателя равен нулю, поэтому теорему о пределе частного применять нельзя.

Величина $\dfrac{2}{x-3}$ является бесконечно большой величиной при $x\to 3$.

Тогда

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-5x+8}{x-3}=\infty.$$

Раскрытие неопределенности

- При нахождении предела иногда сталкиваются с выражениями вида,

$$\left(\frac{0}{0}\right), \left(\frac{\infty}{\infty}\right), (\infty - \infty), (1^{\infty}), (0 \cdot \infty), (0^{0})(\infty^{0}).$$

которые называются ***неопределенностями***

- Отыскание предела в таких случаях называется ***раскрытием неопределенности***.

4. **<u>Пример</u>:** Вычислить предел $\lim\limits_{x\to -1}\frac{2x^2-3x-5}{x+1}$

Сначала попробуем подставить **−1** в дробь: $\frac{2(-1)^2-3\cdot(-1)-5}{-1+1}=\frac{0}{0}$

В данном случае получена так называемая неопределенность $\left(\frac{0}{0}\right)$

$$\lim_{x\to -1}\frac{2x^2-3x-5}{x+1}=\frac{0}{0}=(*)$$

Общее правило: если в числителе и знаменателе находятся многочлены, и имеется неопределенность вида 0/0, то для ее раскрытия ***<u>нужно разложить числитель и знаменатель на множители</u>***.

$$(*)=\lim_{x\to -1}\frac{(x+1)\cdot(2x-5)}{x+1}=(*)$$

Очевидно, что числитель и знаменатель можно сократить на (x+1), получим: $(*)=\lim\limits_{x\to -1}(2x-5)=(*)$

Теперь и подставляем **-1** в выражение, которое осталось под знаком предела:

$$=2\cdot(-1)-5=-2-5=-7$$

Метод умножения числителя и знаменателя на сопряженное выражение

5. <u>Пример:</u> Найти предел $\lim\limits_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+6}-\sqrt{10x-21}}{5x-15}$

Сначала пробуем подставить ***3*** в выражение под знаком предела **это первое, что нужно выполнять для ЛЮБОГО предела.**

$$\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+6}-\sqrt{10x-21}}{5x-15}=\frac{0}{0}=(*)$$

Получена неопределенность вида $\left(\frac{0}{0}\right)$, которую нужно устранять

Когда в числителе (знаменателе) находится разность корней (или корень минус какое-нибудь число), то для раскрытия неопределенности используют ***метод умножения числителя и знаменателя на сопряженное выражение.***

$$(*)=\lim_{x\to 3}\frac{(\sqrt{x+6}-\sqrt{10x-21})\cdot(\sqrt{x+6}+\sqrt{10x-21})}{(5x-15)\cdot(\sqrt{x+6}+\sqrt{10x-21})}=(*)$$

$$(*) = \lim_{x\to 3}\frac{(\sqrt{x+6})^2-(\sqrt{10x-21})^2}{(5x-15)\cdot(\sqrt{x+6}+\sqrt{10x-21})} =$$

$$= \lim_{x\to 3}\frac{x+6-(10x-21)}{(5x-15)\cdot(\sqrt{x+6}+\sqrt{10x-21})} =$$

$$= \lim_{x\to 3}\frac{x+6-10x+21}{(5x-15)\cdot(\sqrt{x+6}+\sqrt{10x-21})} =$$

$$= \lim_{x\to 3}\frac{-9x+27}{(5x-15)\cdot(\sqrt{x+6}+\sqrt{10x-21})} = (*)$$

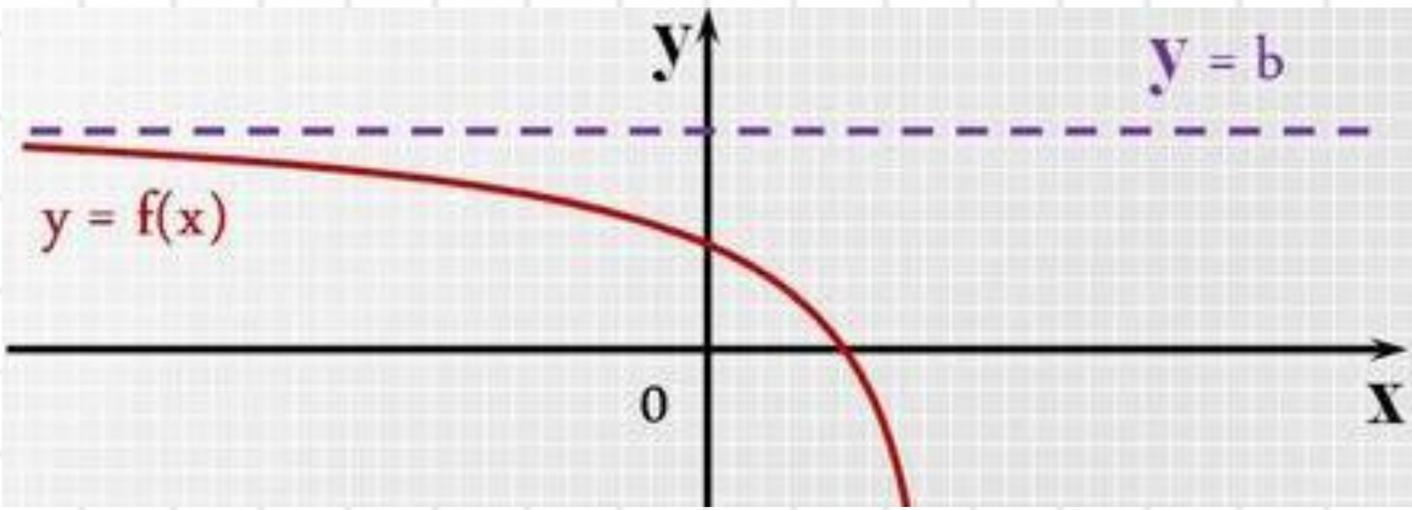
$$(*) = \frac{1}{6}\lim_{x\to 3}\frac{-9(x-3)}{5(x-3)} = \frac{1}{6}\lim_{x\to 3}\frac{-9}{5} = \frac{1}{6}\cdot\left(\frac{-9}{5}\right) = -\frac{3}{10}$$

Предел функции на бесконечности

- *Определение: Число b называется пределом функции $y=f(x)$ на бесконечности (или при $x \to \infty$), если для всех достаточно больших по модулю значений x, соответствующее значение функции сколь угодно мало отличается от b.*

Обозначение

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = b$$



СВОЙСТВА ПРЕДЕЛОВ

- $0 + C = C$
- $\infty + C = \infty$
- $0 \cdot C = 0$
- $\infty \cdot C = \infty$
- $\frac{0}{C} = 0$
- $\frac{\infty}{C} = \infty$
- $\frac{C}{\ } = \infty$

1. ***Пример*** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-3x-5}{1+x+3x^2}=\dfrac{\infty}{\infty}=(*)$

- Для того, чтобы раскрыть неопределенность ∞/∞ необходимо разделить числитель и знаменатель на x в старшей степени.
- Разделим числитель и знаменатель на x^2

$$(*)=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{2x^2-3x-5}{x^2}}{\dfrac{1+x+3x^2}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{2x^2}{x^2}-\dfrac{3x}{x^2}-\dfrac{5}{x^2}}{\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{x}{x^2}+\dfrac{3x^2}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2-\dfrac{3}{x}^{\to 0}-\dfrac{5}{x^2}^{\to 0}}{\dfrac{1}{x^2}^{\to 0}+\dfrac{1}{x}^{\to 0}+3}=\frac{2}{3}$$

- Пример 2.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{7x^3+15x^2+9x+1}{5x^4+6x^2-3x-4}=\frac{\infty}{\infty}=(*)$$

Разделим числитель и знаменатель на x^4

$$(*)=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{7x^3+15x^2+9x+1}{x^4}}{\dfrac{5x^4+6x^2-3x-4}{x^4}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{7}{x}^{\to 0}+\dfrac{15}{x^2}^{\to 0}+\dfrac{9}{x^3}^{\to 0}+\dfrac{1}{x^4}^{\to 0}}{5+\dfrac{6}{x^2}^{\to 0}-\dfrac{3}{x^3}^{\to 0}-\dfrac{4}{x^4}^{\to 0}}=$$

$$=\frac{0+0+0+0}{5+0-0-0}=\frac{0}{5}=0$$

• Пример 3.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-3x-5}{x+1}=\frac{\infty}{\infty}=(*)$$

Разделим числитель и знаменатель на x^2

$$(*)=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2x^2-3x-5}{x^2}}{\frac{x+1}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2-\frac{3}{x}^{\to 0}-\frac{5}{x^2}^{\to 0}}{\frac{1}{x}^{\to 0}+\frac{1}{x^2}^{\to 0}}=\frac{2}{0}=\infty$$

подразумевается не деление на ноль (делить на ноль нельзя), а деление на бесконечно малое число.

Таким образом, при раскрытии неопределенности может получиться *конечное число*, ноль или бесконечность.

Замечательные пределы

- первый замечательный предел

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1;$$

- второй замечательный предел

$$\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x = \lim_{x \to 0} (1 + x)^{1/x} = e.$$

Примеры

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(2x)}{x}=(\frac{0}{0})=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin(2x)}{2x}=2\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin(2x)}{2x}=$$

$$=2\cdot 1=2.$$

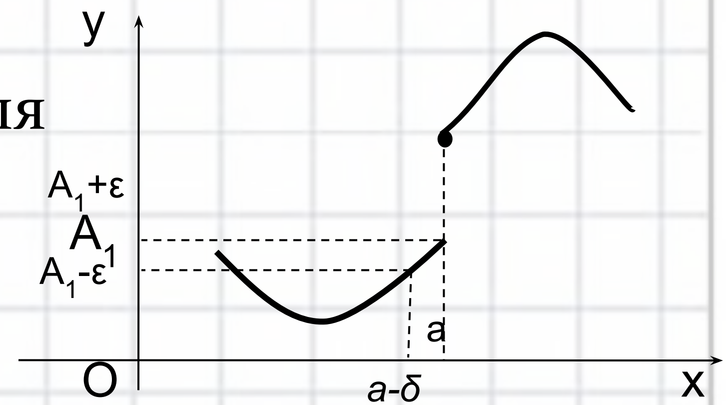
$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{3x}\right)^{4x}=1^{\infty}=\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{3x}\right)^{3x}\right)^{\frac{1}{3x}\cdot 4x}=e^{\frac{4}{3}}$$

Односторонние пределы

Предел функции слева

- Число A_1 называется ***пределом функции f (x) слева*** в точке *a*, если для каждого ε > 0 существует δ > 0 такое, что для всех $x \in (a-\delta;\ a)$ выполняется неравенство

$$\left|f(x) - A_1\right| < \varepsilon.$$



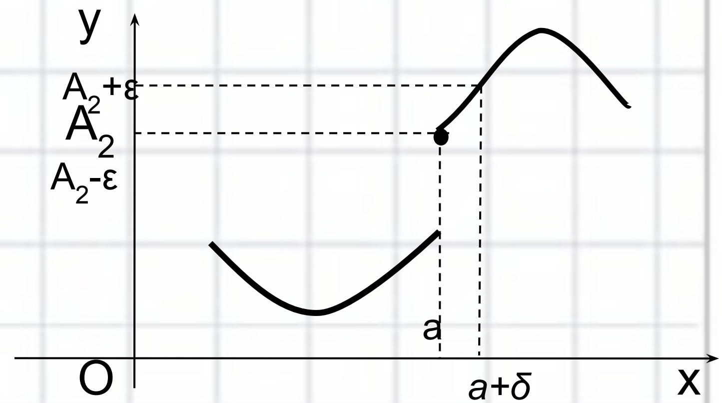
$$\lim_{x \to a-0} f(x) = A_1$$

- При x приближающихся к a слева,

  значения функции стремятся к A_1

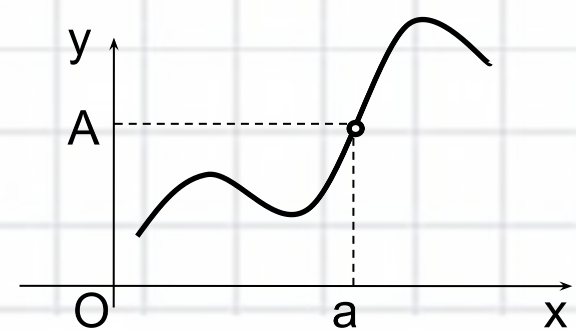
Предел функции справа

- Число A_2 называется ***пределом функции f (x) справа*** в точке a, если для каждого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для всех $x \in (a;\ a+\delta)$ выполняется неравенство $|f(x) - A_2| < \varepsilon$.

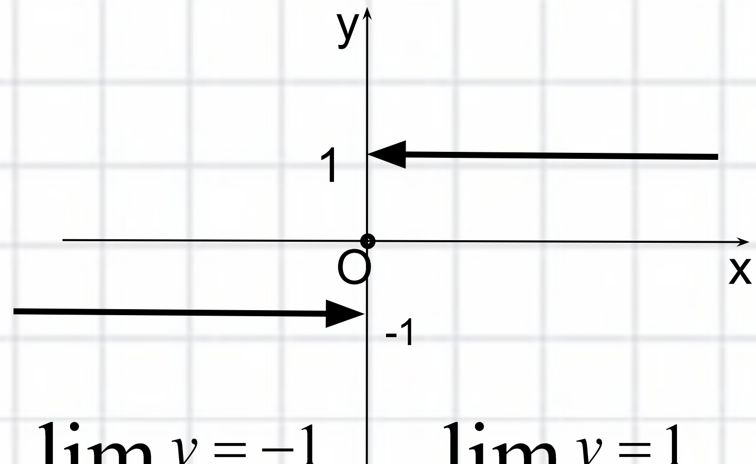


$$\lim_{x \to a+0} f(x) = A_2$$

- При x приближающихся к а справа, значения функции стремятся к A_2
- Функция, определённая в некоторой окрестности точки, имеет предел в точке, если её предел справа равен пределу слева.

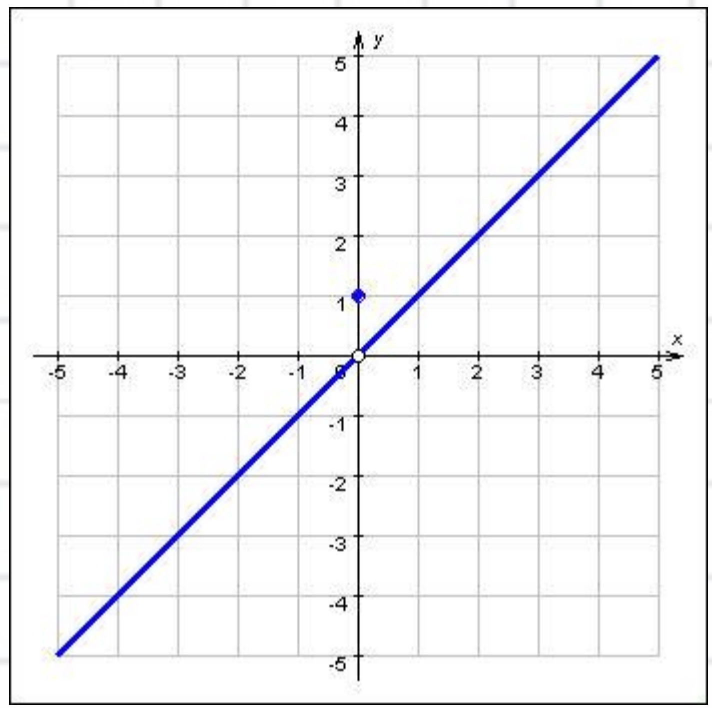


$$y = \operatorname{sign} x = \begin{cases} -1, & \text{если } x < 0; \\ 0, & \text{если } x = 0; \\ 1, & \text{если } x > 0. \end{cases}$$



$$\lim_{x \to 0-0} y = -1 \qquad \lim_{x \to 0+0} y = 1$$

$$y = \begin{cases} x, & \text{если } x \neq 0; \\ 1, & \text{если } x = 0. \end{cases}$$



$$\lim_{x \to -0} y = 0$$

$$\lim_{x \to +0} y = 0$$