

# Теория графов

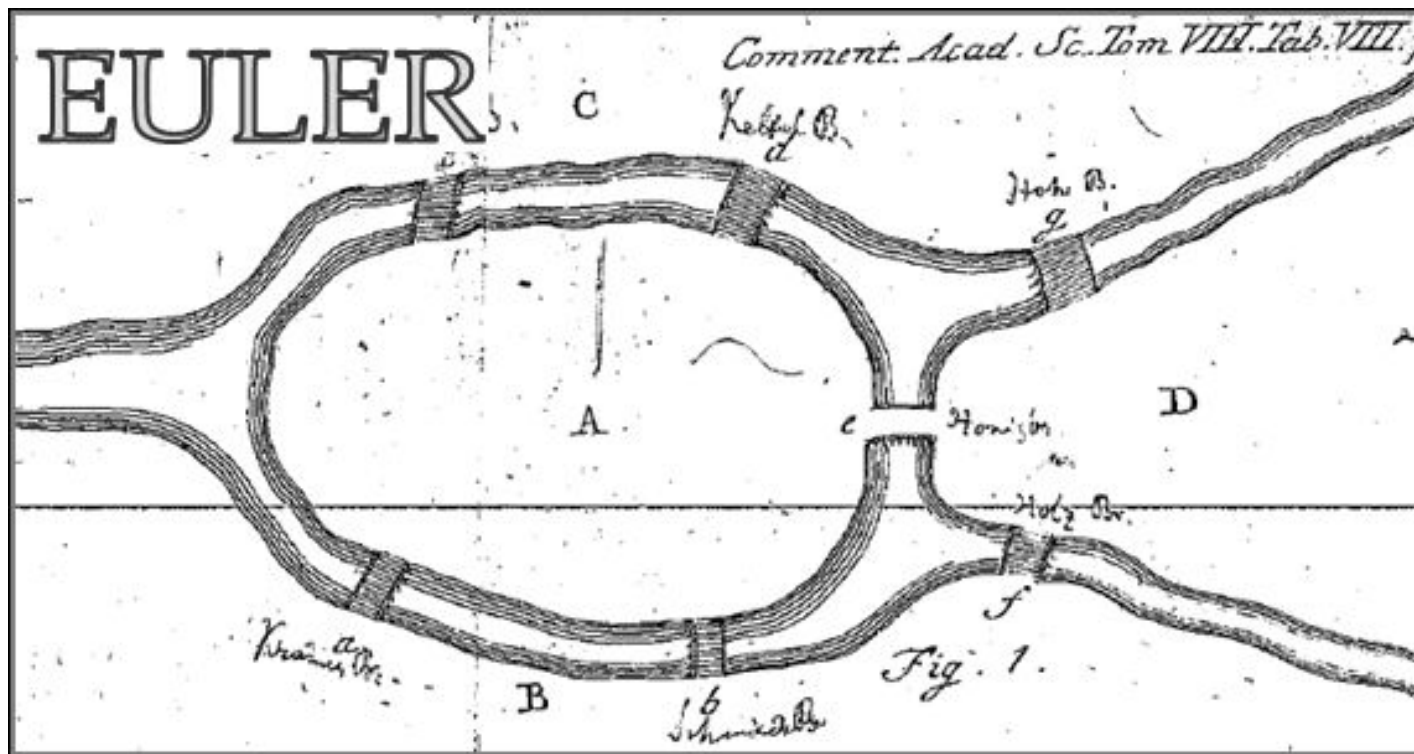
## Лекция 1

# Литература

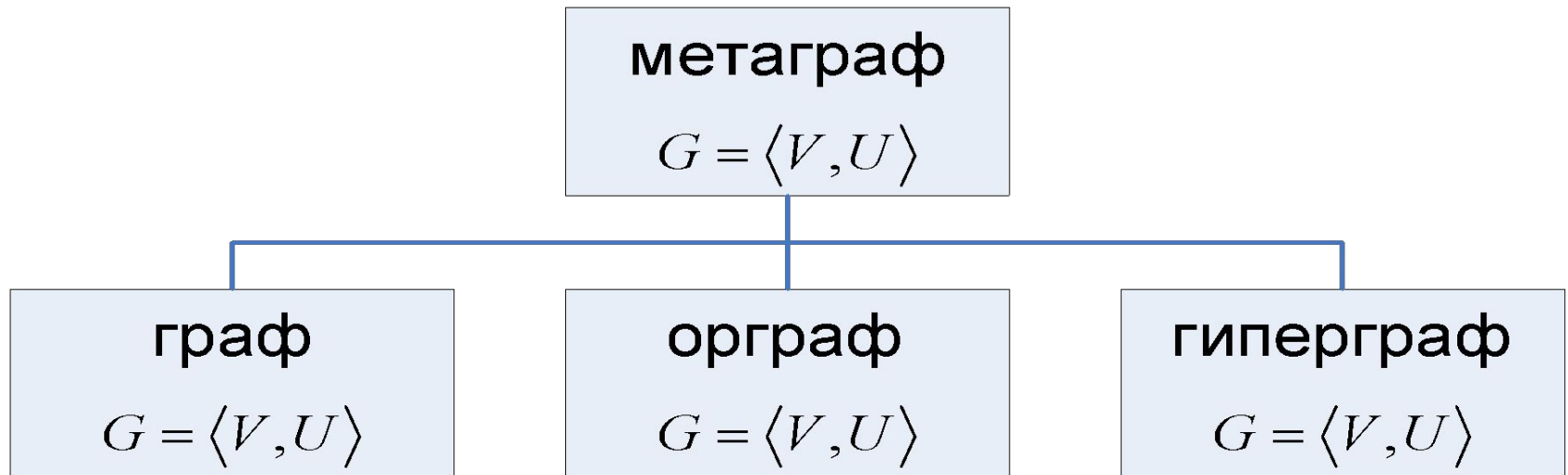
1. В.А. Горбатов Дискретная математика М.: АСТ; Астрель, 2003
2. Харари Ф. Теория графов, 2003г
3. Кристофидес, Н. Теория графов. Алгоритмический подход. 1978
4. Кузнецов О.П., Дискретная математика для инженера, 2009.
5. Тихомирова А.Н. Теория графов, МИФИ,

# Задача о Кёнигсбергских мостах

## Леонард Эйлер(1707-1783)



# Основные объекты графов



- носитель метаграфа (конечное множество вершин).  $V = \{v_1, v_2, \dots, v_p\}$
- сигнатура метаграфа (конечное множество связей между вершинами).  $U = \{u_1, u_2, \dots, u_q\}$

Понятие графа и орграфа

Граф  $G = \langle V, U \rangle$ , где

$V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ ,  $n \geq 1$  —

множество вершин (носитель),

$U \subseteq V \times V$  (сигнатура).

# Неориентированный граф (граф)

$$G = \langle V, U \rangle,$$

$$V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}, n \geq 1,$$

$$U \subseteq V \times V$$

$$(v_i, v_j) = (v_j, v_i)$$

$(v_i, v_j)$  – ребро графа

$(v_i, v_i)$  - петля

# Ориентированный граф (орграф)

$$G = \langle V, U \rangle,$$

$$V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}, n \geq 1$$

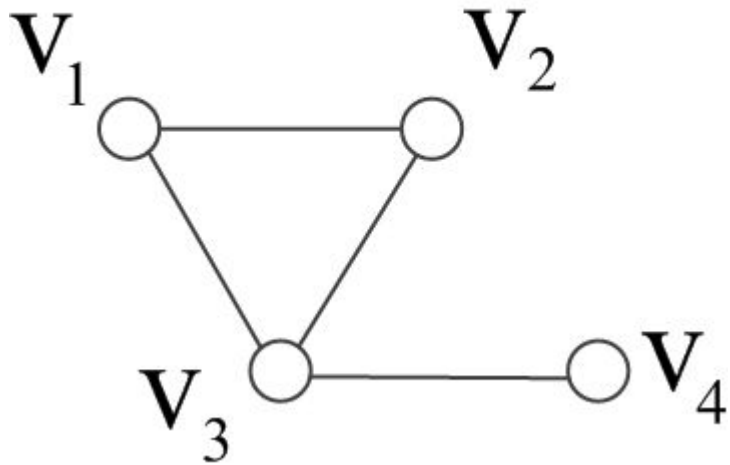
$$U \subseteq V \times V$$

$$(v_i, v_j) \neq (v_j, v_i)$$

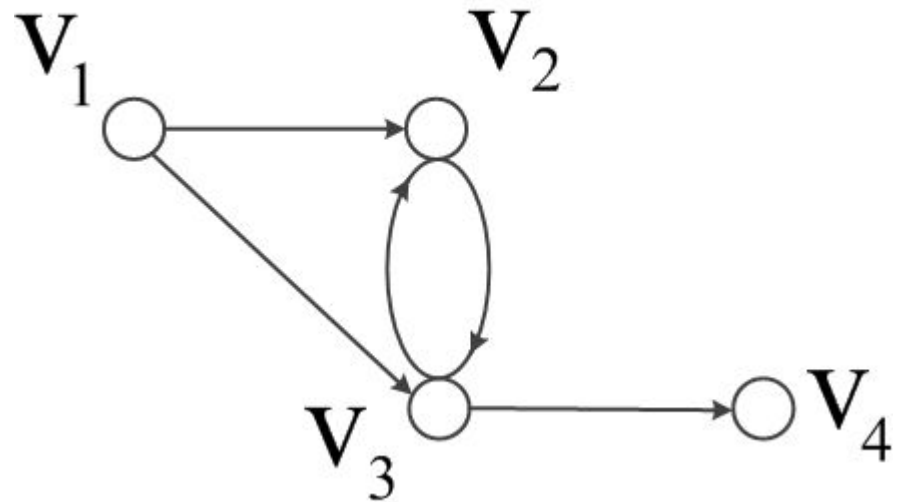
$(v_i, v_j)$  - дуга

# Геометрический граф

Граф



Орграф



## Обозначение

$$G_{p,q} \quad |V| = p, \quad |U| = q$$

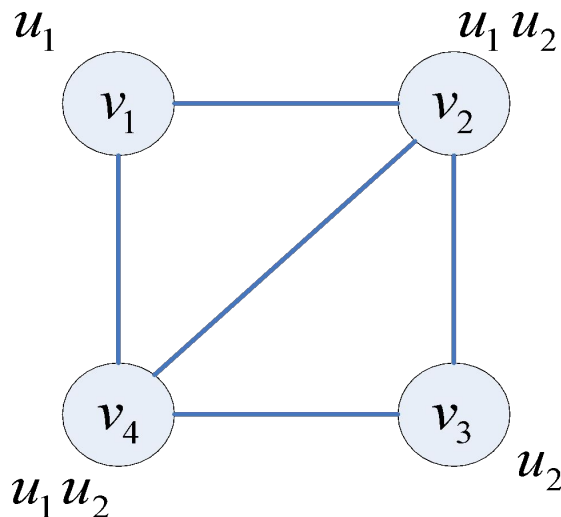
$G_{1,0}$  - тривиальный граф

# типы метаграфов

## ГИПЕРГРАФ (модельный граф)

Сигнатура ( $U$ ) - множество граней, каждая из которых связывает некоторое подмножество вершин. **Грань** — подмножество вершин гиперграфа

$$u \in U \rightarrow u \subseteq V$$



$$G = \langle V, U \rangle$$

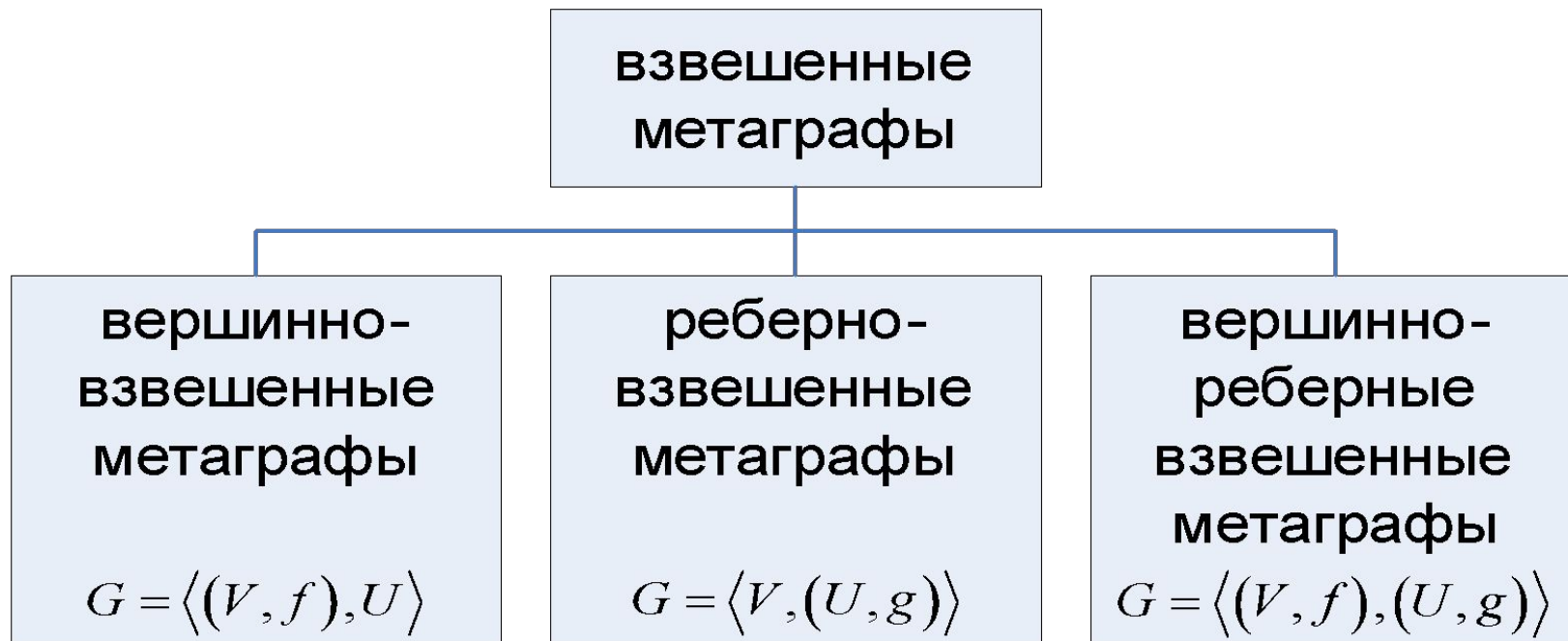
$$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$$

$$U = \{u_1, u_2\}$$

$$u_1 = \{v_1, v_2, v_4\}$$

$$u_2 = \{v_2, v_3, v_4\}$$

# взвешенные метаграфы



$f: V \rightarrow N$  - весовая функция для носителя (вершин)

$g: U \rightarrow K$  - весовая функция для сигнатуры (ребер или дуг)

$N, K$  – некоторые множества (весовые характеристики)

# Локальная структура графа

$(v_i, v_j) \in U$  —  $v_i$  и  $v_j$  — смежны

$u_k = (v_i, v_j)$  —  $u_k$  инцидентно  $v_i$ ,

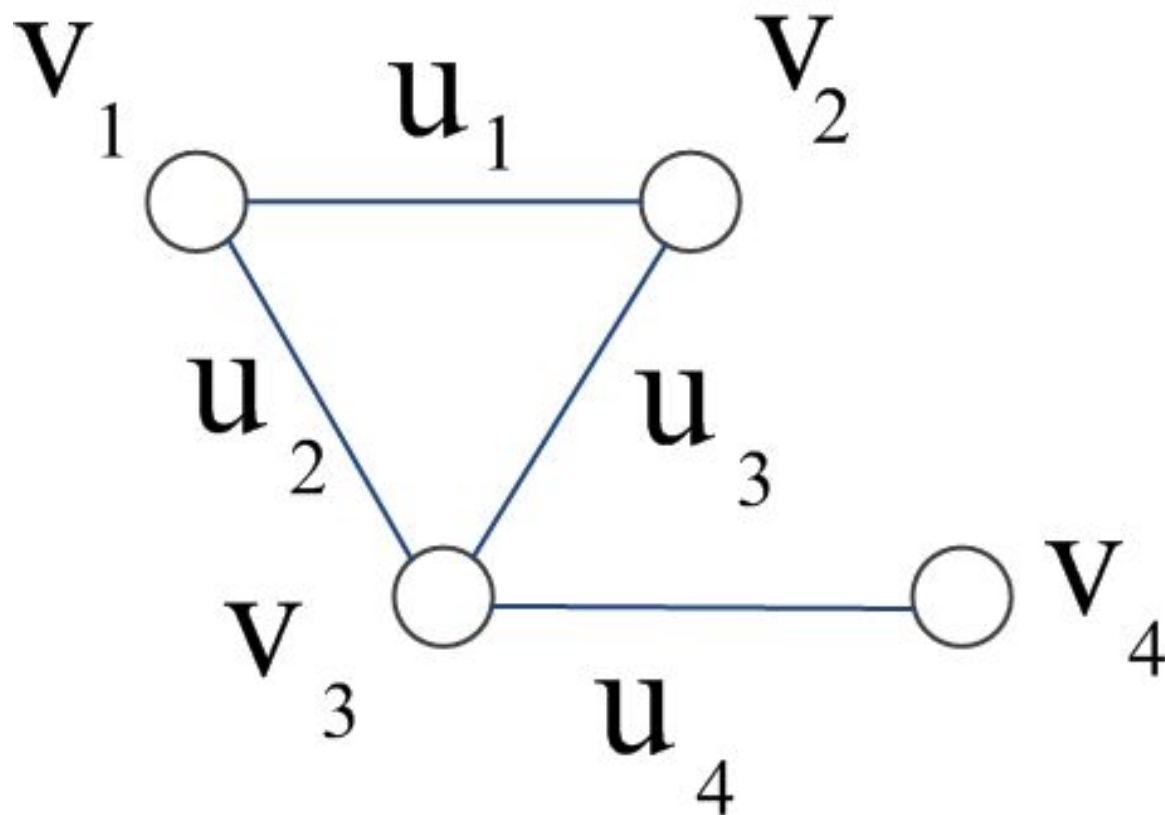
$u_k$  инцидентно  $v_j$ ,  $v_i$  инцидентно  $u_k$

$v_j$  инцидентно  $u_k$

$u_k = (v_i, v_j)$ ,  $u_n = (v_i, v_m)$  —

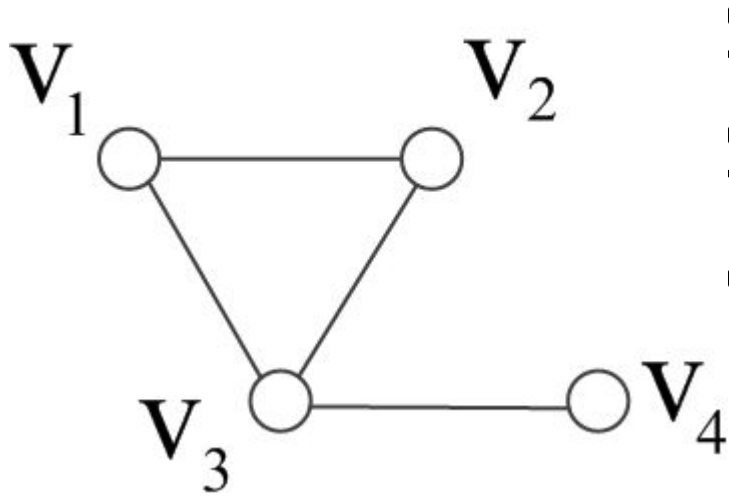
$u_k$  и  $u_n$  — смежны

# Пример



# Степень вершины

Степень вершины ( $d(v_i)$ ) – число рёбер, инцидентных вершине



# Теорема

В любом конечном графе  
число вершин нечётной  
степени чётно.

# Свойства степеней графа

$G_{p,q}$

$$\sum_{i=1}^p d(v_i) = 2q$$

# Степень графа

Степень графа (максимальная степень вершины)

$$\Delta(G) = \max_{v_i \in V} \{d(v_i)\}$$

Минимальная степень вершины графа

$$\delta(G) = \min_{v_i \in V} \{d(v_i)\}$$

# Локальная структура ориентированного графа

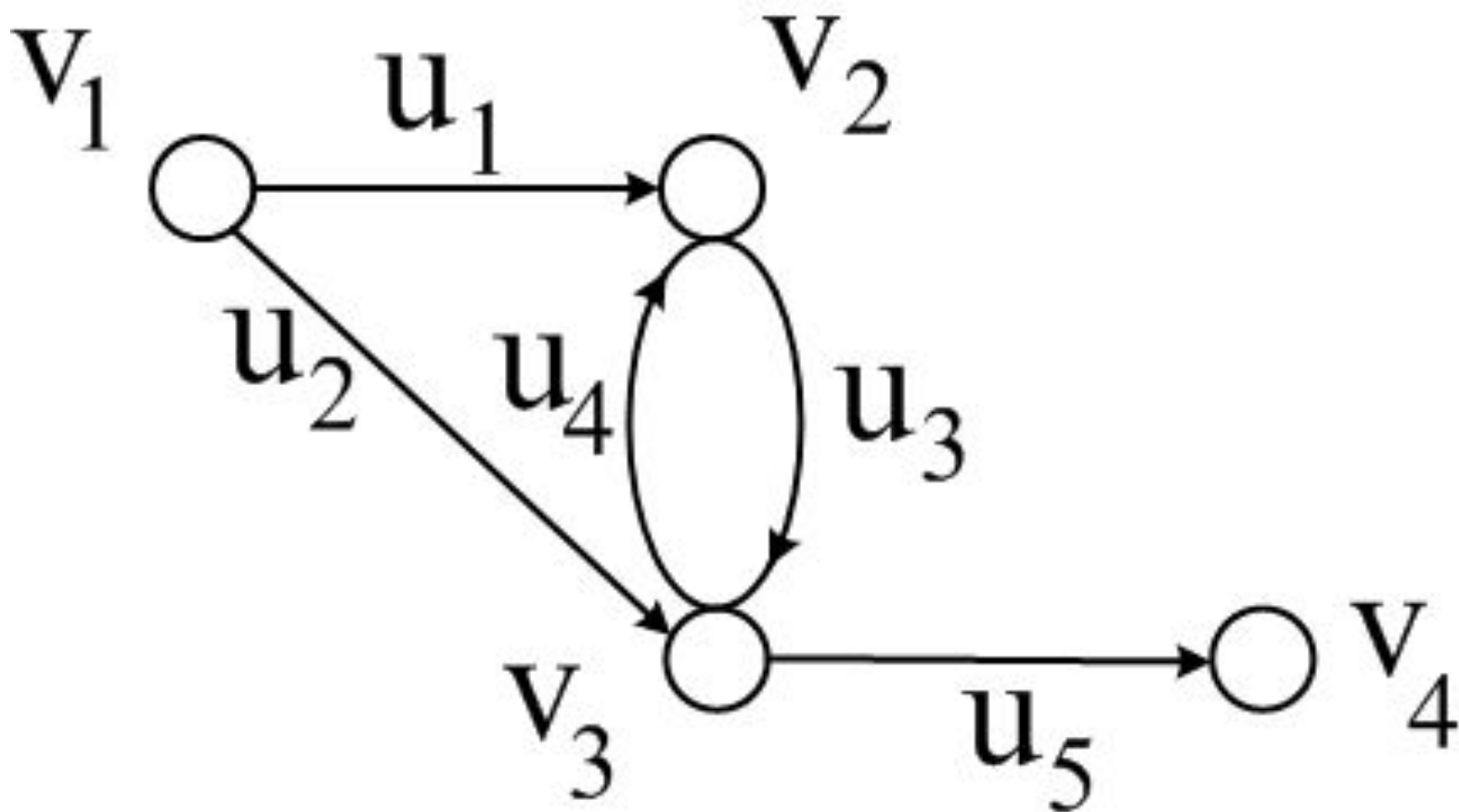
$u_k = (v_i, v_j)$  – дуга  $u_k$  положительно  
инцидентна  $v_i$ ,

дуга  $u_k$  отрицательно инцидентна  $v_j$ ,

$u_k = (v_i, v_j)$ ,  $u_n = (v_i, v_m)$  –

$u_k$  и  $u_n$  – смежны

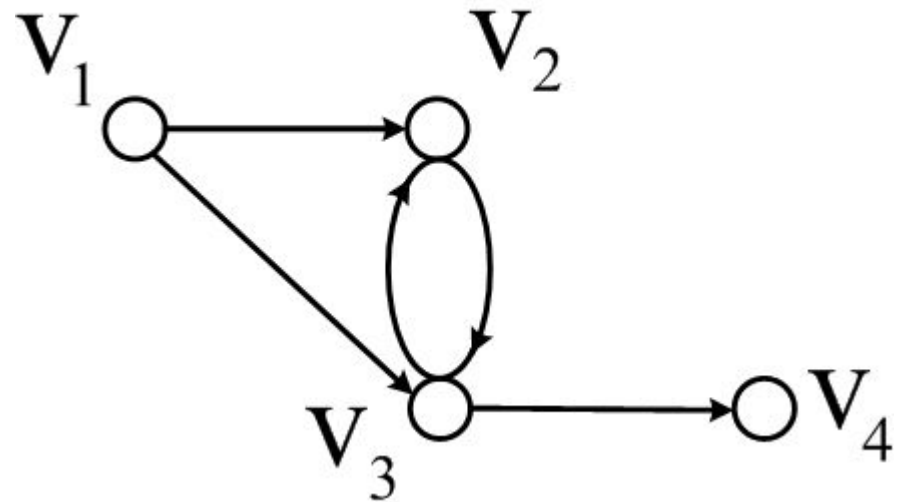
# Пример



# Степени вершин в орграфе

$d^+(v_i)$  — число  
положительно  
инцидентных дуг  
вершины  $v_i$ .

$d^-(v_i)$  — число  
отрицательно  
инцидентных дуг  
вершины  $v_i$ .



$$d^+(v_1) = 2, d^-(v_1) = 0;$$
$$d^+(v_2) = 1, d^-(v_2) = 2.$$

# Свойства степеней орграфа

Для любого ориентированного графа

$$\sum_{v_i \in V} d^+(v_i) = \sum_{v_i \in V} d^-(v_i)$$

# Свойства степеней орграфа

Для любого ориентированного графа

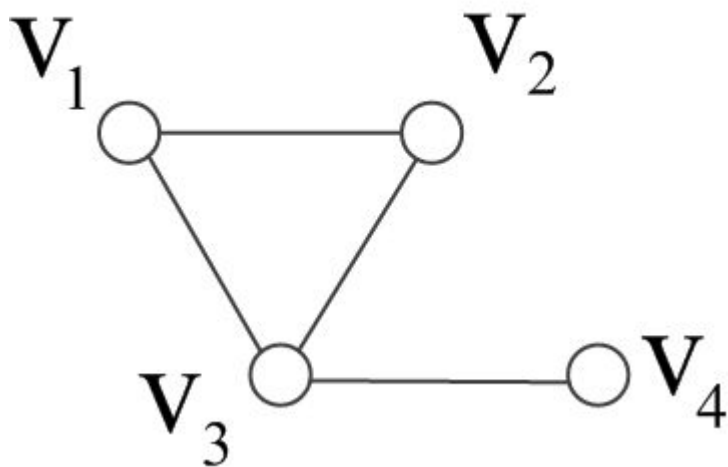
$$\sum_{v_i \in V} (d^+(v_i) + d^-(v_i)) = 2q$$

# Матричное представление графа

Матрица смежности A:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & (v_i, v_j) \in U \\ 0, & (v_i, v_j) \notin U \end{cases}$$

# Пример



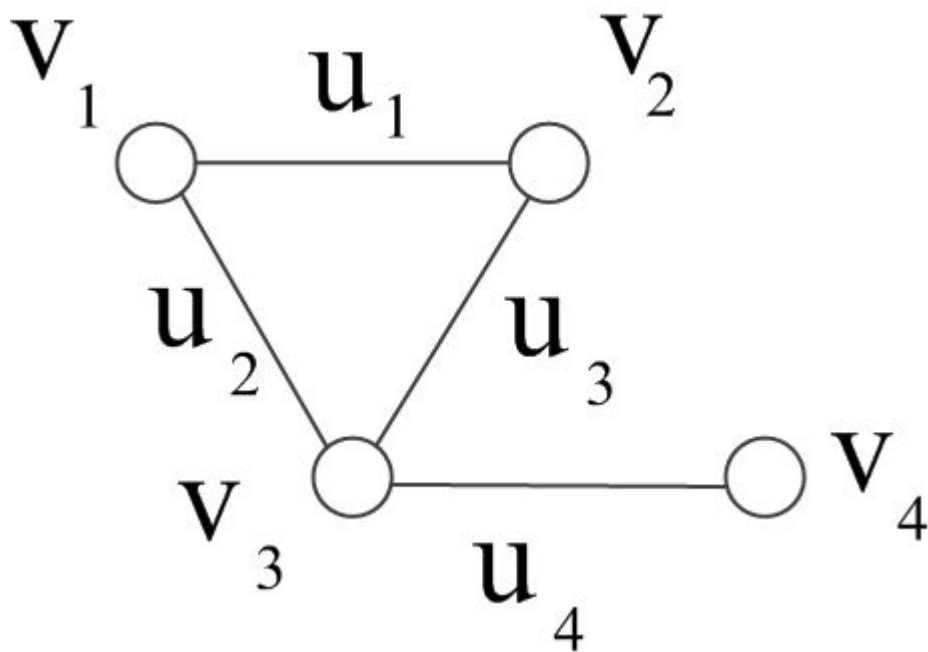
$A =$

|          |          |          |          |
|----------|----------|----------|----------|
| <b>0</b> | <b>1</b> | <b>1</b> | <b>0</b> |
| <b>1</b> | <b>0</b> | <b>1</b> | <b>0</b> |
| <b>1</b> | <b>1</b> | <b>0</b> | <b>1</b> |
| <b>0</b> | <b>0</b> | <b>1</b> | <b>0</b> |

# Матрица инцидентности В

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, & v_i \text{ инцидентно } u_j \\ 0, & v_i \text{ не инцидентно } u_j \end{cases}$$

# Пример



**B=**

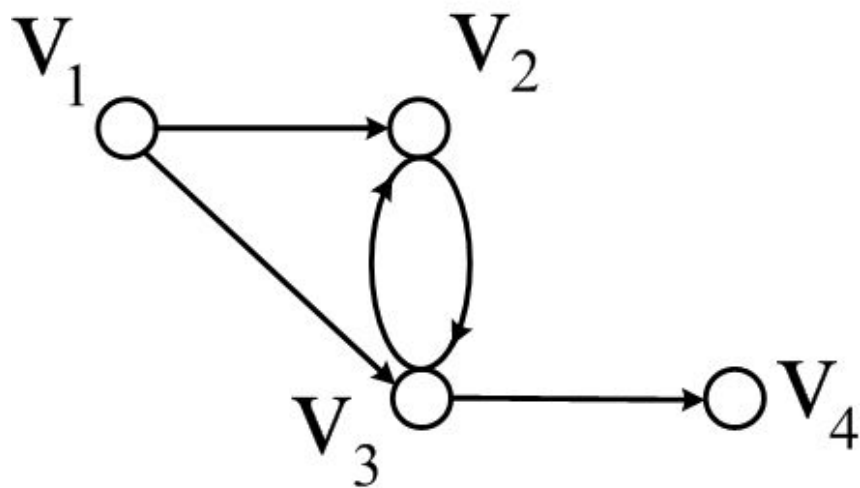
|          |          |          |          |
|----------|----------|----------|----------|
| <b>1</b> | <b>1</b> | <b>0</b> | <b>0</b> |
| <b>1</b> | <b>0</b> | <b>1</b> | <b>0</b> |
| <b>0</b> | <b>1</b> | <b>1</b> | <b>1</b> |
| <b>0</b> | <b>0</b> | <b>0</b> | <b>1</b> |

# Матрица смежности орграфа

A:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & (v_i, v_j) \in U \\ 0, & (v_i, v_j) \notin U \end{cases}$$

# Пример



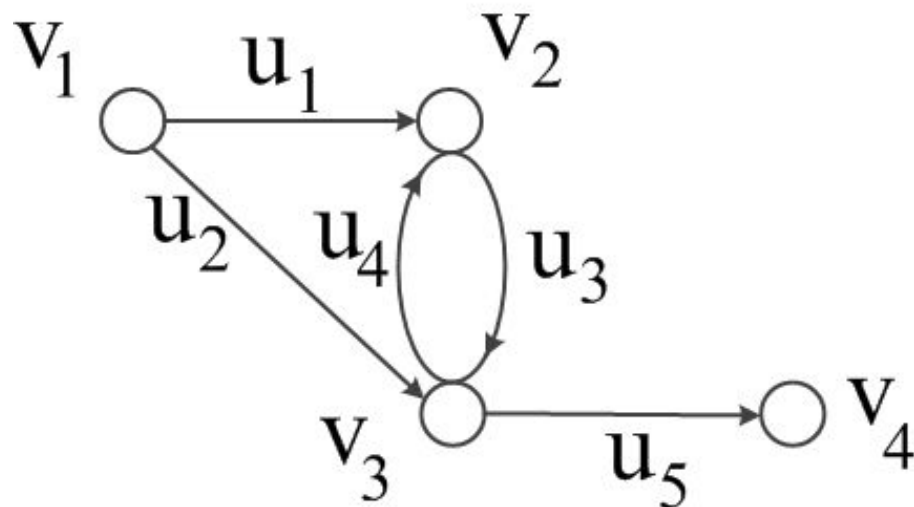
$A =$

|          |          |          |          |
|----------|----------|----------|----------|
| <b>0</b> | <b>1</b> | <b>1</b> | <b>0</b> |
| <b>0</b> | <b>0</b> | <b>1</b> | <b>0</b> |
| <b>0</b> | <b>1</b> | <b>0</b> | <b>1</b> |
| <b>0</b> | <b>0</b> | <b>0</b> | <b>0</b> |

# Матрица инцидентности В

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, u_j = (v_i, v_k) \\ -1, u_j = (v_k, v_i) \\ 0, v_i \text{ не инцидентно } u_j \end{cases}$$

# Пример



**$B =$**

|           |           |           |           |           |
|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| <b>1</b>  | <b>1</b>  | <b>0</b>  | <b>0</b>  | <b>0</b>  |
| <b>-1</b> | <b>0</b>  | <b>1</b>  | <b>-1</b> | <b>0</b>  |
| <b>0</b>  | <b>-1</b> | <b>-1</b> | <b>1</b>  | <b>1</b>  |
| <b>0</b>  | <b>0</b>  | <b>0</b>  | <b>0</b>  | <b>-1</b> |

# Функциональный способ задания графов

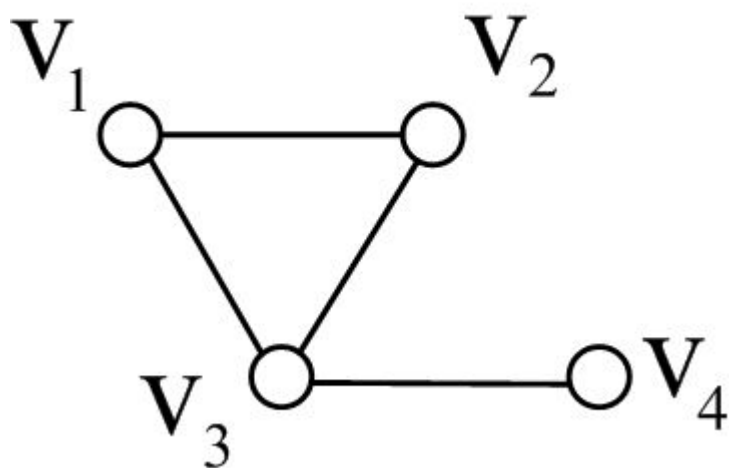
$$G = \langle V, \Gamma \rangle$$

$\Gamma$ - функция окрестности вершин

$$\Gamma: V \rightarrow P(V)$$

$$\Gamma(v) = \{v_i \mid v_i \text{ смежна с } v\}$$

# Пример



$$\Gamma(v_1) = \{v_2, v_3\}$$

$$\Gamma(v_2) = \{v_1, v_3\}$$

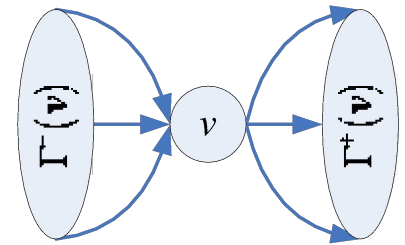
$$\Gamma(v_3) = \{v_1, v_2, v_4\}$$

$$\Gamma(v_4) = \{v_3\}$$

# Функциональный способ задания орграфов

$$G = \langle V, \Gamma^+ \rangle \quad G = \langle V, \Gamma^- \rangle$$

$\Gamma^+$ ,  $\Gamma^-$  - функции положительной и отрицательной полукрестности вершины, соответственно



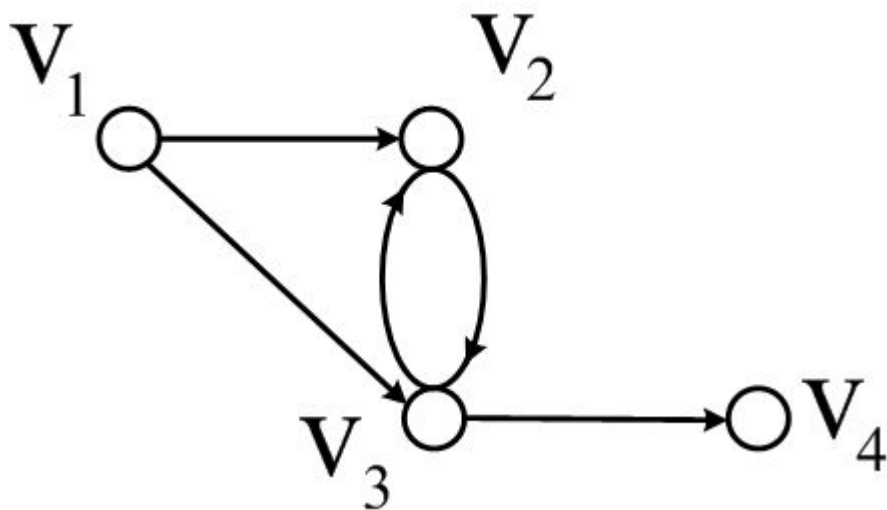
$$\Gamma^+ : V \rightarrow P(V)$$

$$\Gamma^+(v) = \{v_i \mid (v, v_i) \in U\}$$

$$\Gamma^- : V \rightarrow P(V)$$

$$\Gamma^-(v) = \{v_i \mid (v_i, v) \in U\}$$

# Пример



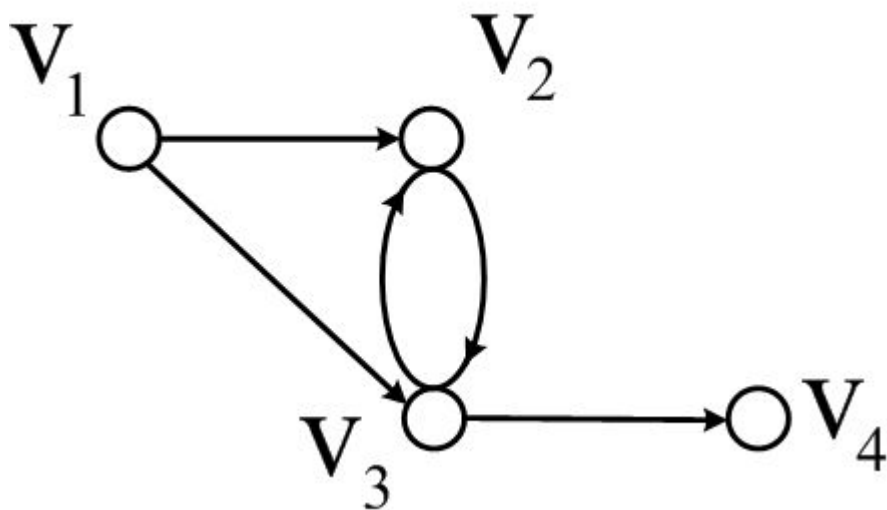
$$\Gamma(v_1)^+ = \{v_2, v_3\}$$

$$\Gamma(v_2)^+ = \{v_3\}$$

$$\Gamma(v_3)^+ = \{v_2, v_4\}$$

$$\Gamma(v_4)^+ = \emptyset$$

# Пример



$$\Gamma(v_1)^- = \emptyset$$

$$\Gamma(v_2)^- = \{v_1, v_3\}$$

$$\Gamma(v_3)^- = \{v_1, v_2\}$$

$$\Gamma(v_4)^- = \{v_3\}$$

# Изоморфизм графов

Графы изоморфны, если  
существует взаимно однозначное  
соответствие между  
множествами вершин,  
сохраняющее отношение  
смежности

# Функциональное задание изоморфизма графов

Два графа  $G_a = \langle V_a, U_a \rangle$  и  $G_b = \langle V_b, U_b \rangle$  **изоморфны**, если существует взаимно однозначная функция

$h: V_a \rightarrow V_b$  такая, что:

1) если  $(v_{a1}, v_{a2}) \in U_a$ , то  $(h(v_{a1}), h(v_{a2})) \in U_b$ ;

2) если  $(v_{b1}, v_{b2}) \in U_b$ , то  $(h^{-1}(v_{b1}), h^{-1}(v_{b2})) \in U_a$ .

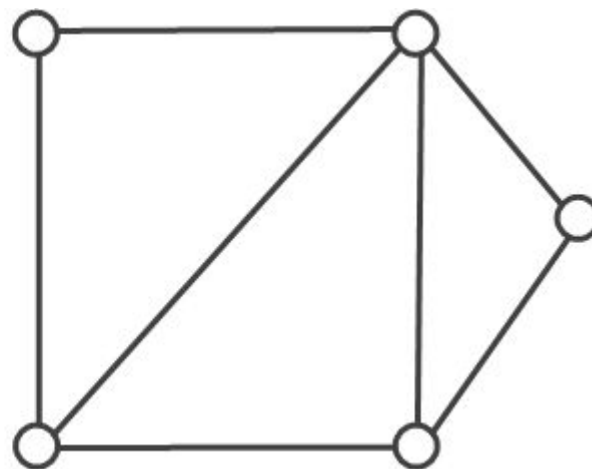
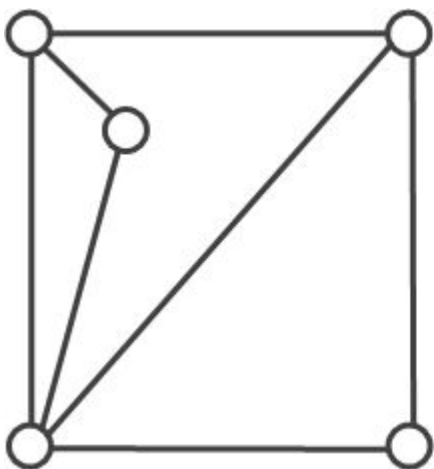
# Свойства изоморфизма

## Отношение

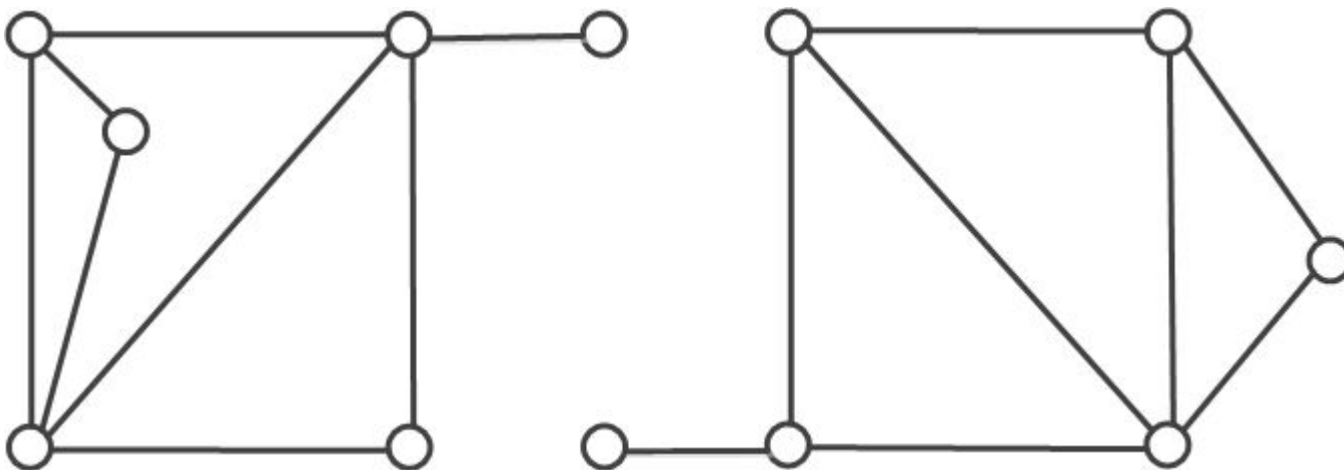
- рефлексивно
- симметрично
- транзитивно

## Эквивалентность

# Пример изоморфных графов



# Пример не изоморфных графов



# Инварианты графа

Количественная или качественная характеристики, неизменные для всех изоморфных между собой графов (орграфов) называется **ИНВАРИАНТОМ**

Поиск полной системы инвариантов графа, задающей граф с точностью до изоморфизма — основная задача теории графов  
*(полная система инвариантов ещё не найдена)*

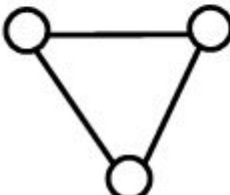
# Полный граф $K_n$

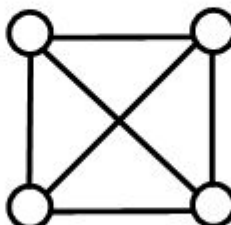
Граф полный, если каждая вершина смежна с каждой.

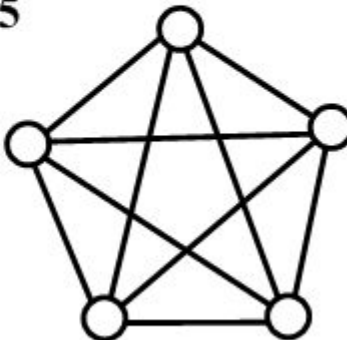
Полный граф с  $n$  вершинами -  $K_n$

$K_1$  

$K_2$  

$K_3$  

$K_4$  

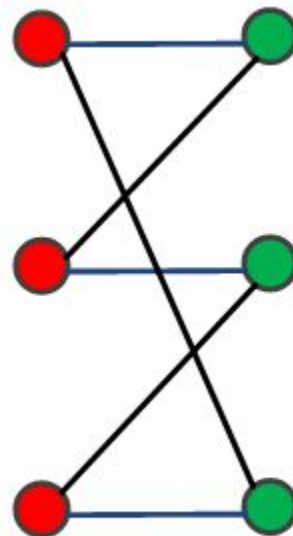
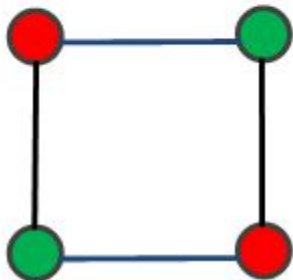
$K_5$  

# Двудольный граф

Граф двудольный, если множество вершин графа можно разбить на два непересекающихся подмножества, в каждом из которых никакая пара вершин не смежна.

$$G = \langle V, U \rangle, \quad V = V_1 \cup V_2, \\ V_1 \cap V_2 = \emptyset, \quad U \subseteq V_1 \times V_2$$

# Двудольные графы. Примеры



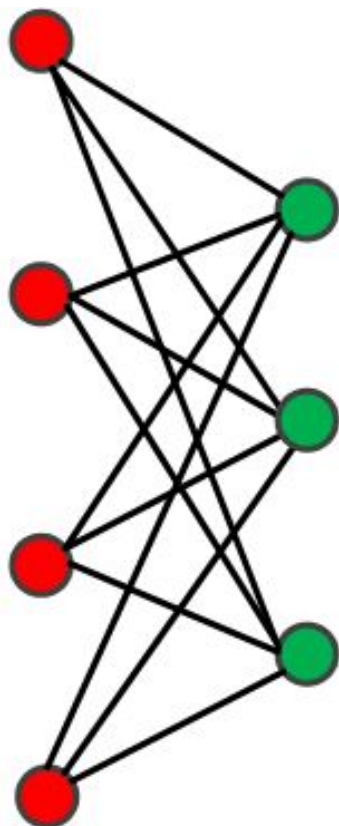
# Полный двудольный граф $K_{m,n}$

$K_{m,n}$  - граф двудольный и каждая вершина из множества  $V_1$  смежна с каждой вершиной из  $V_2$ ,  $|V_1|=m$ ,  $|V_2|=n$ .

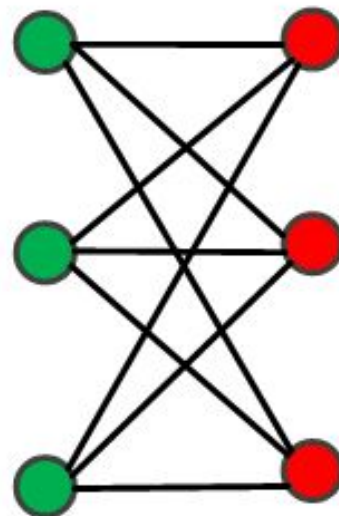
$$G = \langle V, U \rangle, \quad V = V_1 \cup V_2, \quad V_1 \cap V_2 = \emptyset, \\ U = V_1 \times V_2$$

# Полные двудольные графы $K_{m,n}$

$K_{4,3}$



$K_{3,3}$

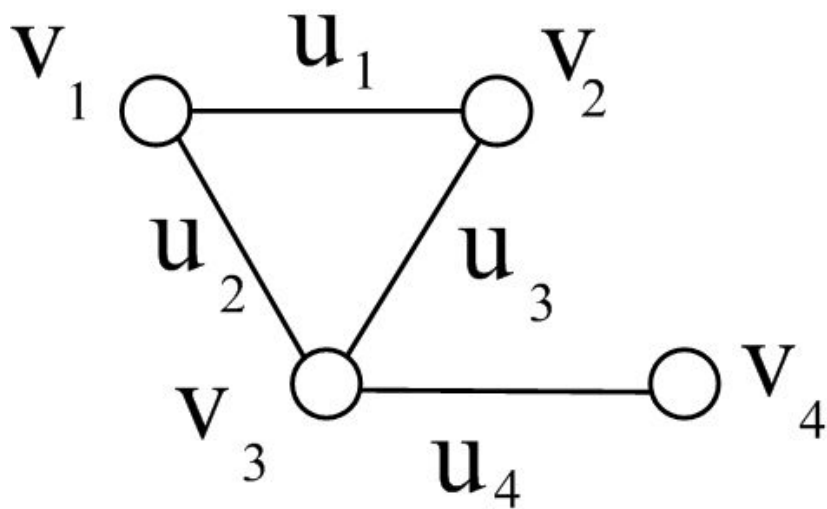


# Операции над графами

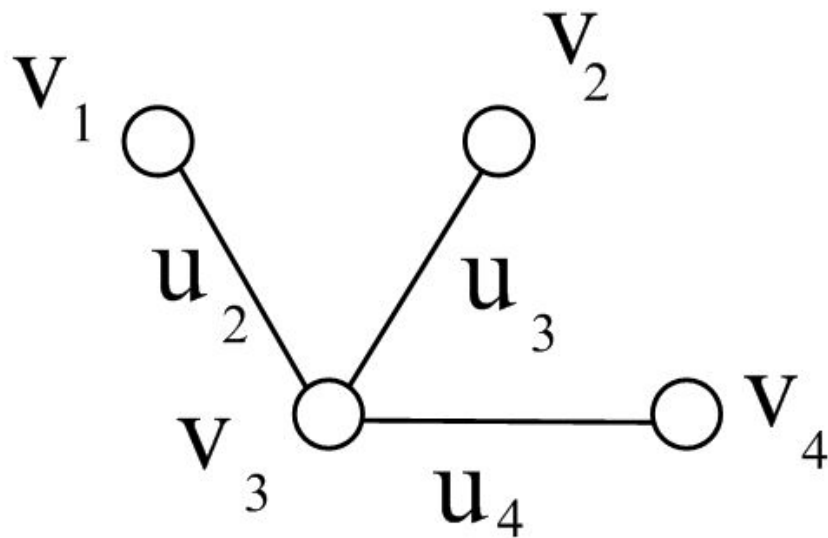
## Удаление ребра

$$G = \langle V, U \rangle, G \setminus u = \langle V, U \setminus \{u\} \rangle$$

$G$



$G \setminus u_1$

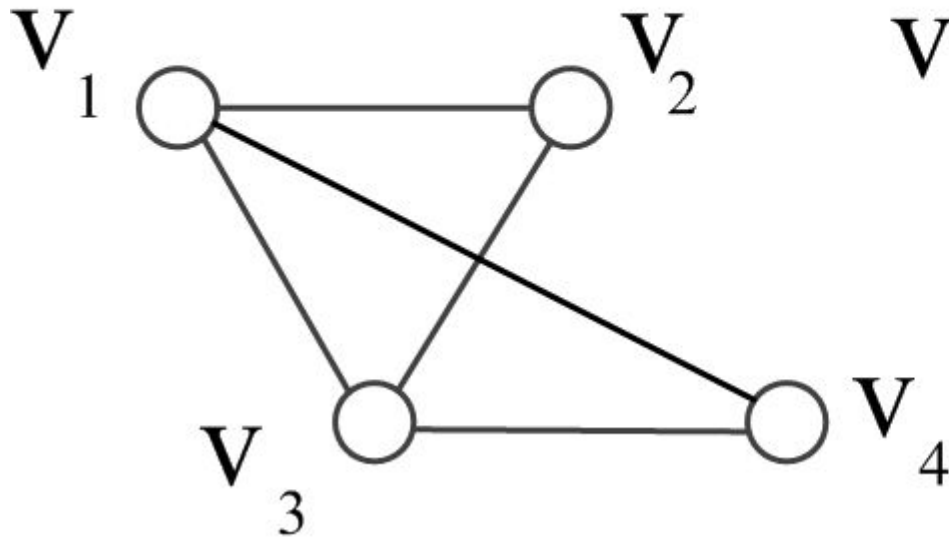


# Удаление вершины

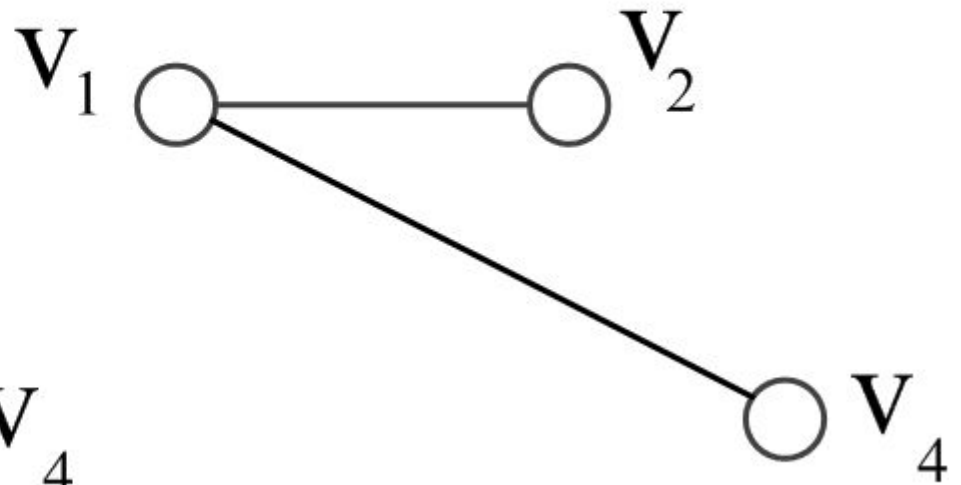
$$G = \langle V, U \rangle, G \setminus v = \langle V', U' \rangle$$

$$V' = V \setminus \{v\}, U' = U \cap (V' \times V')$$

$G$



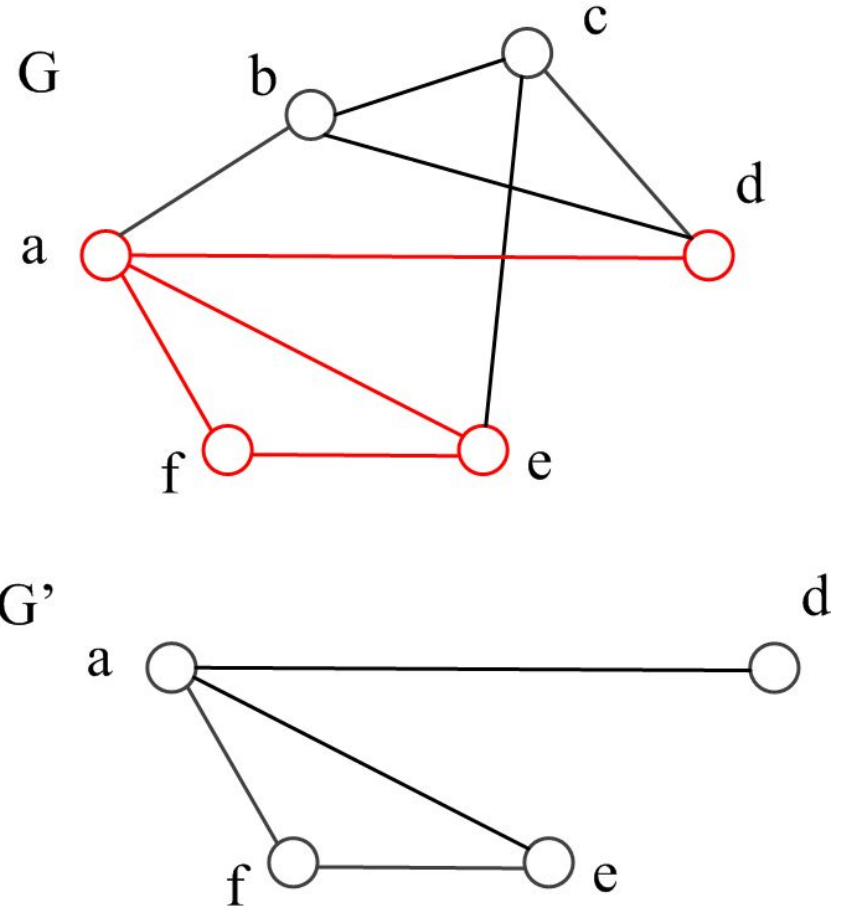
$G \setminus v_3$



# Подграфы

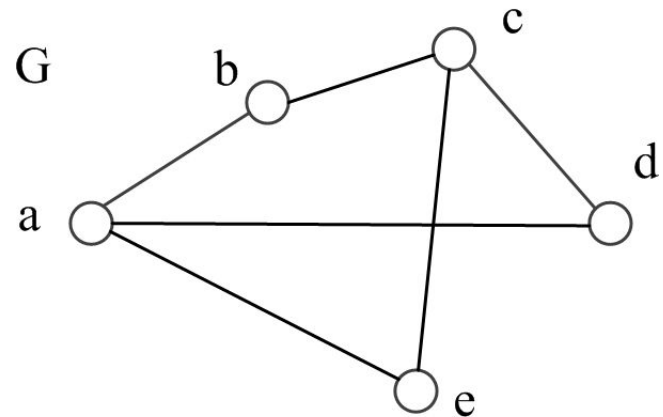
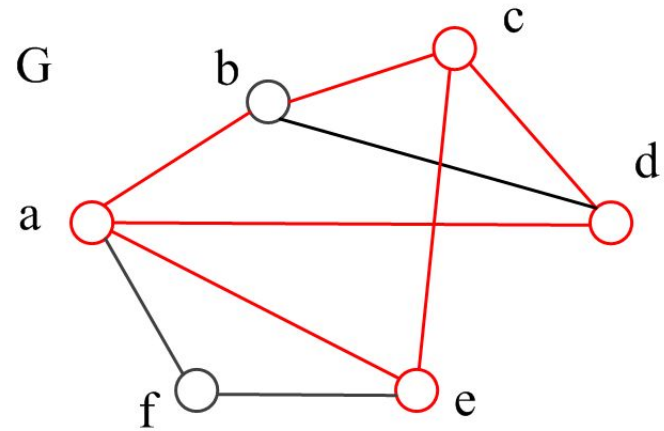
$G' = \langle V', U' \rangle$  -  
**подграф** графа  
 $G = \langle V, U \rangle$ , если  
 $V' \subseteq V$ ,  $U' = U \cap (V' \times V')$

(*порождённый  
подграф*)



# Подграфы

$G' = \langle V', U' \rangle$  -  
частичный  
подграф графа  
 $G = \langle V, U \rangle$ , если  
 $V' \subseteq V, U' \subseteq U \cap$   
 $(V' \times V')$   
(*частичный  
граф, подграф*)



# Дополнение графа

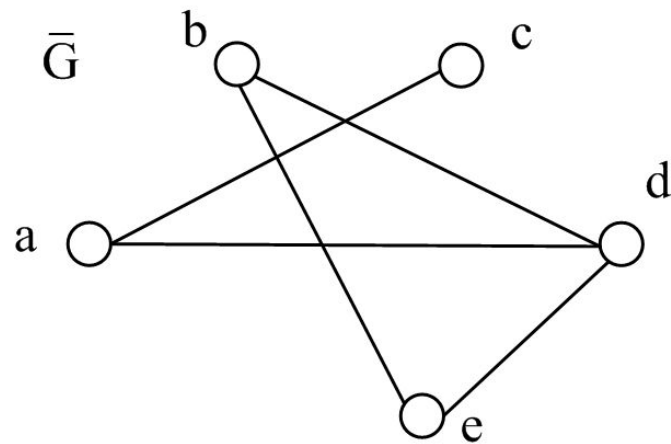
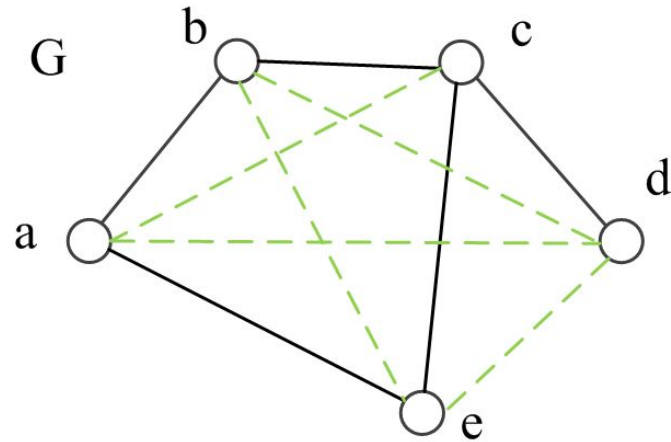
$\bar{G} = \langle V, U' \rangle$  -

дополнение

графа  $G = \langle V, U \rangle$ ,

если

$U' = ((V \times V) \setminus U) \setminus I$



# Самодополнительные графы

Граф, изоморфный своему  
дополнению - самодополнительный

