

Практический семинар по Математической экономике (17.М18-э + 17.М19-э)

Занятие 1

ОПТИМИЗАЦИОННЫЕ ЗАДАЧИ. ЗЛП

2018/2019 уч. год

Основная задача линейного программирования

Задача, в которой требуется найти максимум (или минимум) линейной формы

$$L(X) = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$$

при условиях

[illegible]

называется задачей линейного программирования.

Постановка основной задачи линейного программирования

В линейном программировании изучаются свойства решений линейных уравнений и неравенств вида

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i \quad (i = \overline{1, k}) \\ \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i \quad (i = \overline{k+1, m}) \\ x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1, n}) \end{array} \right. \quad (*)$$

a_{ij} , b_i - числовые коэффициенты

Определения

Система (*) называется системой ограничений.

$x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, удовлетворяющий системе ограничений, называется допустимым планом.

Основной задачей линейного программирования называется задача о нахождении такого допустимого плана, который доставляет максимум функции

$$F(x) = c_0 + \sum_{i=1}^n c_i x_i \quad (**)$$

называемой целевой функцией

Графический метод решения ОЗЛП с двумя переменными. Пример 1

Для производства двух видов изделия требуется три вида ресурсов: дерево, пластик и трудозатраты.

Потребности в ресурсах, запасы ресурсов и прибыль от реализации единицы продукции каждого вида заданы:

Тип ресурса	Единица продукции вида I	Единица продукции вида II	Запас ресурса
Дерево (m^2)	1	3	24
Пластик (m^2)	4	1	24
Трудозатраты (чел/час)	3	2	23
Прибыль (руб.)	200	300	

Математическая модель задачи

Требуется найти план выпуска продукции, позволяющий получить наибольшую прибыль.

Введем обозначения:

x_1 - план выпуска продукции 1-го вида,

x_2 - план выпуска продукции 2-го вида.

В соответствии с данными таблицы

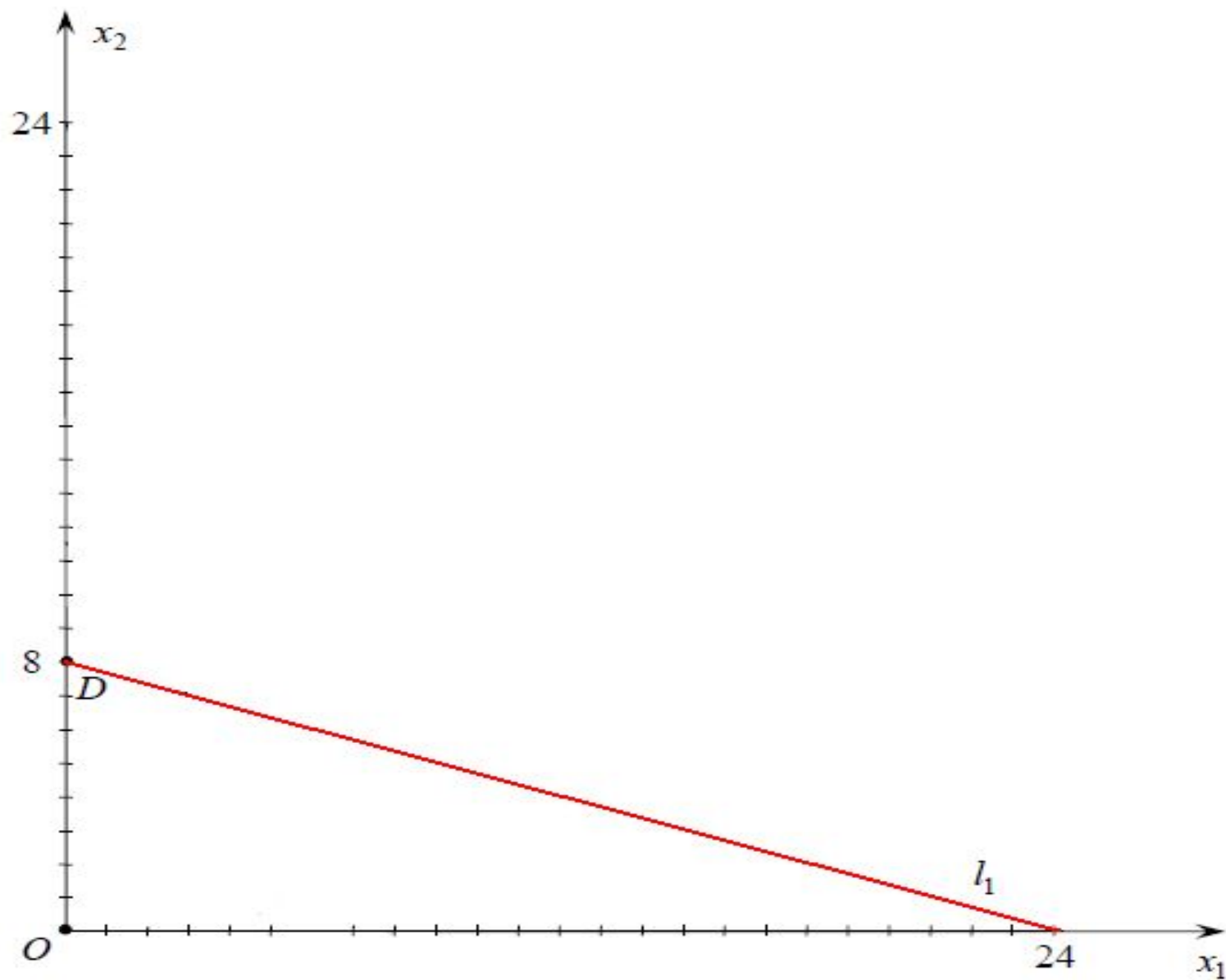
$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \leq 24 \\ 4x_1 + x_2 \leq 24 \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 23 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases} \quad - \text{система ограничений}$$

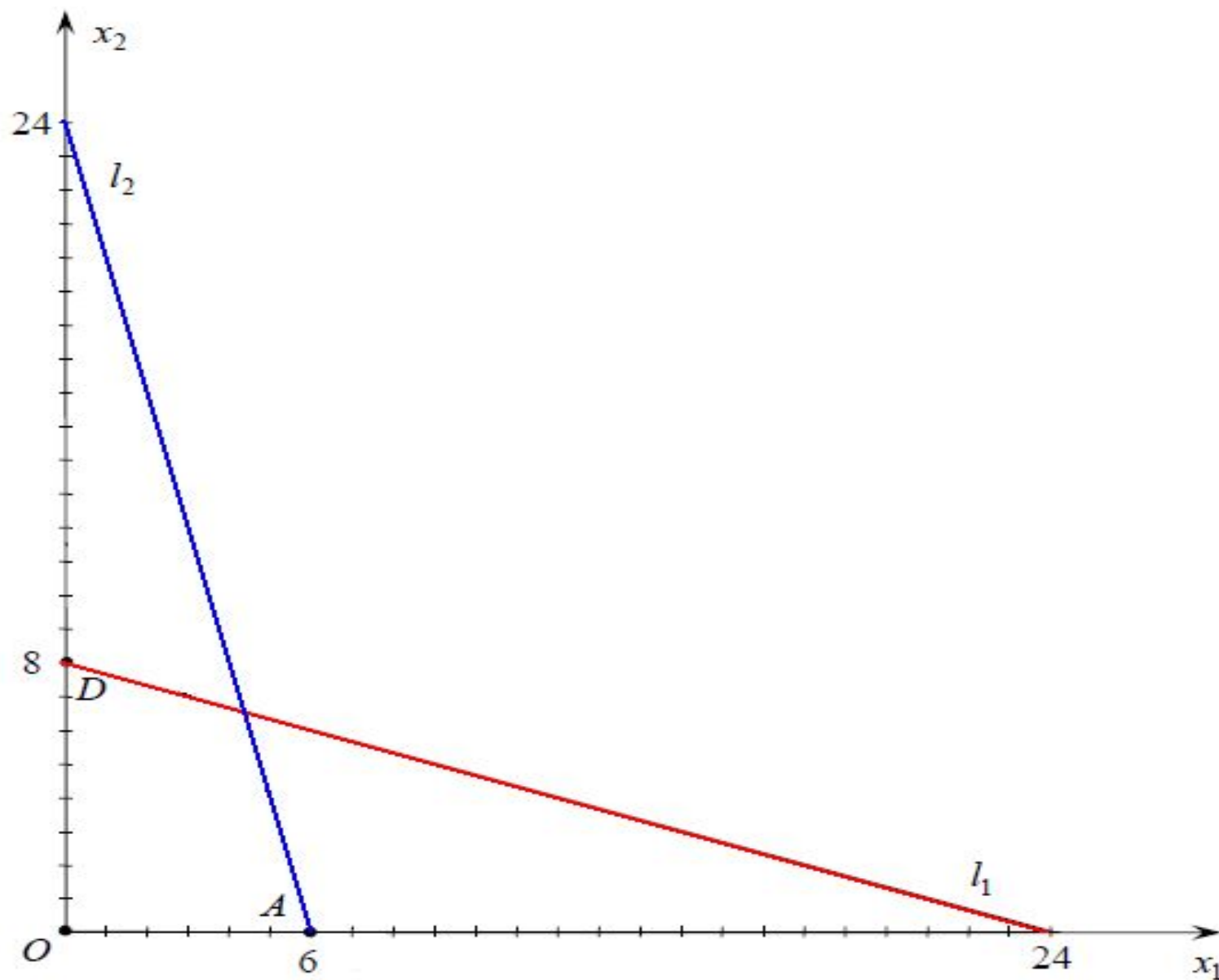
Математическая модель задачи

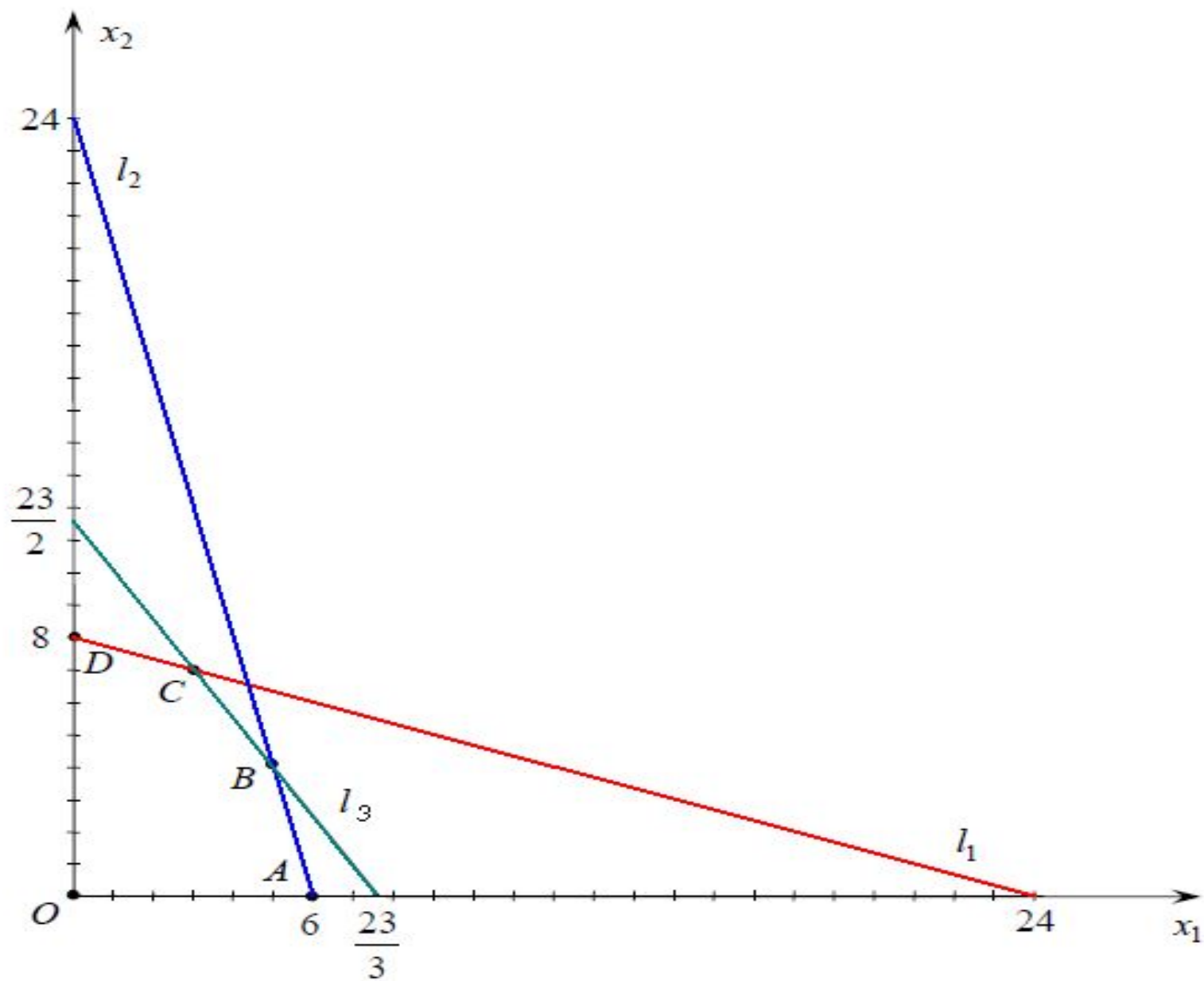
Требуется найти такой план (x_1, x_2) , который доставит максимум целевой функции

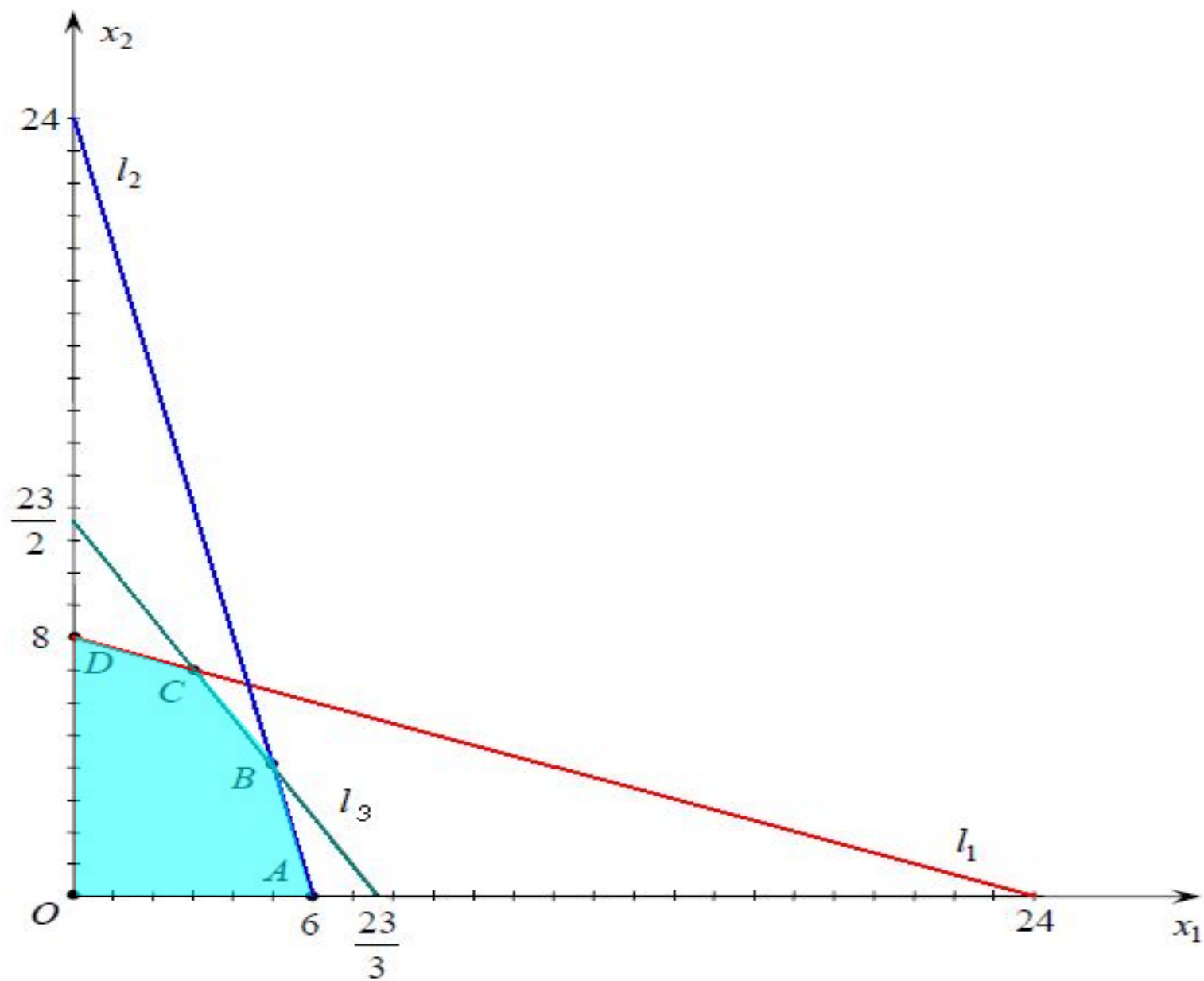
$$F(x_1, x_2) = 200x_1 + 300x_2$$

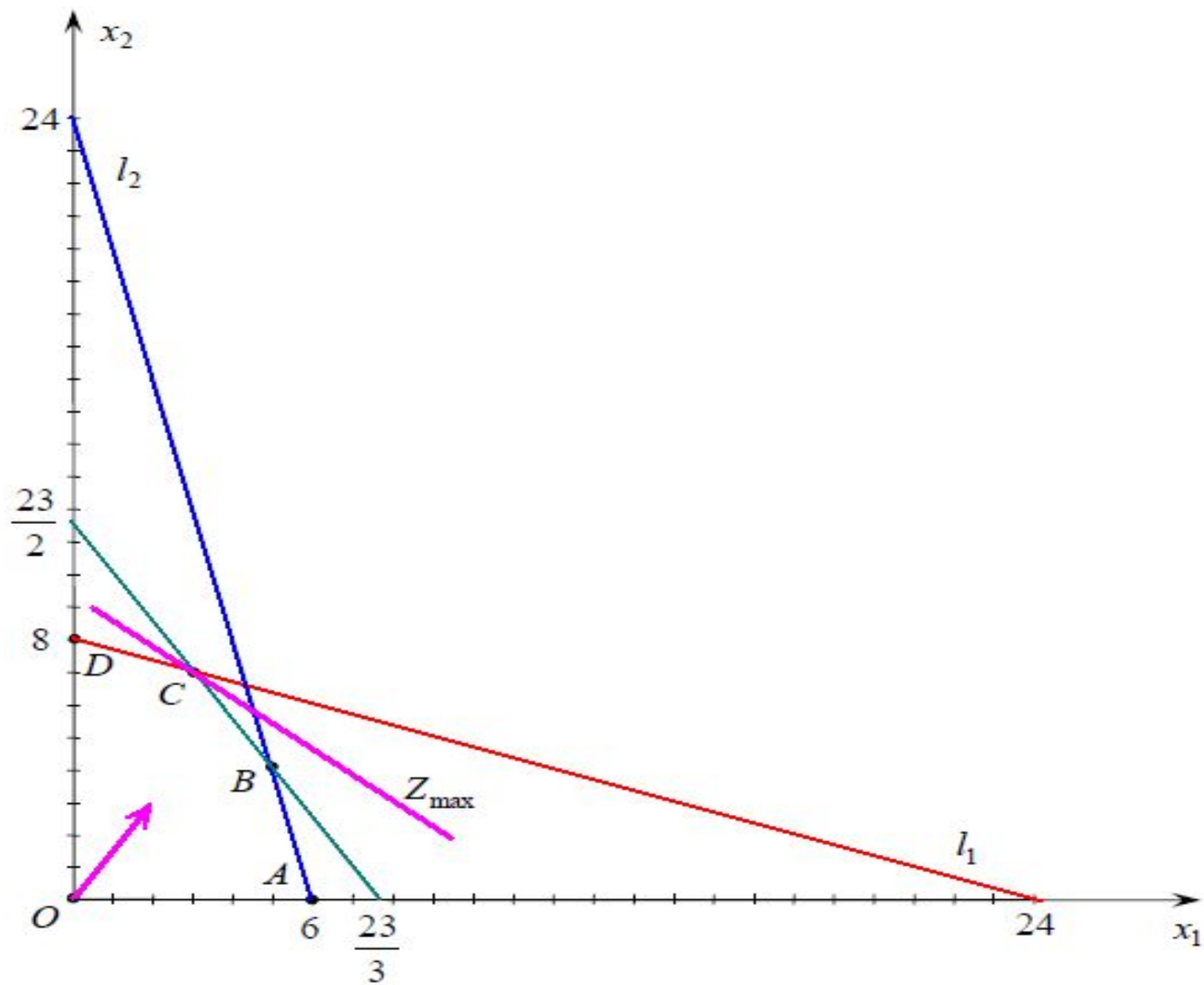
Построим на плоскости x_1Ox_2 область, заданную системой ограничений.











Найдем координаты вершин пятиугольника OABCD.
Координаты точки В удовлетворяют СЛУ

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 = 24 \\ 3x_1 + 2x_2 = 23 \end{cases} \Rightarrow \mathbf{B} = (5; 4)$$

Координаты точки С удовлетворяют СЛУ

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 = 24 \\ 3x_1 + 2x_2 = 23 \end{cases} \Rightarrow \mathbf{C} = (3; 7)$$

$$\mathbf{A} = (6; 0); \mathbf{D} = (0; 8); \mathbf{O} = (0; 0).$$

Значения F в вершинах OABCD

$$F(O) = F(0; 0) = 200 \cdot 0 + 300 \cdot 0 = 0 ;$$

$$F(A) = F(6; 0) = 200 \cdot 6 + 300 \cdot 0 = 1200 ;$$

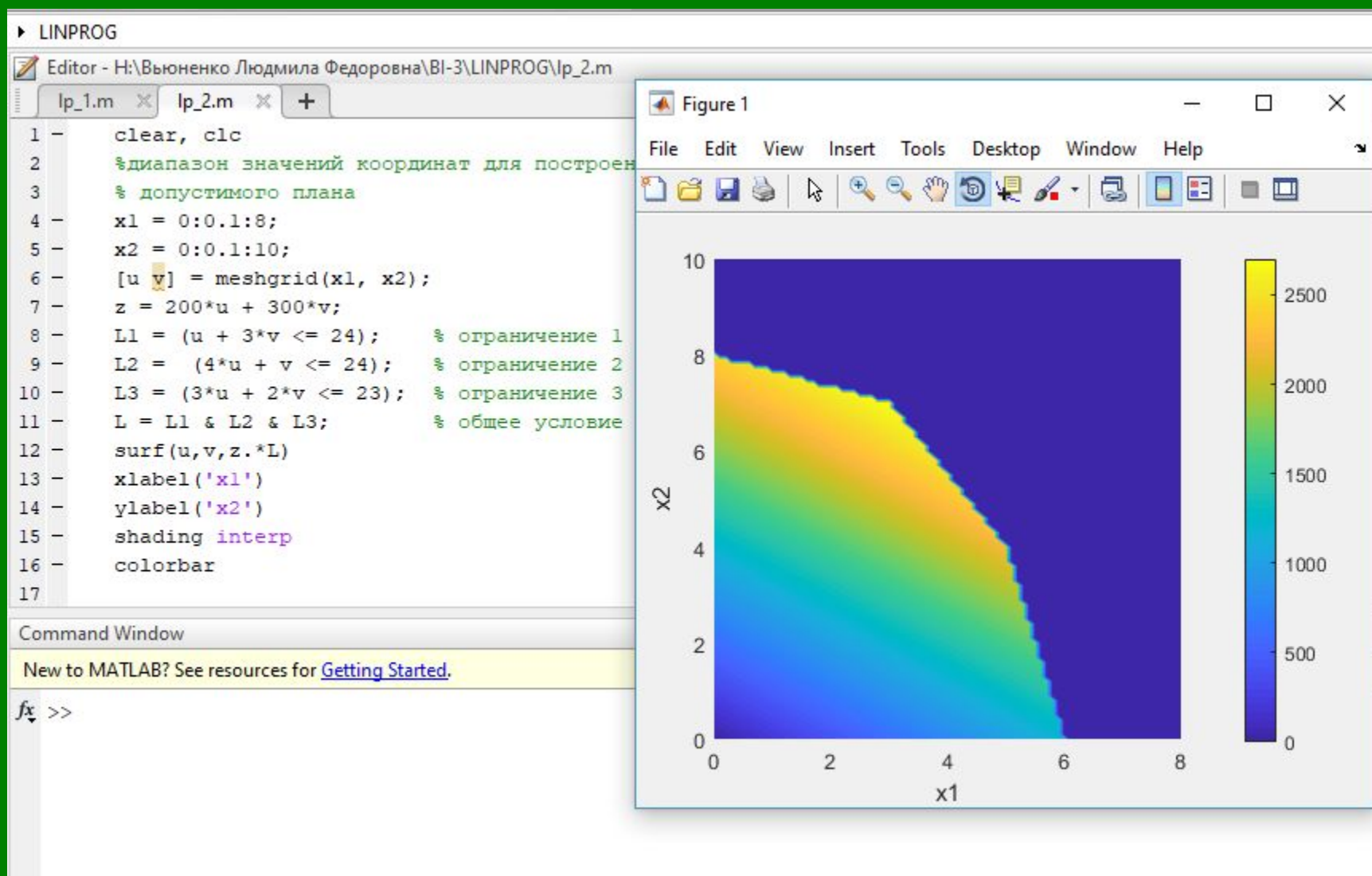
$$F(B) = F(5; 4) = 200 \cdot 5 + 300 \cdot 4 = 2200 ;$$

$$F(C) = F(3; 7) = 200 \cdot 3 + 300 \cdot 7 = 2700 ;$$

$$F(D) = F(0; 8) = 200 \cdot 0 + 300 \cdot 8 = 2400 .$$

Наибольшая прибыль достигается при выпуске
3 единиц продукции 1-го типа и 7 единиц 2-го типа.

Программные средства решения ЗЛП



ЗЛП. Пример 2

На некотором предприятии, выпускающем изделия двух типов, производственная мощность цеха сборки составляет 100 изделий первого типа или 300 изделий второго типа в сутки; в то же время отдел технического контроля в состоянии проверить не более 150 изделий (любого типа) в сутки. Известно, далее, что изделие первого типа стоит вдвое дороже, чем изделие второго типа. Требуется при этих условиях найти такой план выпуска продукции (столько – то изделий первого типа и столько – то второго в сутки), который обеспечивал бы наибольшую прибыль.

Искомый план выпуска продукции задается с помощью двух неотрицательных целых чисел x, y (x – количество изделий первого типа, y – второго), которые должны удовлетворять следующим условиям :

$$\begin{cases} 3x + y \leq 300 \\ x + y \leq 150 \\ L(x, y) = 2x + y \rightarrow \max \end{cases}$$

Геометрическая интерпретация данной задачи дает следующий ответ. В точке $M(75, 75) \in P$ линейная функция достигает максимального значения.

ЗЛП. Пример 3

Предприятие может производить два вида изделий "А" и "В", располагая для их изготовления ограниченными ресурсами материалов (чугуна и стали соответственно 1650 кг и 1200 кг) и оборудования (в количестве 2060 станков – часов).

На производство одной единицы изделия "А" требуется 10 кг чугуна, 10 кг стали и 23 станков – часов.

На производство одной единицы изделия "В" требуется 30 кг чугуна, 20 кг стали и 18 станков – часов.

Известно, далее, что предприятие получает прибыль от реализации одного изделия "А" в размере 34 "у.е.", а от одного изделия "В" – 40 "у.е."

Требуется при этих условиях найти такой план выпуска продукции (столько – то изделий первого типа и столько – то второго), который обеспечивал бы наибольшую прибыль, при условии, что изделия "А" должно быть изготовлено не менее 20 штук, а изделия "В" не менее 15 штук.

Искомый план выпуска продукции задается с помощью двух неотрицательных целых чисел x, y (x – количество изделий первого типа, y – второго), которые должны удовлетворять следующим условиям :

$$\begin{cases} 10x + 30y \leq 1650 \\ 10x + 20y \leq 1200 \\ 23x + 18y \leq 2060 \\ 20 \leq x, 15 \leq y \\ L(x, y) = 34x + 40y \rightarrow \max \end{cases}$$

Геометрическая интерпретация данной задачи дает следующий ответ. В точке $M(70, 25) \in P$ линейная функция достигает максимального значения, которое равно 3380 "у.е."

ЗЛП. Пример 4

Для изготовления двух видов изделий "А" и "В" используются три вида сырья.

На производство одной единицы изделия "А" требуется затратить сырья первого вида 13 кг, сырья второго вида – 32 кг, сырья третьего вида – 58 кг.

На производство одной единицы изделия "В" требуется затратить сырья первого вида 24 кг, сырья второго вида – 32 кг и сырья третьего вида – 29 кг.

Известно, далее, что предприятие получает прибыль от реализации одного изделия "А" в размере 4 "у.е.", а от одного изделия "В" – 3 "у.е."

Требуется при этих условиях найти такой план выпуска продукции (столько – то изделий первого типа и столько – то второго), который обеспечивал бы наибольшую прибыль, при условии, что производство обеспечено сырьем первого вида в количестве 312 кг, сырьем второго вида – 480 кг, сырьем третьего вида – 696 кг.

Искомый план выпуска продукции задается с помощью двух неотрицательных целых чисел x, y (x – количество изделий первого типа, y – второго), которые должны удовлетворять следующим условиям

$$\begin{cases} 13x + 24y \leq 312 \\ 32x + 32y \leq 480 \\ 58x + 29y \leq 696 \\ L(x, y) = 4x + 3y \rightarrow \max \end{cases}$$

Геометрическая интерпретация данной задачи дает следующий ответ. В точке $M(9,6) \in P$ линейная функция достигает максимального значения, равного 54 "у.е."

ЗЛП. Пример 5

Необходимо перебазировать имеющиеся в пунктах "А" и "В" соответственно 6 и 4 машины. В пункты "С" (3 машины) и "Д" (7 машин). Расстояние между пунктами отправления и назначения в километрах соответственно составляют :

От пункта "А" до пункта "С" – 80 км, а до пункта "Д" – 30 км;

От пункта "В" до "С" – 60 км, а до пункта "Д" – 90 км.

Необходимо спланировать перевозки так, чтобы суммарный пробег в машино – километрах оказался наименьшим.

Решение

Искомый план перевозки машин задается с помощью четырех неотрицательных целых чисел x_1, x_2, x_3, x_4 , (x_1 – количество машин, перевезенных из "А" в "С", x_2 – количество машин, перевезенных из "А" в "Д", соответственно, x_3, x_4 – количество машин, перевезенных из "В" в "С" и "Д", которые должны удовлетворять следующим условиям

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 6 \\ x_3 + x_4 = 4 \\ x_1 + x_3 = 3 \\ x_2 + x_4 = 7 \\ L(x, y) = 80x_1 + 30x_2 + 60x_3 + 90x_4 \rightarrow \min \end{cases}$$

Простой перебор допустимых значений в данной задаче дает следующий ответ. В точке $M(0,6,3,1) \in P$ линейная функция достигает минимального значения, равного 450.