

Скалярное произведение векторов

Проверочная работа

15 минут

Угол между векторами

A

$\vec{a}$

B

$\vec{b}$

$\vec{b}$

$\widehat{\vec{a} \vec{b}} = \alpha$

α

• O

Лучи OA и OB образуют угол AOB.

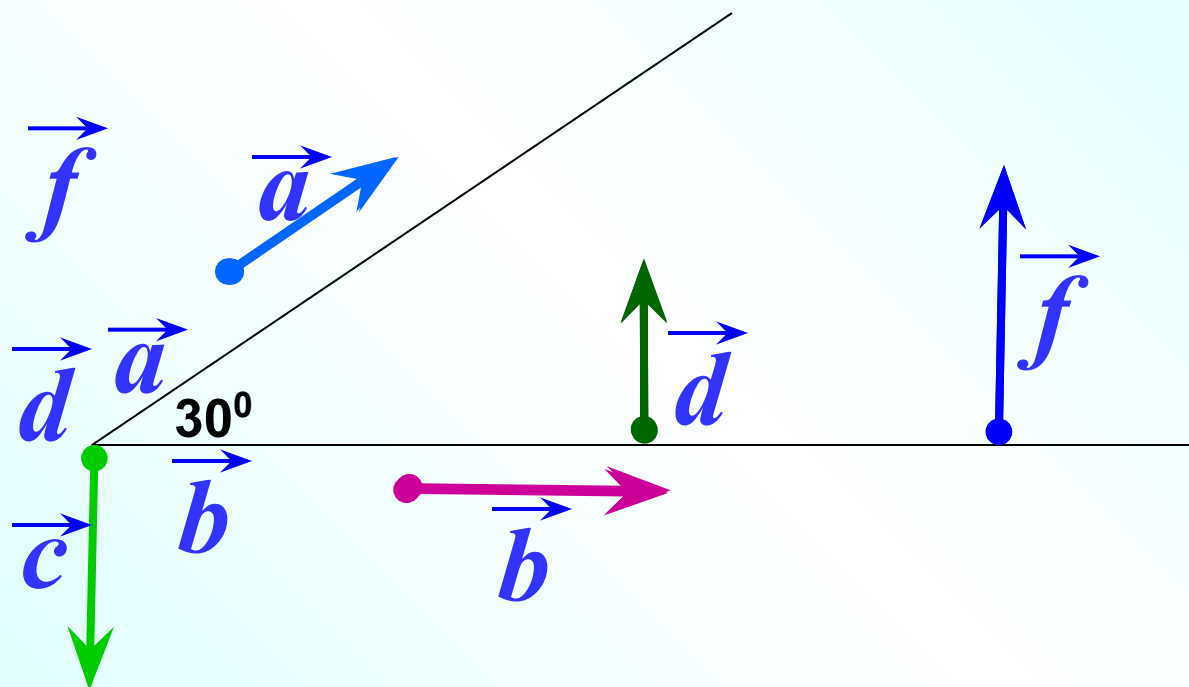
Градусную меру этого угла
обозначим буквой α

Угол между векторами
равен α

$\vec{a}$ и $\vec{b}$

$\vec{a}$

Найти углы между векторами.



$$\widehat{\vec{a} \vec{b}} = 30^\circ$$

$$\widehat{\vec{a} \vec{c}} = 120^\circ$$

$$\widehat{\vec{b} \vec{c}} = 90^\circ$$

$$\widehat{\vec{d} \vec{c}} = 180^\circ$$

$$\widehat{\vec{d} \vec{f}} = 0^\circ$$

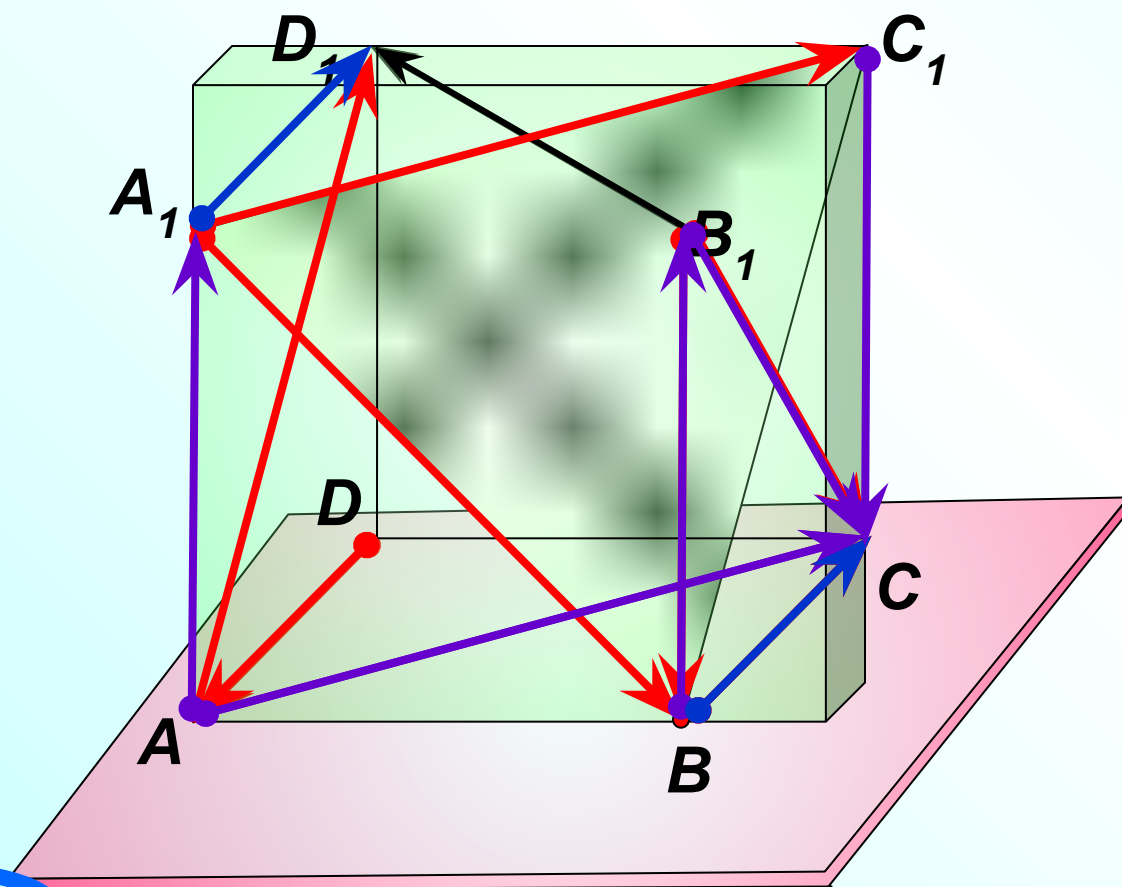
Два вектора называются
перпендикулярными,
если угол между ними равен 90° .

$$\vec{b} \perp \vec{c}$$

$$\vec{b} \perp \vec{d}$$

$$\vec{b} \perp \vec{f}$$

№ 441 $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ – куб.
Найдите угол между векторами.



$$\overrightarrow{B_1 B}, \overrightarrow{B_1 C} = 45^\circ$$

$$\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{B_1 D_1} = 135^\circ$$

$$\overrightarrow{A_1 C_1}, \overrightarrow{A_1 B} = 60^\circ$$

$$\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AC} = 45^\circ$$

$$\overrightarrow{B_1 C}, \overrightarrow{AD_1} = 90^\circ$$

$$\overrightarrow{BB_1}, \overrightarrow{AC} = 90^\circ$$

$$\overrightarrow{A_1 D_1}, \overrightarrow{BC} = 0^\circ$$

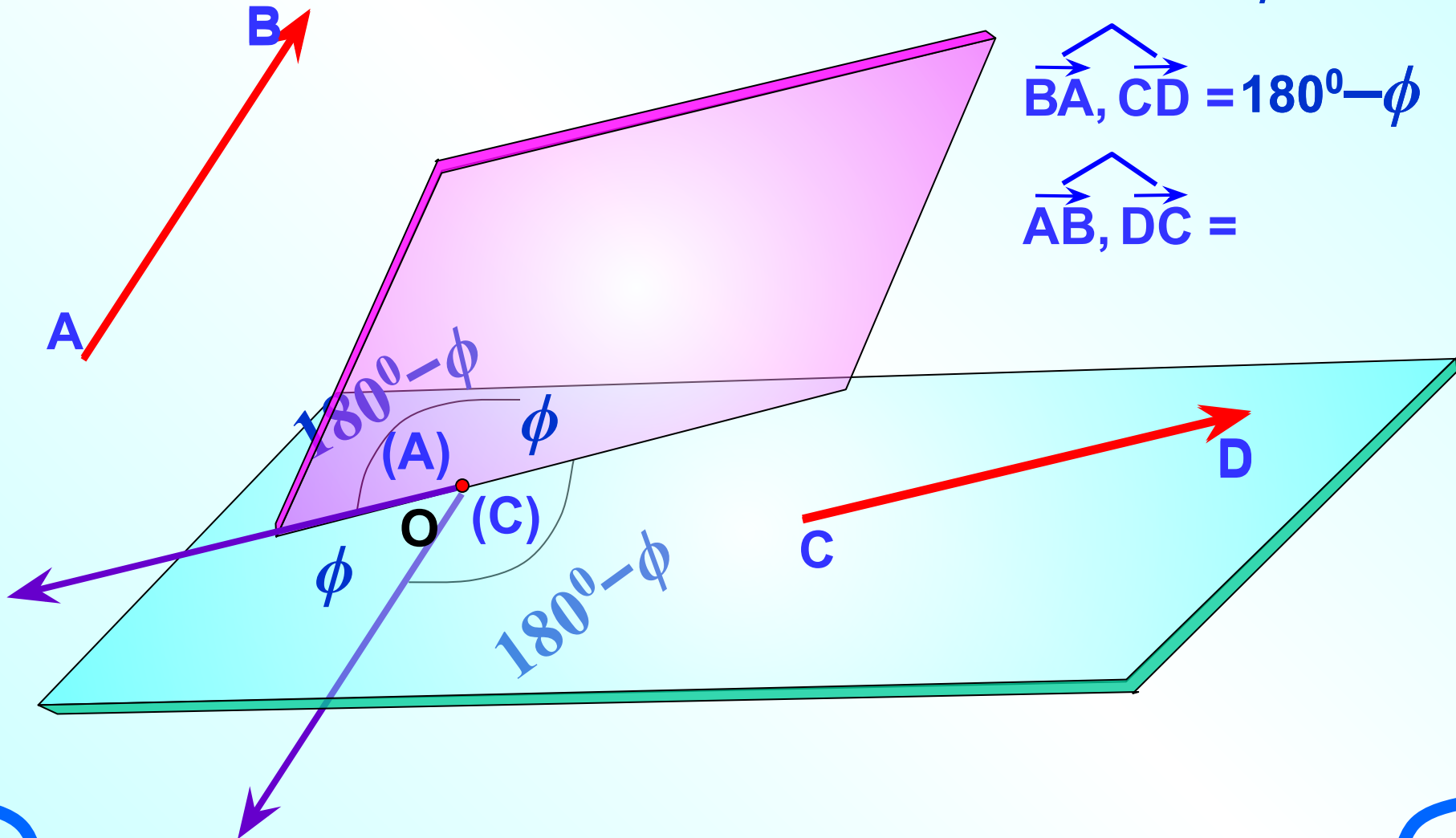
$$\overrightarrow{AA_1}, \overrightarrow{C_1 C} = 180^\circ$$

№ 442 Угол между векторами $\vec{AB}$ и $\vec{CD}$ равен ϕ .
Найдите углы между векторами

$$\widehat{\vec{BA}, \vec{DC}} = \phi$$

$$\widehat{\vec{BA}, \vec{CD}} = 180^\circ - \phi$$

$$\widehat{\vec{AB}, \vec{DC}} =$$



Сумма векторов – вектор.

Разность векторов – вектор.

Произведение вектора на число – вектор.

Скалярным произведением двух векторов называется произведение их длин на косинус угла между ними.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos(\widehat{\vec{a} \vec{b}})$$

Скалярное произведение векторов – число (скаляр).

Скалярное произведение в координатах

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \alpha$$

Скалярное произведение векторов

$$a \{x_1; \vec{y}_1; z_1\} \quad \text{и} \quad \vec{b} \{x_2; y_2; z_2\}$$

выражается формулой $\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$

$$\cos \alpha = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$

Свойства скалярного произведения векторов

Для любых векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ и любого числа k справедливы равенства:

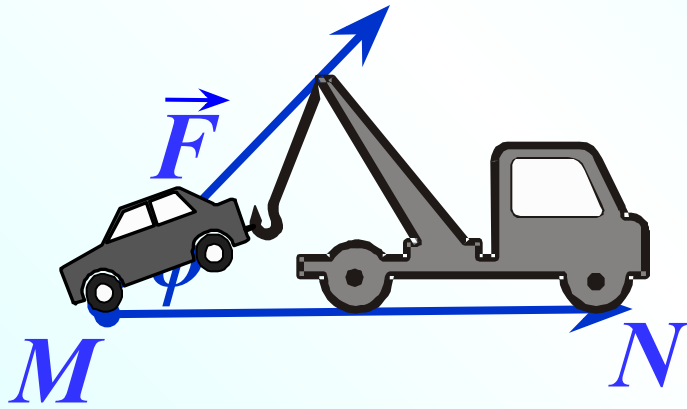
1 $\vec{a} \cdot \vec{a} \geq 0$, причем $\vec{a} \cdot \vec{a} > 0$ при $\vec{a} \neq \vec{0}$

2 $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ Переместительный закон

3 $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$
Распределительный закон

4 $(k\vec{a}) \cdot \vec{b} = k(\vec{a} \cdot \vec{b})$ Сочетательный закон

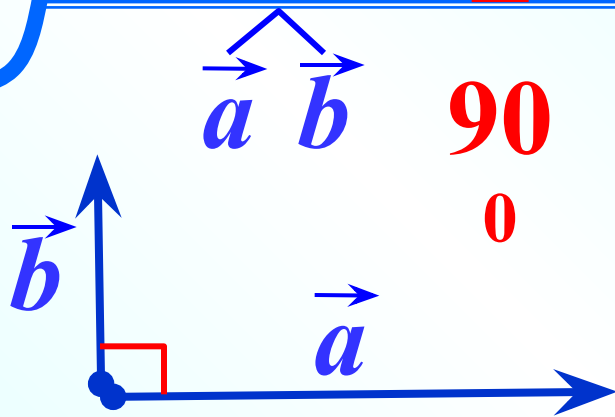
Скалярное произведение в физике



Скалярное произведение векторов встречается в физике. Например, из курса механики известно, что работа A постоянной силы $\vec{F}$ при перемещении тела из точки M в точку N равна произведению силы $\vec{F}$ и перемещения $\vec{MN}$ на косинус угла между ними.

$$A = |\vec{F}| \cdot |\vec{MN}| \cos \phi$$

$$A = \vec{F} \cdot \vec{MN}$$



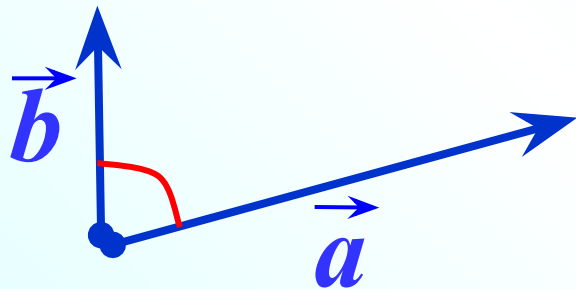
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos 90^\circ = 0$$

Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ перпендикулярны, то скалярное произведение векторов равно нулю.

Обратно: если $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, то векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ перпендикулярны.

Скалярное произведение ненулевых векторов равно нулю тогда и только тогда, когда эти векторы перпендикулярны.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \iff \vec{a} \perp \vec{b}$$



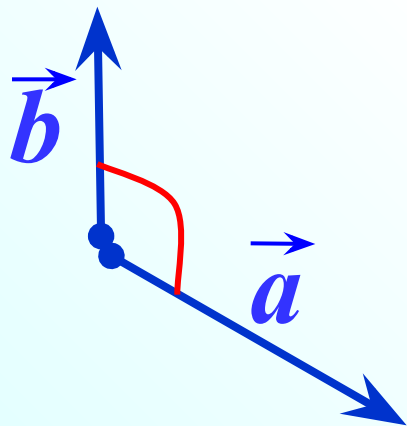
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos 90^\circ = 0$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \alpha > 0$$

Скалярное произведение ненулевых векторов положительно тогда и только тогда , когда угол между векторами **острый**.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} > 0 \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \alpha > 0$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \quad \text{при } 90^\circ$$

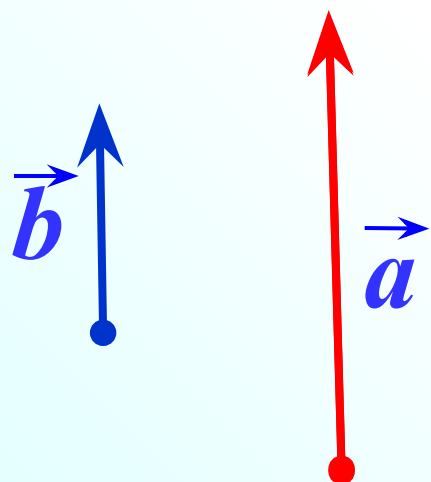


$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \alpha$$

$\cos \alpha < 0$
 $\alpha > 90^\circ$

Скалярное произведение ненулевых векторов отрицательно тогда и только тогда, когда угол между векторами **тупой**.

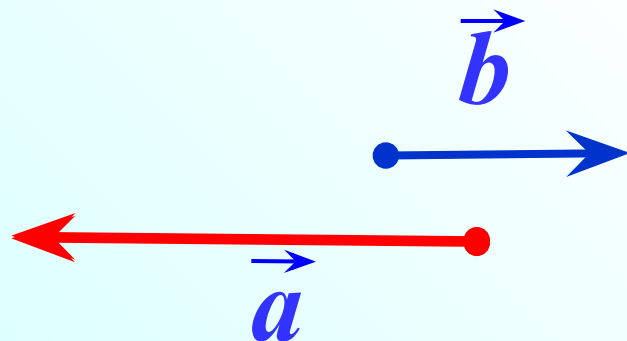
$$\vec{a} \cdot \vec{b} < 0 \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} < 0 \quad \text{при } \alpha > 90^\circ$$



Если $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$

$$\widehat{\vec{a} \vec{b}} = 0^\circ$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \overset{1}{\cos 0^\circ} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$$

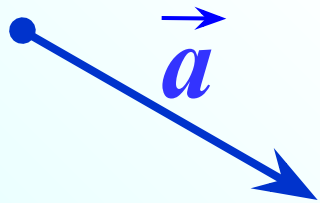


Если $\vec{a} \downarrow\uparrow \vec{b}$

$$\widehat{\vec{a} \vec{b}} = 180^\circ$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \overset{-1}{\cos 180^\circ} = -|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$$

$$\begin{array}{c} \nearrow \\ \overrightarrow{a} \quad \overrightarrow{a} \\ \searrow \end{array} = 0^0$$



$$\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{a} = |\overrightarrow{a}| \cdot |\overrightarrow{a}| \overset{1}{\cos 0^0} = |\overrightarrow{a}| \cdot |\overrightarrow{a}| = |\overrightarrow{a}|^2$$

Скалярное произведение $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{a}$ называется
скалярным квадратом вектора $\overrightarrow{a}$ и обозначается $\overrightarrow{a}^2$

Таким образом,
скалярный квадрат вектора равен квадрату его длины.

$$\overrightarrow{a}^2 = |\overrightarrow{a}|^2$$

№ 443 $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ – куб. Найдите скалярное произведение векторов

$$\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{B_1 C_1}$$

$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{C_1 A_1}$$

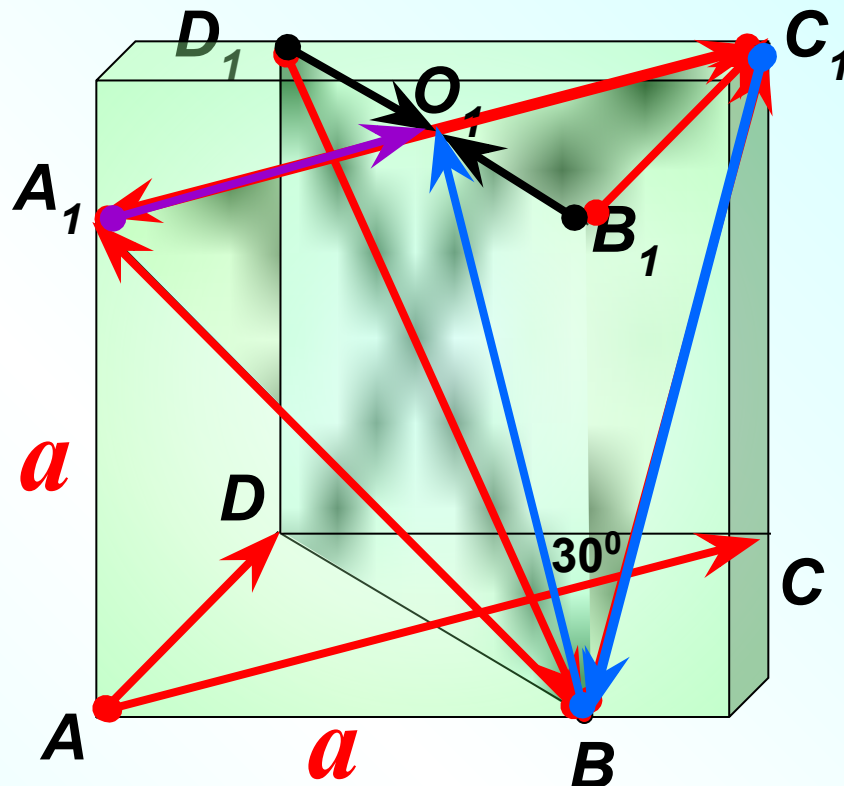
$$\overrightarrow{D_1 B} \cdot \overrightarrow{AC}$$

$$\overrightarrow{BA_1} \cdot \overrightarrow{BC_1}$$

$$\overrightarrow{A_1 O_1} \cdot \overrightarrow{A_1 C_1}$$

$$\overrightarrow{D_1 O_1} \cdot \overrightarrow{B_1 O_1}$$

$$\overrightarrow{BO_1} \cdot \overrightarrow{C_1 B}$$



Домашнее задание

П.50-51

№ 451(а,б);446 +

1. Дано: $\vec{b} \{-5; 1; 0\}$ $\vec{c} \{-1; -2; 1\}$. Определите вид угла между векторами $\vec{b}$ и $\vec{c}$.

$A(-7; 2; 4); B(-4; 0; -2); C(3; -12; 11); D(0; -8; 23)$.

Найдите угол между векторами $\vec{AB}$ и $\vec{CD}$