

НОУ ВО Московский технологический институт

Дисциплина: ЭВМ и периферийные устройства

Математическая логика

(Булева алгебра)

КТН, доцент

Манкевич Александр Валерьевич

«Методы эти позволяют Вам обрести ясность мысли, способность находить собственное оригинальное решение трудных задач, вырабатывают у Вас привычку к систематическому мышлению и, что особенно ценно, умение обнаруживать логические ошибки, изъяны и пробелы тех, кто не пытался овладеть привлекательным искусством логики. Попробуйте. Вот все, о чем я прошу вас» .

***Льюис Кэрролл
(псевдоним Чарльза Лютвиджа Доджсона
(1832–1898))***

известный английский математик и литератор

Основы логики, как науки о законах и формах мышления, были заложены ещё в работах Аристотеля в 384 г. до н.э.

Достижения Аристотеля в области логики не претерпели существенных изменений вплоть до XVII века. Впервые идеи обоснования логики на основе вычислений, подобно тому как мы оперируем символами в алгебре, были высказаны ещё в XVII веке Готфридом Лейбницем. Идеи Лейбница реализовал в своих работах английский математик Джордж Буль (1815 – 1864). В 1847 г. он опубликовал работу "Математический анализ логики", в которой высказал идею, что логика более близка к математике, чем к философии.

Алгебра высказываний

Алгебра высказываний является составной частью одного из современных быстро развивающихся разделов математики – математической логики.

Математическая логика применяется в информатике, позволяет моделировать простейшие мыслительные процессы. Одним из занимательных приложений алгебры высказываний – решение логических задач.

Алгебра – это наука, которая изучает множество некоторых элементов и действия (операции) над ними.

Алгебра натуральных чисел: элементы алгебры – натуральные числа, а операции – сложение и умножение

Векторная алгебра изучает действия с направленными отрезками (векторами).

Объекты алгебры высказываний

Объекты алгебры высказываний - высказывания.

Высказывание – это истинное или ложное повествовательное предложение.

Простое высказывание - повествовательное предложение, в котором говорится об одном-единственном событии.

Например, предложение «Луна – спутник Земли» есть простое высказывание, предложение «Не сорить!» не является высказыванием.

Высказывания обозначаются большими буквами латинского алфавита. Если высказывание A истинно, то пишут $A = 1$, если ложно, то используют запись $A = 0$.

В алгебре высказываний над ее объектами (высказываниями) определены действия, выполняя которые получают новые высказывания.

Операции над высказываниями. Таблицы истинности

Операция логического умножения - объединение двух высказываний в одно при помощи союза «**И**».

Связка «**И**» называется **конъюнкцией высказываний A и B** и принимает значений истина, только когда оба высказывания истинны, в других случаях конъюнкция принимает значение ложь.

Обозначают конъюнкцию суждений A и B как **A&B**, **A and B** (в программировании), **$A \wedge B$** (в учебниках по логике).

Например:

высказывание A – «В лесу растут грибы»,

высказывание B – «Льюис Кэрролл – математик»,

составим произведение этих высказываний

AB – «В лесу растут грибы и Льюис Кэрролл – математик».

Истинность произведения высказываний зависит от истинности перемножаемых высказываний и может быть определена с помощью следующей таблицы:

Операции над высказываниями. Таблицы истинности

Истинность произведения высказываний зависит от истинности перемножаемых высказываний и может быть определена с помощью следующей таблицы:

A	B	A ∧ B
1	1	
1	0	
0	1	
0	0	

Операции над высказываниями. Таблицы истинности

Операция логического сложения - объединение двух высказываний в одно с помощью союза «**ИЛИ**», употребляемого в неисключающем смысле.

Логически связка «**ИЛИ**» называется **дизъюнкцией**. Дизъюнкция двух высказываний A и B принимает значение «истина», если хотя бы одно из высказываний истинно, и значение «ложь», если оба высказывания ложны.

Для дизъюнкции используют обозначение $A+B$, в программировании используют обозначение $A \text{ or } B$, в учебниках по логике $A \vee B$.

Например: высказывание

A – «Декабрь – зимний месяц»,

B – «Летом иногда идет дождь»,

определим высказывание $A+B$ – «Декабрь – зимний месяц или летом иногда идет дождь».

Операции над высказываниями. Таблицы истинности

Установить истинность логической суммы можно с помощью следующей таблицы:

A	B	$A \vee B$
1	1	
1	0	
0	1	
0	0	

Операции над высказываниями. Таблицы истинности

В логике используется так называемая **сильная дизъюнкция (исключающее или)**, которая на русском языке выражается с помощью связки **«или А, или В»**. Она носит **исключающий характер**, т.к. принимает значение истина, когда операнды имеют разное логическое значение. Обозначается в программировании как **$A \text{ xor } B$** ; таблица истинности имеет вид:

A	B	$A \text{ xor } B$
1	1	
1	0	
0	1	
0	0	

Логическая связка. Таблицы истинности

Логическая связка «если..., то» называется **импликацией**.

Импликация высказываний «если А, то В» принимает значение ложь только в одном случае, когда А истинно, а В ложно. Импликация обозначается как $A \rightarrow B$. Суждение А называется посылкой, В следствием.

Иногда употребляются термины **антецедент** для посылки А и **консеквент** – для заключения В.

Логическая связка. Таблицы истинности

Таблица истинности для импликации имеет вид:

A	B	$A \rightarrow B$
1	1	
1	0	
0	1	
0	0	

Логическая связка. Таблицы истинности

Эквиваленция – это логическая связка, которая выражается словами «**A тогда и только тогда, когда B**», «**для A необходимо и достаточно B**».

Эквиваленция обозначается как **$A \leftrightarrow B$** и выражается через импликацию и конъюнкцию:

$$A \leftrightarrow B = (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$$

Эквиваленция принимает значение истина в случае, когда оба высказывания имеют одинаковые значения.

Логическая связка. Таблицы истинности

Таблица истинности для эквиваленции имеет вид:

A	B	$A \leftrightarrow B$
1	1	
1	0	
0	1	
0	0	

Операции над высказываниями. Таблицы истинности

Операция логического отрицания осуществляется над одним высказыванием.

Выполнить операцию логического отрицания (обозначается \bar{A}) – значит получить из данного высказывания новое, присоединяя слова «неверно, что ...» ко всему высказыванию.

Истинность высказывания \bar{A} определяется таблицей:

A	\bar{A}
1	0
0	1

Операции над высказываниями. Таблицы истинности

Из нескольких простых высказываний с помощью логических операций можно составить более сложные высказывания. Для указания порядка выполнения логических действий можно использовать круглые скобки.

Для однозначного прочтения логических выражений принят следующий **приоритет выполнения операций** (перечислены в порядке убывания приоритета):

- отрицание (самая «сильная» операция),
- конъюнкция,
- дизъюнкция,
- сильная дизъюнкция,
- импликация,
- эквиваленция.

Например,

$$A \wedge B \vee C = (A \wedge B) \vee C; \quad \bar{A} \vee B \rightarrow C = ((\bar{A}) \vee B) \rightarrow C$$

Операции над высказываниями. Таблицы истинности

Например, всевозможные значения $\overline{A\bar{B}}$ для высказывания можно записать в виде таблицы:

A	B	\bar{B}	$A\bar{B}$	$\overline{A\bar{B}}$
1	1	0	0	1
1	0	1	1	0
0	1	0	0	1
0	0	1	0	1

Тожественные высказывания

Среди высказываний особое место занимают те, в таблице истинности которых либо одни единицы, либо только нули. Это означает, что высказывание либо всегда истинно, либо ложно, независимо от истинности входящих в него высказываний.

Например: высказывание всегда истинно $A + \bar{A}$, а высказывание всегда ложно $A\bar{A}$. Доказать это можно составив таблицу истинности этих высказываний.

Тожественно истинными называются сложные высказывания, истинные при любых значениях входящих в них других высказываний.

Тожественно ложными называются высказывания, ложные при любых значениях входящих в них других высказываний.

Тожественно истинные или тождественно ложные высказывания, если они встречаются в формулах, заменяются в них, соответственно единицей или нулем:

$$B + A\bar{A} = B + 0$$

$$A + (B + \bar{B}) = A + 1$$

Эквивалентные высказывания

Эквивалентными высказываниями называются такие высказывания, таблицы истинности которых совпадают.

Эквивалентными являются, например, высказывания $\overline{A\overline{B}}$ и $\overline{A} + B$ (то есть $\overline{A\overline{B}} = \overline{A} + B$). Это можно проверить составив таблицы истинности этих высказываний:

A	B	\overline{A}	\overline{B}	$A\overline{B}$	$\overline{A\overline{B}}$	$\overline{A} + B$
1	1	0	0	0	1	1
1	0	0	1	1	0	0
0	1	1	0	0	1	1
0	0	1	1	0	1	1

Свойства операций алгебры высказываний. Формулы Августа де Моргана

Операции алгебры высказываний обладают следующими важными свойствами:

Логическое умножение:	Логическое сложение:
$A \cdot B = B \cdot A$	$A + B = B + A$
$(AB)C = A(BC)$	$(A + B) + C = A + (B + C)$
$A \cdot A = A$	$A + A = A$
$A \cdot 1 = A$	$A + 1 = 1$
$A \cdot 0 = 0$	$A + 0 = A$
$A(B + C) = AB + AC$	$A + BC = (A + B)(A + C)$ $A + BC = (A + B)(A + C)$
$\overline{AB} = \overline{A} + \overline{B}$	$\overline{A + B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$

Отрицание: $\overline{\overline{A}} = A$; $\overline{1} = 0$; $\overline{0} = 1$

Формулы называются формулами Августа де Моргана (1806–1871). Используя эти формулы, можно, в частности, преобразовывать высказывания: сложные заменять более простыми.

Формулы Августа де Моргана (продолжение)

В алгебре высказываний, как и в другой алгебре, возможны тождественные преобразования, но логическое сложение и умножение обладают специфическими свойствами

$$A + A = A, AA = A, A + 1 = A.$$

Это приводит к необычности действий над многочленами алгебры высказываний. Пусть нужно перемножить два сложных высказывания:

$$(A + B)(A + C) = AA + AC + AB + BC = A + AB + AC + BC.$$

Рассмотрим теперь два первых слагаемых

$$A + AB = A(1 + B) = A1 = A \text{ и аналогично } A + AC = A.$$

Таким образом, окончательно получаем $(A + B)(A + C) = A + BC$.

Преобразование $A + AB = A$ очень часто встречается в алгебре высказываний и называется «поглощение».

Формулы Августа де Моргана (продолжение)

Есть еще один вид столь же часто встречающегося тождественного преобразования, которое называется «склеивание».

Суть его состоит в следующем: $AB + A\bar{B} = A$

(склеивание произошло по символу B). Соответственно для сложного высказывания $ABC + A\bar{B}C$ склейку можно произвести по символу C , то есть имеет место тождественное преобразование $ABC + A\bar{B}C = AB$.

Решение логических задач

Рассмотренных выше законы алгебры высказываний могут быть применены к решению логических задач

Например:

Задача:

Алеша, Боря и Гриша откопали древний сосуд. О том, где и когда он был изготовлен, каждый из школьников высказал по два предположения:

Алеша: «Это сосуд греческий и сосуд изготовлен в V веке»;

Боря: «Это сосуд финикийский и сосуд изготовлен в III веке»;

Гриша: «Это не греческий сосуд и изготовлен он в IV веке».

Учитель истории сказал ребятам, что каждый из них прав только в одном из двух своих предположений. Где и в каком веке изготовлен сосуд?

Решение логических задач (продолжение)

Решение:

Введем обозначения простых высказываний:

«Это сосуд греческий» – G ;

«Это сосуд финикийский» – F ;

«Сосуд изготовлен в V веке» – 5 ;

«Сосуд изготовлен в III веке» – 3 ;

«Сосуд изготовлен в IV веке» – 4 .

Решение логических задач (продолжение)

Можно составить формулы высказываний каждого из школьников с учетом высказывания учителя.

Формула Алешино высказывания имеет вид $G5$. Учитель сказал, что Алеша прав только в одном из своих утверждений, поэтому либо $G = 1$, либо $5 = 1$. Истинным будет высказывание $G\bar{5} + \bar{G}5 = 1$, то есть высказывание «Сосуд греческий и изготовлен не в 5 веке или сосуд не греческий и изготовлен в 5 веке».

Аналогично, высказывание Бори можно представить формулой $F\bar{3} + \bar{F}3 = 1$ и высказывание Гриши формулой $\bar{G}\bar{4} + G4 = 1$.

Полученные формулы можно рассматривать как логические уравнения и решать систему:

$$\begin{cases} G\bar{5} + \bar{G}5 = 1 \\ F\bar{3} + \bar{F}3 = 1 \\ \bar{G}\bar{4} + G4 = 1 \end{cases}$$

Решение логических задач (продолжение)

Первое высказывание умножается на второе:

$$(G\bar{5} + \bar{G}5)(F\bar{3} + \bar{F}3) = GF\bar{5}\bar{3} + G\bar{F}\bar{5}3 + \bar{G}5F\bar{3} + \bar{G}5\bar{F}3 = 1$$

Произведение $GF\bar{5}\bar{3}$ - ложно потому, что сосуд не может быть изготовлен одновременно в Греции и Финикии, произведение $\bar{G}5\bar{F}3$ – ложно потому, что сосуд не может быть изготовлен одновременно в 3 и 5 вв. После исключения этих высказываний получается следующее уравнение: $G\bar{F}\bar{5}3 + \bar{G}5F\bar{3} = 1$

Это уравнение умножается на третье логическое уравнение составленной системы:

$$(G\bar{F}\bar{5}3 + \bar{G}5F\bar{3})(\bar{G}\bar{4} + G4) = G\bar{F}\bar{5}3\bar{G}\bar{4} + G\bar{F}\bar{5}3G4 + \bar{G}5F\bar{3}\bar{G}\bar{4} + \bar{G}5F\bar{3}G4 = \bar{G}5F\bar{3}\bar{G}\bar{4} = 1$$

Решение логических задач (продолжение)

Высказывания $G\bar{F}\bar{5}3\bar{G}\bar{4}$, $G\bar{F}\bar{5}3G4$, $\bar{G}5F\bar{3}G4$ исключены как ложные. Из полученного высказывания $\bar{G}5F\bar{3}\bar{G}\bar{4}=1$ следует, что «Сосуд изготовлен в Финикии и сосуд изготовлен в 5 веке». Это утверждение согласуется с данными поставленной задачи.

Решение логических задач

Пример 1. На вопрос: «Кто из трех студентов готовился к экзамену?» получен верный ответ — «Если готовился Иванов, то готовился и Сидоров, но неверно, что если готовился Петров, то готовился и Сидоров». Кто готовился к экзамену?

Решение логических задач

Решение. Обозначим простые высказывания «готовился к экзамену Иванов» (Петров, Сидоров) соответственно буквами A (B , C). Тогда условие задачи можно записать в виде формулы:

$$(A \rightarrow C) \& \overline{(B \rightarrow C)},$$

т.к. составные высказывания $(A \rightarrow C)$ и $\overline{(B \rightarrow C)}$ («Если готовился Иванов, то готовился и Сидоров» и «Неверно, что если готовился Петров, то готовился и Сидоров») выполняются одновременно и поэтому они должны быть соединены логической связкой $\&$ («и»). Выполняя равносильные преобразования, получим

$$(A \rightarrow C) \overline{(B \rightarrow C)} = (\overline{A} \vee C) \overline{(\overline{B} \vee C)} = (\overline{A} \vee C) (\overline{\overline{B}} \& \overline{C}) = \overline{A} B \overline{C} \vee B C \overline{C} = \overline{A} B \overline{C}.$$

Теперь читаем формулу: «Не готовился Иванов и не готовился Сидоров и готовился Петров к экзамену».

Ответ: К экзамену готовился Петров.

Решение логических задач

Пример 2. «Вернувшись домой, Мегрэ позвонил на набережную Орфевр.

- Говорит Мегрэ. Есть новости?
 - Да, шеф. Поступили сообщения от инспекторов. Торранс установил, что если Франсуа был пьян, то либо Этьен убийца, либо Франсуа лжет. Жусье считает, что или Этьен убийца или Франсуа не был пьян и убийство произошло после полуночи. Инспектор Люка просил передать Вам, что если убийство произошло после полуночи, то либо Этьен убийца, либо Франсуа лжет. Затем позвонила
 - Все. Спасибо. Этого достаточно. – Комиссар положил трубку. Он знал, что трезвый Франсуа никогда не лжет. Теперь он знал все».
- Какой вывод сделал Мегрэ?

Решение логических задач

Решение. Введем следующие элементарные высказывания:

$A \equiv \{\text{Франсуа был пьян}\},$

$B \equiv \{\text{Этьен убийца}\},$

$C \equiv \{\text{Франсуа лжет}\},$

$D \equiv \{\text{Убийство произошло после полуночи}\}.$

Инспектора комиссара Мергэ установили, что:

$A \rightarrow (B \vee C) \equiv 1,$

Решение логических задач

$$B \vee (\bar{A} \wedge D) \equiv 1,$$

$$D \rightarrow (B \vee C) \equiv 1.$$

Рассмотрим конъюнкцию этих трех сложных высказываний и упростим ее:

$$(A \rightarrow (B \vee C)) \wedge (B \vee (\bar{A} \wedge D)) \wedge (D \rightarrow (B \vee C)) \equiv 1.$$

Используя формулу $u \rightarrow v = \bar{u} \vee v$, освободимся от импликации:

$$(\bar{A} \vee B \vee C) \wedge (B \vee (\bar{A} \wedge D)) \wedge (\bar{D} \vee B \vee C) \equiv 1.$$

Применим второй дистрибутивный закон к первому и третьему множителям

$$(B \vee C \vee \bar{A} \bar{D})(B \vee \bar{A} D) \equiv 1.$$

Раскрывая скобки по первому дистрибутивному закону дважды и применяя закон поглощения $u \vee uv = u$, получим

$$B \vee \bar{A}DC \vee \bar{A}D\bar{D} \equiv 1.$$

Решение логических задач

Так как $\overline{A}D\overline{D} = 0$, то окончательно имеем:

$$B \vee \overline{A}DC \equiv 1.$$

Таким образом, из показаний инспекторов следовало лишь, что или Этьен убийца, или одновременно имели место три обстоятельства: Франсуа не был пьян, убийство произошло после полуночи, Франсуа лгал. Но комиссару Мергэ было известно, что трезвый Франсуа не лжет, т.е. что

$$\overline{A} \wedge \overline{C} = 1$$

или

$$\overline{A} \wedge C = 0,$$

и, следовательно, результат, вытекающий из показаний инспекторов,

$$B \vee (\overline{A} \wedge D \wedge C) = 1,$$

при этом условии дает

$$B \vee 0 = 1, \text{ т.е. } B = 1.$$

Ответ: Убийство совершил Этьен.

Выводы

На примере решения логической задачи продемонстрирована смысловая взаимосвязь входящих в сложное высказывание простых высказываний. В состав сложных высказываний могут входить взаимосвязанные по смыслу высказывания, однако высказывания могут быть и противоречивыми.

Таким образом, одним из применений алгебры высказываний является использование ее для анализа сложных, а подчас противоречивых текстов. Алгебра высказываний позволяет научиться моделировать простейшие мыслительные процессы.

Развитие математической логики

В XX веке в математической логике произошли важные изменения: впервые со времен своего возникновения логика стала многозначной. В многозначной логике высказывания могут иметь более двух истинностных значений. В 1920 г. Ян Лукасевич разработал трёхзначную логику. В ней высказывания могут принимать три значения: «истина», «ложь» и «может быть» или «неопределено». В такой логике не действует закон исключенного третьего. В 1921 г. Э. Пост выдвинул идею многозначной логики. В k – значной логике высказывания могут принимать значения от 0 до $k-1$, где $k=3,4, 5\dots$ и т.д.

Задача для самостоятельного решения

1. В школе, перешедшей на самообслуживание, четверем старшеклассникам: Андрееву, Костину, Савельеву и Давыдову поручили убрать 7-ой, 8-ой, 9-ый и 10-ый классы. При проверке оказалось, что 10-й класс убран плохо. Не ушедшие домой ученики сообщили о следующем:

1) Андреев: «Я убирал 9-ый класс, а Савельев — 7-ой».

2) Костин: «Я убирал 9-ый класс, а Андреев — 8-ой».

3) Савельев: «Я убирал 8-ой класс, а Костин — 10-ый».

Давыдов уже ушел домой. В дальнейшем выяснилось, что каждый ученик в одном из двух высказываний говорил правду, а во втором ложь. Какой класс убирал каждый ученик?

Задача для самостоятельного решения

2. Пять школьников из пяти различных городов Брянской области прибыли для участия в областной олимпиаде по математике. На вопрос: «Откуда Вы?» каждый дал ответ:

- 1) Иванов: «Я приехал из Клинцов, а Дмитриев — из Новозыбкова».
- 2) Сидоров: «Я приехал из Клинцов, а Петров — из Трубчевска».
- 3) Петров: «Я приехал из Клинцов, а Дмитриев — из Дятькова».
- 4) Дмитриев: «Я приехал из Новозыбкова, а Ефимов — из Жуковки».
- 5) Ефимов: «Я приехал из Жуковки, а Иванов живет в Дятькове».

Откуда приехал каждый из школьников, если одно из утверждений верно, а другое ложно?

Задача для самостоятельного решения

3. Семья, состоящая из отца A , матери B и трех дочерей C , D , E , купила телевизор. Условились, что в первый вечер будут смотреть передачи в таком порядке:
- 1) Когда отец A смотрит передачу, то мать B делает то же.
 - 2) Дочери D и E , обе или одна из них, смотрят передачу.
 - 3) Из двух членов семьи — мать B и дочь C — смотрят передачу одна и только одна.
 - 4) Дочери C и D или обе смотрят, или обе не смотрят.
 - 5) Если дочь E смотрит передачу, то отец A и дочь D делают то же.

Кто из членов семьи в этот вечер смотрел передачу?

4. На вопрос «Кто из трех студентов изучал математическую логику?» получен верный ответ — «Если изучал первый, то изучал и третий, но неверно, что если изучал второй, то изучал и третий». Кто изучал математическую логику?

Задача для самостоятельного решения

5. Определить, кто из четырех студентов сдал экзамен, если известно:
- 1) Если первый сдал, то и второй сдал.
 - 2) Если второй сдал, то третий сдал или первый не сдал.
 - 3) Если четвертый не сдал, то первый сдал, а третий не сдал.
 - 4) Если четвертый сдал, то и первый сдал.
6. Известно следующее: если Петя не видел Колю на улице, то Коля либо ходил в кино, либо Петя сказал правду; если Коля не ходил в кино, то Петя не видел Колю на улице, и Коля сказал правду. Если Коля сказал правду, то либо он ходил в кино, либо Петя солгал. Выясните, ходил ли Коля в кино.

Основы построения ЭВМ

Теоретической основой построения ЭВМ являются специальные математические дисциплины. Одной из них является алгебра логика или булева алгебра (Дж. Буль - английский математик прошлого столетия, основоположник этой дисциплины). Ее аппарат широко используют для описания схем ЭВМ, их оптимизации и проектирования.

Вся информация в ЭВМ представляется в двоичной системе счисления. Поставим в соответствие входным сигналам отдельных устройств ЭВМ соответствующие значения x_i ($i=1,n$), а выходным сигналам - значения функций y_j ($j=1,m$).



Рис. Представление схемы ЭВМ

Основы построения ЭВМ

В этом случае зависимостями

$$y_j = f(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n), \quad (1)$$

где x_i – i -й вход;

n – число входов;

y_i – i -й выход;

m – число выходов в устройстве,

можно описывать алгоритм работы любого устройства ЭВМ.

Каждая такая зависимость y , является “булевой функцией, у которой число возможных состояний и каждой ее независимой переменной равно двум” (стандарт ISO 2382/2-76), т.е. функцией алгебры логики, а ее аргументы определены на множестве $\{0,1\}$.

Алгебра логика устанавливает основные законы формирования и преобразования логических функций. Она позволяет представить любую сложную функцию в виде композиции простейших функций. Рассмотрим наиболее употребительные из них.

Основы построения ЭВМ

Известно, что количество всевозможных функций N от n аргументов выражается зависимостью

$$N=2^{2n}. \quad (2)$$

При $n=0$ можно определить две основные функции ($N=2$), не зависящие от каких-либо переменных: y_0 , тождественно равную нулю ($y_0=0$), и y_1 , тождественно равную единице ($y_1=1$).

Технической интерпретацией функции $y_1=1$ может быть генератор импульсов. При отсутствии входных сигналов на выходе этого устройства всегда имеются импульсы (единицы). Функция $y_0=0$ может быть интерпретирована отключенной схемой, сигналы от которой не поступают ни к каким устройствам.

Таблица функций от одной переменной

При $n = 1$ зависимость (2) дает $N=4$. Представим зависимость значений этих функций от значения аргумента x в виде специальной таблицы истинности (табл.).

Y_j	Y_0	Y_1	Y_2	Y_3
x				
0	0	1	0	1
1	0	1	1	0

Таблица функций от одной переменной

Таблицы истинности получили такое название, потому что они определяют значение функции в зависимости от комбинации входных сигналов. В этой таблице, как и ранее, $y_0=0$ и $y_1=1$. Функция $y_2=x$, а функция $y_3=x$ - (инверсия x).

Этим функциям соответствуют определенные технические аналоги. Схема, реализующая зависимость $y_2=x$, называется повторителем, а схема $y_3=x$ - инвертором.

При $n=2$, $N=16$, т.е. от двух переменных, можно построить шестнадцать различных функций.

Таблица функций от двух переменных

В таблице представлена часть из них, имеющая фундаментальное значение при построении основных схем ЭВМ.

Y_i	Y_0	Y_1	Y_2	Y_3	...	Y_4	Y_5	Y_6	Y_7	Y_8	Y_9	...	Y_{15}
X1 X2													
00	0	1	0	1		0	1	0	1	1	0		
01	0	1	0	1	...	1	0	0	1	0	1	...	
10	0	1	1	0		1	0	0	1	0	1		
11	0	1	1	0		1	0	1	0	1	0		

Заметим, что в левой части таблицы перечислены всевозможные комбинации входных переменных (наборы значений), а в правой - возможные реакции выходных сигналов. В табл. 2 представлены функции y_4 - y_9 , полностью соответствующие функциям табл. 1, а также новые, часто используемые и интересные функции y_4 - y_9 . При этом местоположение функций и их нумерация в таблице особого значения не имеют. По данной таблице нетрудно составить аналитическое выражение (зависимость) для каждой функции от двух аргументов вида (1).

Таблица функций от двух переменных

Для этого наборы переменных, на которых **функция** принимает значение единицы, записываются как **конъюнкции (логическое умножение)** и связываются знаками логического сложения. Такие формы функций получили название дизъюнктивных нормальных форм (ДНФ). Если в этих функциях конъюнкции содержат все без исключения переменные в прямом или инверсном значениях, то такая форма функций называется совершенной.

Функция y_4 представляет собой **функцию логического сложения, дизъюнкцию**. Она принимает значение единицы, если значение единицы имеет хотя бы одна переменная x_1 или x_2 :

Тождественность приведенных аналитических зависимостей можно установить, пользуясь законами алгебры логики, приведенными ниже.

Функция y_5 является инверсной функцией по отношению к y_4 :
Она имеет название “отрицание дизъюнкции”. Иногда в литературе встречается ее специальное название “стрелка Пирса”, по фамилии математика, исследовавшего ее свойства.

Таблица функций от двух переменных

Функция y_6 является функцией логического умножения. Она очень похожа на операцию обычного умножения и принимает значение единицы в тех случаях, когда все ее переменные равны единице:

Функция y_7 является инверсной функцией по отношению к y_6 :

Она называется “отрицание конъюнкции” или “штрих Шеффера”. Функция y_8 называется логической равнозначностью, она принимает значение единицы, если все ее переменные имеют одинаковое значение (или 0 или 1):

Функция y_9 является инверсной по отношению к y_8 :

Она принимает значение единицы, если ее переменные имеют противоположные значения. Ниже будет показано, что функции y_8 и y_9 являются основой для построения сумматоров, так как они соответствуют правилам формирования цифр двоичных чисел при сложении (вычитании).

Таблица функций от двух переменных

Из перечисленных функций двух переменных можно строить сколь угодно сложные зависимости, отражающие алгоритмы преобразования информации, представленной в двоичной системе счисления. Алгебра логики устанавливает правила формирования логически полного базиса простейших функций, из которых могут строиться любые более сложные. Наиболее привычным базисом является набор трех функций {инверсия, дизъюнкция, конъюнкция}. Работа с функциями, представленными в этом базисе, очень похожа на использование операций обычной алгебры.

Алгебра логики устанавливает, что существуют и другие комбинации простейших логических функций, обладающих свойством логической полноты. Например, наборы логических функций {инверсия, дизъюнкция} и {инверсия, конъюнкция} также являются логически полными. Наиболее интересны минимальные базисы, включающие по одной операции {"отрицание дизъюнкции - \vee "} и {"отрицание конъюнкции - \wedge "}. Однако работа с функциями, представленными в указанных базисах, требует от специалистов по проектированию ЭВМ определенных навыков.

Законы алгебры логики

Из определения вышеприведенных функций можно установить целый ряд простейших свойств:

$$\begin{array}{l} x \vee 1 = 1 \quad x \cdot 0 = 0 \\ x \vee \bar{x} = 1 \quad x \cdot 1 = x \quad x \vee x \vee \dots \vee x = x \\ x \vee 0 = x \quad x \cdot \bar{x} = 0 \quad x \cdot x \cdot \dots \cdot x = x \\ x \vee x = x \quad x \cdot x = x \end{array}$$

В алгебру логики установлен целый ряд законов, с помощью которых возможно преобразование логических функций (ЛФ):
коммутативный (переместительный)

$$\begin{array}{l} x_1 * x_2 = x_2 * x_1 \\ x_1 \vee x_2 = x_2 \vee x_1; \end{array}$$

ассоциативный (сочетательный)

$$(x_1 * x_2) * x_3 = x_1 * (x_2 * x_3) \\ (x_1 \vee x_2) \vee x_3 = x_1 \vee (x_2 \vee x_3).$$

Законы алгебры логики

Эти законы полностью идентичны законам обычной алгебры;
дистрибутивный (распределительный)

$$x_1 \cdot (x_2 \vee x_3) = x_1 \cdot x_2 \vee x_1 \cdot x_3$$

$$x_1 \vee x_2 \cdot x_3 = (x_1 \vee x_2)(x_1 \vee x_3).$$

Закон поглощения. В дизъюнктивной форме ЛФ конъюнкция меньшего ранга, т.е. с меньшим числом переменных, поглощает все конъюнкции большего ранга, если ее изображение содержится в них. Это же справедливо и для конъюнктивных форм:

$$x_1 \vee x_1 \cdot x_2 = x_1$$

$$x_1 \cdot (x_1 \vee x_2) = x_1.$$

Закон склеивания

$$x_1 x_2 \vee x_1 \bar{x}_2 = x_1 \quad (x_1 \vee x_2)(x_1 \vee \bar{x}_2) = x_1,$$
$$F x \vee F \bar{x} = F \quad (x \vee F)(\bar{x} \vee F) = F,$$

Законы алгебры логики

Закон свёртки

$$x \vee \bar{x}F = x \vee F \quad x(\bar{x} \vee F) = xF$$

Правило де Моргана

$$\overline{x_1 \vee x_2} = \bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2 \quad \overline{x_1 \cdot x_2} = \bar{x}_1 \vee \bar{x}_2.$$

где F - логическая функция общего вида, не зависящая от переменной x .

Убедиться в тождественности приведенных зависимостей можно путем аналитических преобразований выражений или путем построения таблицы истинности для ЛФ, находящихся в левой и правой частях.

Используя данные зависимости, можно преобразовывать исходные выражения в более простые (минимизировать их). По упрощенным выражениям можно построить техническое устройство, имеющее минимальные аппаратные затраты.

Спасибо за внимание!