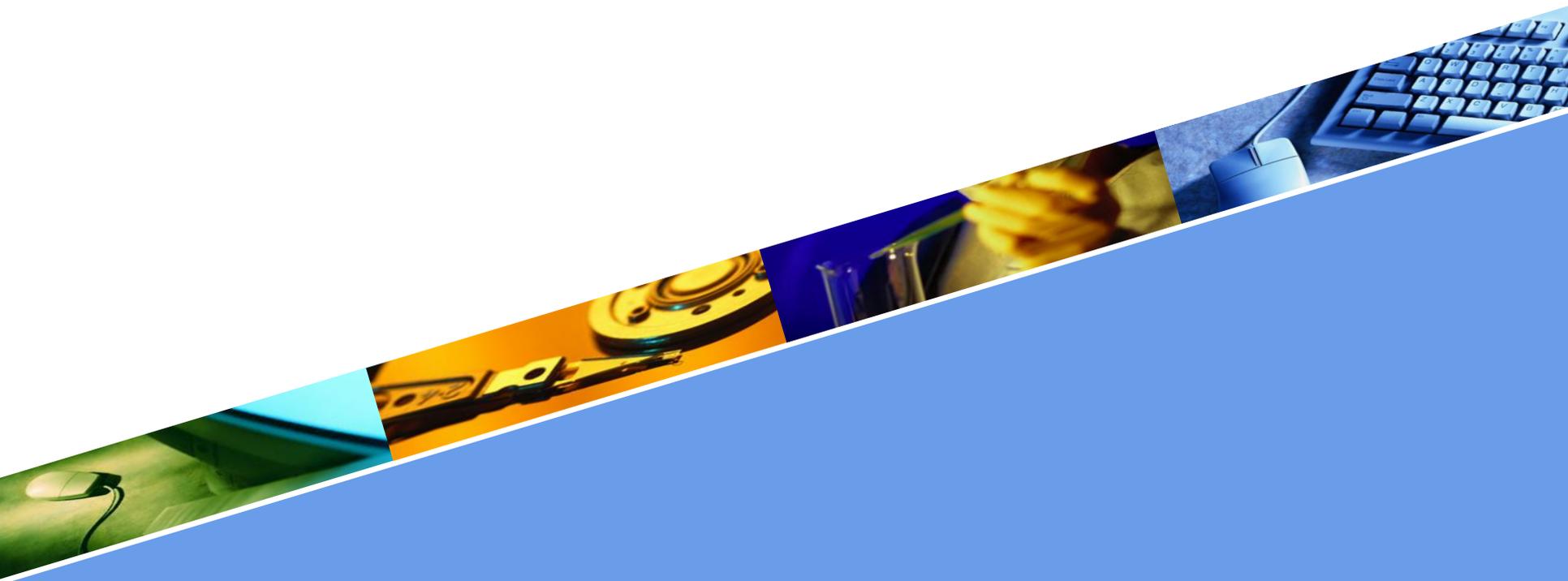


Определение машины Тьюринга





Машина Тьюринга – это строгое математическое построение, математический аппарат, созданный для решения определённых задач.



Машина Тьюринга – абстрактный исполнитель, осуществляющий алгоритмический процесс, созданный для уточнения понятия алгоритма.

Это математический объект, а не физическая машина.

Предложена Аланом Тьюрингом в 1936 году

Структура и описание машины Тьюринга



Машина Тьюринга состоит из:

- бесконечной ленты, разделенной на ячейки;
- каретки (читающей и записывающей головки);
- программируемого автомата (программа в виде таблицы).

Автомат каждый раз “видит” только одну ячейку. В зависимости от того, какую букву он видит, а также в зависимости от своего состояния q автомат может выполнять **следующие действия**:

- ✓ записать новую букву в обозреваемую ячейку;
- ✓ выполнить сдвиг по ленте на одну ячейку вправо/влево или остаться неподвижным;
- ✓ перейти в новое состояние.

Устройство машины Тьюринга



1) Внешний алфавит

$$A = \{a_0, a_1, \dots, a_n\}$$

Элемент a_0 называется **пустой символ** или **пустая буква** (признак того, что ячейка пуста).

В этом алфавите в виде слова кодируется исходный набор данных и результат работы алгоритма.



Устройство машины Тьюринга

2) Внутренний алфавит

$$Q = \{q_0, q_1, \dots, q_m\}, \{П, Л, С\}$$



В любой момент времени машина Тьюринга находится в одном из состояний q_0, q_1, \dots, q_m

При этом: q_1 - начальное состояние (машина начинает работу)

q_0 - заключительное состояние (машина закончила работу)

Символы $\{П, Л, С\}$ – символы сдвига (вправо, влево, на месте)

Устройство машины Тьюринга

3) Внешняя память (лента)

Машина имеет ленту, разбитую на ячейки, в каждую из которых может быть записана только одна буква

a_0	a_2	a_1	a_5	a_3	a_0
-------	-------	-------	-------	-------	-------



Устройство машины Тьюринга



3) Внешняя память (лента)

a_0	a_2	a_1	a_5	a_3	a_0
-------	-------	-------	-------	-------	-------

Пустая клетка содержит a_0 .

В каждый момент времени на ленте записано конечное число непустых букв



Лента является конечной, но дополняется в любой момент ячейками слева и справа для записи новых непустых символов.

Это соответствует принципу абстракции потенциальной осуществимости

Устройство машины Тьюринга

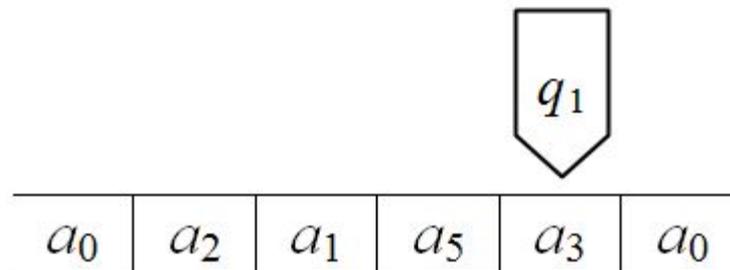


4) Каретка (управляющая головка)



Каретка машины располагается над некоторой ячейкой ленты – воспринимает символ, записанный в ячейке

В одном такте работы каретка сдвигается на одну ячейку (вправо, влево) или остается на месте



Устройство машины Тьюринга



5) Функциональная схема (программа)



Программа машины состоит из команд:

$$q_i a_j \rightarrow q_k a_l X, \quad X \in \{\Pi, Л, С\}$$
$$i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, n}$$
$$k = \overline{1, m}, \quad l = \overline{1, n}$$

Для каждой пары (q_i, a_j) программа машины должна содержать одну команду (детерминированная машина Тьюринга)

Описание работы машины Тьюринга

К началу работы машины на ленту подается исходный набор данных в виде слова α



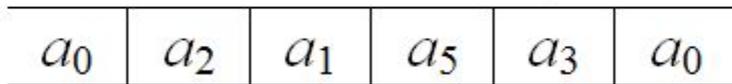
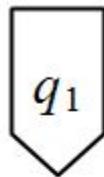
Будем говорить, что непустое слово α в алфавите $A \setminus \{a_0\} = \{a_1, \dots, a_n\}$ воспринимается машиной в **стандартном положении**, если:

- оно задано в последовательных ячейках ленты,
- все другие ячейки пусты,
- машина обзревает крайнюю правую ячейку из тех, в которых записано слово α

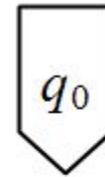
Описание работы машины Тьюринга



Стандартное положение называется **начальным (заключительным)**, если машина, воспринимающая слово в стандартном положении, находится в начальном состоянии q_1 (стоп-состоянии q_0)



начальное стандартное



заключительное стандартное

Описание работы машины Тьюринга



Находясь в не заключительном состоянии, машина совершает шаг, который определяется текущим состоянием q_i и обозреваемым символом a_j

Описание работы машины Тьюринга



В соответствии с командой $q_i a_j \rightarrow q_k a_l X$ выполняются следующие действия:



1) Содержимое обозреваемой ячейки a_j стирается и в нее записывается символ a_l (который может совпадать с a_j)

2) Машина переходит в новое состояние q_k (оно может совпадать с состоянием q_i)

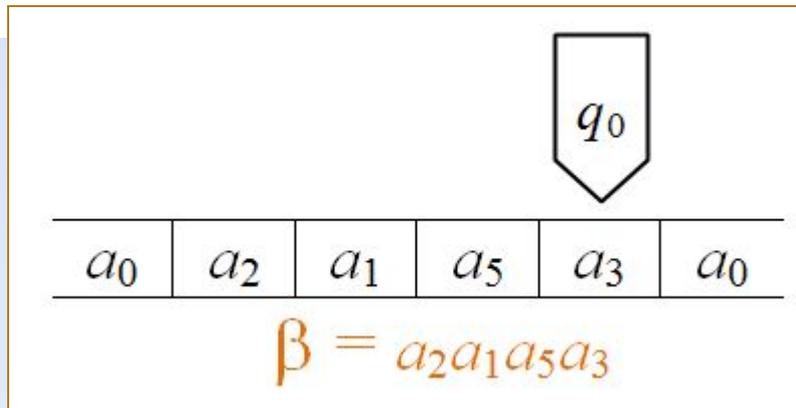
3) Каретка перемещается в соответствии с управляемым символом $X \in \{\Pi, Л, С\}$

Описание работы машины Тьюринга



При переходе машины в заключительное состояние q_0 ее работа прекращается

На ленте записан результат работы алгоритма – слово β в алфавите $A \setminus \{a_0\}$



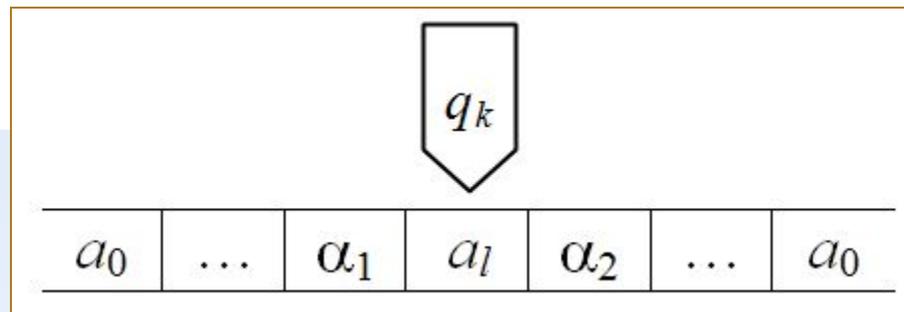


Машинным словом (конфигурацией) машины Тьюринга называется слово вида $\alpha_1 q_k a_l \alpha_2$, где α_1 и α_2 - слова в алфавите A .



Конфигурация $\alpha_1 q_k a_l \alpha_2$ интерпретируется следующим образом:

- машина находится в состоянии q_k
- каретка обозревает на ленте символ a_l
- α_1 и α_2 – это содержимое ленты до и после символа a_l



Применение машин Тьюринга к словам

Пример 1. Дана машина Тьюринга с внешним алфавитом

$A = \{0, 1\}$ (здесь 0 - символ пустой ячейки), алфавитом внутренних

состояний $Q = \{q_0, q_1, q_2\}$ и со следующей функциональной схемой (программой):

$$q_1 0 \rightarrow q_2 0 \Pi, \quad q_2 0 \rightarrow q_0 1, \quad q_1 1 \rightarrow q_1 1 \Pi, \quad q_2 1 \rightarrow q_2 1 \Pi.$$

Посмотрим, в какое слово переработает эта машина слово 101, исходя из стандартного начального положения. Будем последовательно выписывать конфигурации машины при переработке ею этого слова. Имеем стандартное начальное положение:

$$(1) \quad \begin{array}{c} q_1 \\ \hline \quad \quad \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad \quad \quad \quad \quad \end{array}$$

На первом шаге действует команда: $q_1 1 \rightarrow q_1 1 \Pi$. В результате на машине создается следующая конфигурация:

$$(2) \quad \begin{array}{c} q_1 \\ \hline \quad \quad \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad \quad \quad \quad \quad \end{array}$$

На втором шаге действует команда: $q_1 0 \rightarrow q_2 0 \Pi$ и на машине создаётся конфигурация:

$$(3) \quad \begin{array}{c} q_2 \\ \hline \quad \quad \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad \quad \quad \quad \quad \end{array}$$

Наконец, третий шаг обусловлен командой: $q_2 0 \rightarrow q_0 1$. В результате него создаётся конфигурация:

$$(4) \quad \begin{array}{c} q_2 \\ \hline \quad \quad \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad \quad \quad \quad \quad \end{array}$$

Виды команд машины Тьюринга



1. Написать новую букву в обозреваемую ячейку
2. Выполнить сдвиг по ленте на одну ячейку вправо/влево или остаться на месте (П, Л, С)
3. Перейти в новое состояние.

	1	1	1	*	1	1	
--	---	---	---	---	---	---	--

	a_0	a_1	...	a_i	...	a_j
q_0	Указание о смене символа					
q_1						
...				$a_k \{ЛПС\} q_m$		
q_i						
...	Указание о сдвиге каретки				Указание о смене внутреннего состояния	
q_j						

Пример работы машины Тьюринга

Последовательность выполнения команд для частного случая

Изменения на ленте

	#	S	0	1	⊔
q ₁	0 →	0 →	→	→	q ₀

В ячейке 1.

Не менять символ, сдвинуться вправо, не менять состояние.

	#	S	0	1	⊔
q ₁	0 →	0 →	→	→	q ₀

В ячейке #.

Записать ноль, сдвинуться вправо, не менять состояние.

	#	S	0	1	⊔
q ₁	0 →	0 →	→	→	q ₀

В ячейке S.

Записать ноль, сдвинуться вправо, не менять состояние.

	#	S	0	1	⊔
q ₁	0 →	0 →	→	→	q ₀

В ячейке 1.

Не менять символ, сдвинуться вправо, не менять состояние.

	#	S	0	1	⊔
q ₁	0 →	0 →	→	→	q ₀

В ячейке 0.

Не менять символ, сдвинуться вправо, не менять состояние.

	#	S	0	1	⊔
q ₁	0 →	0 →	→	→	q ₀

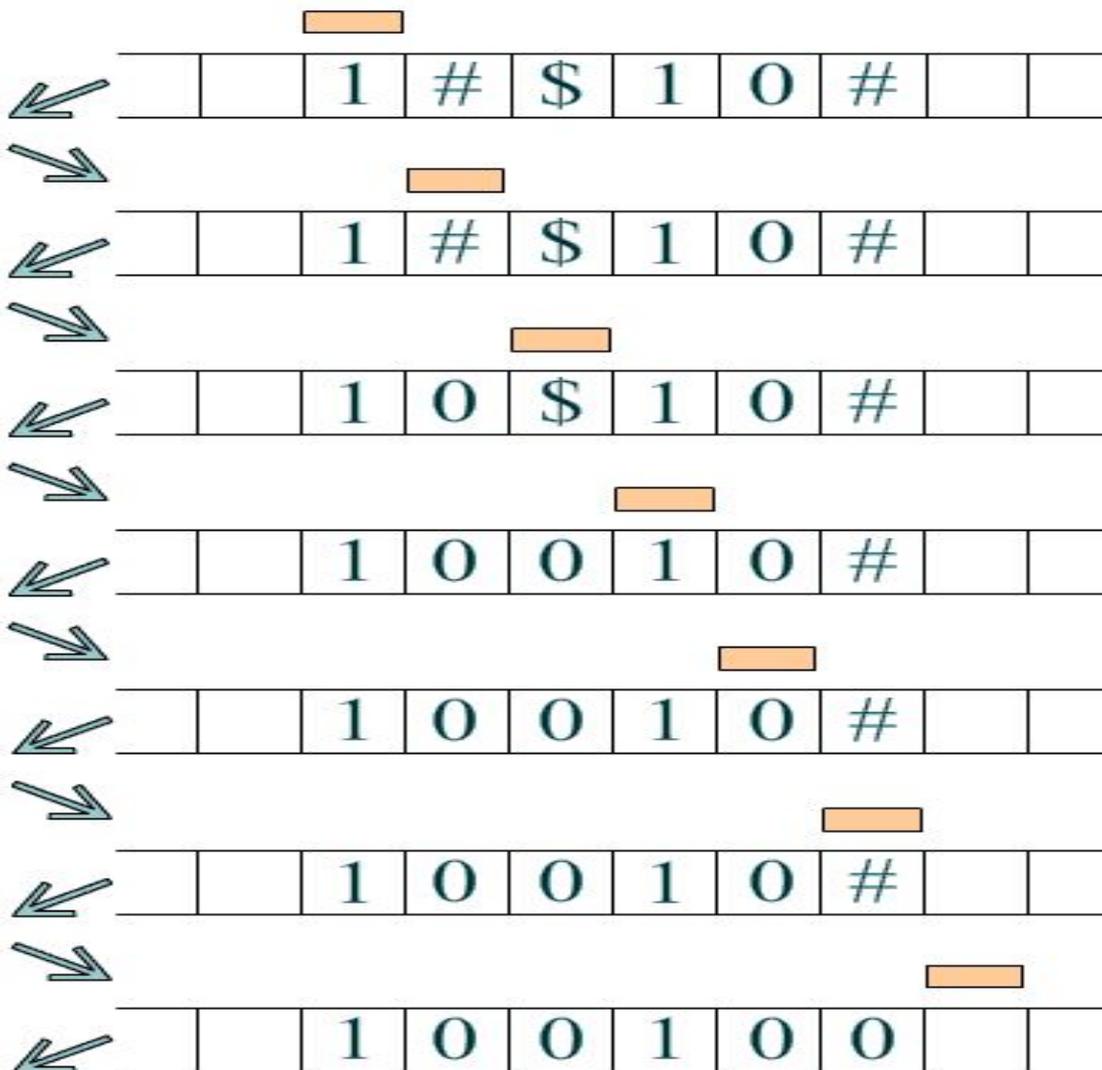
В ячейке #.

Записать ноль, сдвинуться вправо, не менять состояние.

	#	S	0	1	⊔
q ₁	0 →	0 →	→	→	q ₀

В ячейке пустота.

Ничего не записывать, стоять на месте, перейти в состояние **останова**.





Пример

Дана машина Тьюринга с внешним алфавитом $A = \{a_0, 1, * \}$, алфавитом внутренних состояний $Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3\}$, и следующей функциональной схемой:

	q_1	q_2	q_3
a_0		$q_3 1 \Pi$	$q_1 a_0 \text{Л}$
1	$q_2 a_0 \text{Л}$	$q_2 1 \text{Л}$	$q_3 1 \Pi$
*	$q_0 a_0 \text{С}$	$q_2 * \text{Л}$	$q_3 * \Pi$

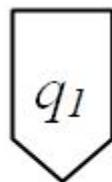
Применить машину Тьюринга к слову $\alpha = 11^*1$, начиная со стандартного начального положения



Решение

	q_1	q_2	q_3
a_0		$q_3 1 \Pi$	$q_1 a_0 \text{Л}$
1	$q_2 a_0 \text{Л}$	$q_2 1 \text{Л}$	$q_3 1 \Pi$
*	$q_0 a_0 \text{С}$	$q_2^* \text{Л}$	$q_3^* \Pi$

1)



a_0	1	1	*	1	a_0
-------	---	---	---	---	-------

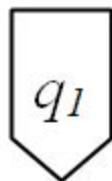
$$q_1 1 \rightarrow q_2 a_0 \text{Л}$$



Решение

	q_1	q_2	q_3
a_0		$q_3 1 \Pi$	$q_1 a_0 \text{Л}$
1	$q_2 a_0 \text{Л}$	$q_2 1 \text{Л}$	$q_3 1 \Pi$
*	$q_0 a_0 \text{С}$	$q_2^* \text{Л}$	$q_3^* \Pi$

1)



a_0	1	1	*	1	a_0
-------	---	---	---	---	-------

$$q_1 1 \rightarrow q_2 a_0 \text{Л}$$

1) Заменяем содержимое обозреваемой ячейки 1 на a_0

2)

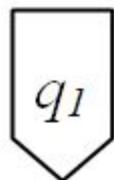
a_0	1	1	*	a_0	a_0
-------	---	---	---	-------	-------



Решение

	q_1	q_2	q_3
a_0		$q_3 1 \Pi$	$q_1 a_0 \text{Л}$
1	$q_2 a_0 \text{Л}$	$q_2 1 \text{Л}$	$q_3 1 \Pi$
*	$q_0 a_0 \text{С}$	$q_2^* \text{Л}$	$q_3^* \Pi$

1)



a_0	1	1	*	1	a_0
-------	---	---	---	---	-------

$$q_1 1 \rightarrow q_2 a_0 \text{Л}$$

2) Машина переходит в новое состояние q_2

2)



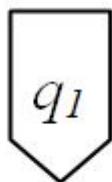
a_0	1	1	*	a_0	a_0
-------	---	---	---	-------	-------



Решение

	q_1	q_2	q_3
a_0		$q_3 1\Pi$	$q_1 a_0 \text{Л}$
1	$q_2 a_0 \text{Л}$	$q_2 1 \text{Л}$	$q_3 1\Pi$
*	$q_0 a_0 \text{С}$	$q_2^* \text{Л}$	$q_3^* \Pi$

1)

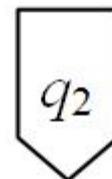


a_0	1	1	*	1	a_0
-------	---	---	---	---	-------

$$q_1 1 \rightarrow q_2 a_0 \text{Л}$$

3) Каретка перемещается влево

2)



a_0	1	1	*	a_0	a_0
-------	---	---	---	-------	-------

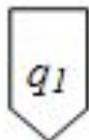


Решение

Полное подробное решение

	q_1	q_2	q_3
a_0		$q_3 1 \Pi$	$q_1 a_0 \text{Л}$
1	$q_2 a_0 \text{Л}$	$q_2 1 \text{Л}$	$q_3 1 \Pi$
*	$q_0 a_0 \text{С}$	$q_2^* \text{Л}$	$q_3^* \Pi$

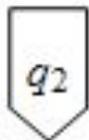
1)



a_0	1	1	*	1	a_0
-------	---	---	---	---	-------

$$q_1 1 \rightarrow q_2 a_0 \text{Л}$$

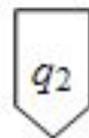
2)



a_0	1	1	*	a_0	a_0
-------	---	---	---	-------	-------

$$q_2 * \rightarrow q_2^* \text{Л}$$

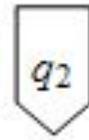
3)



a_0	1	1	*	a_0	a_0
-------	---	---	---	-------	-------

$$q_2 1 \rightarrow q_2 1 \text{Л}$$

4)



a_0	1	1	*	a_0	a_0
-------	---	---	---	-------	-------

$$q_2 1 \rightarrow q_2 1 \text{Л}$$

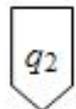


Решение

Полное подробное решение

	q_1	q_2	q_3
a_0		$q_3 1 \Pi$	$q_1 a_0 \Pi$
1	$q_2 a_0 \Pi$	$q_2 1 \Pi$	$q_3 1 \Pi$
*	$q_0 a_0 C$	$q_2^* \Pi$	$q_3^* \Pi$

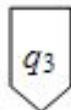
5)



a_0	1	1	*	a_0	a_0
-------	---	---	---	-------	-------

$q_2 a_0 \rightarrow q_3 1 \Pi$

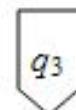
6)



a_0	1	1	1	*	a_0	a_0
-------	---	---	---	---	-------	-------

$q_3 1 \rightarrow q_3 1 \Pi$

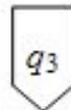
7)



a_0	1	1	1	*	a_0	a_0
-------	---	---	---	---	-------	-------

$q_3 1 \rightarrow q_3 1 \Pi$

8)



a_0	1	1	1	*	a_0	a_0
-------	---	---	---	---	-------	-------

$q_3^* \rightarrow q_3^* \Pi$



Решение

Полное подробное решение

	q_1	q_2	q_3
a_0		$q_3 1\Pi$	$q_1 a_0 \text{Л}$
1	$q_2 a_0 \text{Л}$	$q_2 1 \text{Л}$	$q_3 1\Pi$
*	$q_0 a_0 \text{С}$	$q_2^* \text{Л}$	$q_3^* \Pi$

9)

q_3

a_0	1	1	1	*	a_0	a_0
-------	---	---	---	---	-------	-------

$$q_3 a_0 \rightarrow q_1 a_0 \text{Л}$$

10)

q_1

a_0	1	1	1	*	a_0	a_0
-------	---	---	---	---	-------	-------

$$q_1 * \rightarrow q_0 a_0 \text{С}$$

11)

q_0

a_0	1	1	1	a_0	a_0	a_0
-------	---	---	---	-------	-------	-------

$$\underline{\beta = 111}$$



Решение

	q_1	q_2	q_3
a_0		$q_3 1 \Pi$	$q_1 a_0 \text{Л}$
1	$q_2 a_0 \text{Л}$	$q_2 1 \text{Л}$	$q_3 1 \Pi$
*	$q_0 a_0 \text{С}$	$q_2^* \text{Л}$	$q_3^* \Pi$

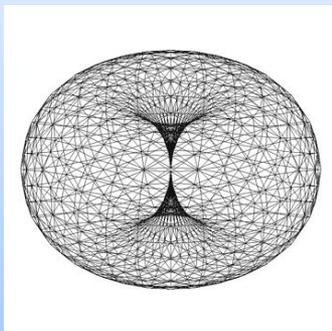
Решение, записанное с помощью конфигураций
(в строчку)

$$\begin{aligned}
 & a_0 1 1 * q_1 1 a_0 \Rightarrow a_0 1 1 q_2 * a_0 \Rightarrow a_0 1 q_2 1 * a_0 \Rightarrow a_0 q_2 1 1 * a_0 \Rightarrow \\
 & \Rightarrow a_0 q_2 a_0 1 1 * a_0 \Rightarrow a_0 1 q_3 1 1 * a_0 \Rightarrow a_0 1 1 q_3 1 * a_0 \Rightarrow \\
 & \Rightarrow a_0 1 1 1 q_3 * a_0 \Rightarrow a_0 1 1 1 * q_3 a_0 \Rightarrow a_0 1 1 1 q_1 * a_0 \Rightarrow a_0 1 1 1 q_0 a_0
 \end{aligned}$$


$$\alpha = 1^*11$$

	q_1	q_2	q_3
a_0		$q_3 1\Pi$	$q_1 a_0 \Pi$
1	$q_2 a_0 \Pi$	$q_2 1 \Pi$	$q_3 1 \Pi$
*	$q_0 a_0 \text{C}$	$q_2^* \Pi$	$q_3^* \Pi$

Ответ: $\beta = 111$



Люди могут вести себя по-разному в одинаковых ситуациях, и этим они принципиально отличаются от машин.

Примеры машин Тьюринга

ПРИМЕР S : Прибавление единицы. Машина Тьюринга задаётся внешним алфавитом $A = \{0, 1\}$ (как и в предыдущих примерах 0 – символ пустой ячейки), алфавитом внутренних состояний $Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3\}$ и программой, записываемой в табличном виде:

A Q	q_1	q_2	q_3
0	$q_2 0\Pi$	$q_3 1$	$q_0 0Л$
1		$q_2 1\Pi$	$q_3 1Л$

Пусть на ленте записано подряд n единиц: $011 \dots 10$ (нули слева и справа – пустые ячейки). Сокращённо данное слово будем записывать так: 01^n0 . Посмотрим, в какое слово будет переработано этой машиной данное слово, начав работу с ближайшего левого нуля, то есть в какую конфигурацию будет переработана конфигурация: q_101^n0 ?

$$q_10 \rightarrow q_20 \text{ П : } \quad 0q_2 \setminus 1 \dots 10 \quad (n \text{ единиц})$$

$$q_21 \rightarrow q_21 \text{ П : } \quad 011 \dots 1q_20 \quad (n \text{ шагов})$$

$$q_20 \rightarrow q_31 : \quad 011 \dots 1q_30 \quad (n \text{ единиц})$$

$$q_31 \rightarrow q_31 \text{ Л : } \quad q_3011 \dots 110 \quad (n + 1 \text{ шагов})$$

$$q_30 \rightarrow q_00 : \quad q_0011 \dots 110 \quad (n + 1 \text{ единиц})$$

Таким образом, машина переработала слово q_101^n0 в слово q_001^{n+1} , т.е. $q_101^n0 \implies q_001^{n+1}$.

ПРИМЕР 2.2.2. А : Перенос нуля. Эта машина осуществляет переработку: $q_1 001^x 0 \Rightarrow q_0 01^x 00$. Она задаётся внешним алфавитом $A = \{0, 1\}$ (как и в предыдущих примерах 0 – символ пустой ячейки), алфавитом внутренних состояний $Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6\}$ и программой, записываемой в виде последовательности команд:

$$q_1 0 \rightarrow q_2 0 \text{ П}$$

$$q_2 0 \rightarrow q_3 1$$

$$q_3 1 \rightarrow q_3 1 \text{ П}$$

$$q_3 0 \rightarrow q_4 0 \text{ Л}$$

$$q_4 1 \rightarrow q_5 0$$

$$q_5 0 \rightarrow q_6 0 \text{ Л}$$

$$q_6 1 \rightarrow q_6 1 \text{ Л}$$

$$q_6 0 \rightarrow q_0 0$$

ПРИМЕР 2.2.3. B^- : Левый сдвиг. Эта машина осуществляет переработку: $01^x q_1 0 \Rightarrow q_0 01^x 0$. Она задаётся внешним алфавитом $A = \{0, 1\}$ (как и в предыдущих примерах 0 – символ пустой ячейки), алфавитом внутренних состояний $Q = \{q_0, q_1, q_2\}$ и программой:

$$q_1 0 \rightarrow q_2 0 \text{ Л}$$

$$q_2 1 \rightarrow q_2 1 \text{ Л}$$

$$q_2 0 \rightarrow q_0 0 .$$

ПРИМЕР 2.2.4. B^+ : Правый сдвиг. Эта машина осуществляет переработку: $q_1 01^x 0 \Rightarrow 01^x q_0 0$. Программа этой машины получается из программы предыдущей машины B^- заменой символа Л символом П.

ПРИМЕР 2.2.5. В : Транспозиция. Эта машина осуществляет переработку: $01^x q_1 01^y 0 \Rightarrow 01^y q_0 01^x 0$. Попробуем объяснить процесс составления (изобретения) программы этой машины Тьюринга.

Сначала слово $01^x q_1 01^y 0$ переводим в слово $01^x q_1^y 00$. При $y > 0$ это достигается следующей программой:

$q_1 0 \rightarrow q_2 0П$	$01^x 0 q_2 1^y 0$
$q_2 1 \rightarrow q_2 1П$	
$q_2 0 \rightarrow q_3 0$	$01^x 0 1^y q_3 0$
$q_3 0 \rightarrow q_4 0Л$	
$q_4 1 \rightarrow q_5 0$	
$q_5 0 \rightarrow q_6 0Л$	
$q_6 1 \rightarrow q_6 1Л$	$01^x q_6 0 1^{y-1} 00$
$q_6 0 \rightarrow q_7 1$	$01^x q_7 1^y 00$

(Обратите внимание на то, что первые три команды представляют собой программу машины \mathbf{B}^+). Чтобы получить слово $01^x q_7 1^y 00$ и при $y = 0$, добавляем команду:

$$q_4 0 \rightarrow q_7 0 \quad 01^x q_7 000.$$

Теперь начинаем процесс переброски единиц из массива 1^x в промежуток между двумя последними нулями. Начнём с одной единицы. Это достигается следующей программой (считаем пока, что $x > 0, y > 0$):

$$\begin{array}{ll} q_7 1 \rightarrow q_8 1 \text{Л} & 01^{x-1} q_8 11^y 00 \\ q_8 1 \rightarrow q_9 0 & 01^{x-1} q_9 01^y 00 \\ q_9 0 \rightarrow q_{10} 0 \text{П} & 01^{x-1} 0 q_{10} 1^y 00 \\ q_{10} 1 \rightarrow q_{10} 1 \text{П} & 01^{x-1} 01^y q_{10} 00 \\ q_{10} 0 \rightarrow q_{11} 1 & 01^{x-1} 01^y q_{11} 10 \\ q_{11} 1 \rightarrow q_{12} 1 \text{Л} & 01^{x-1} 01^{y-1} q_{12} 110 \end{array}$$

$$q_{12}1 \rightarrow q_{13}0$$

$$01^{x-1}01^{y-1}q_{13}010$$

$$q_{13}0 \rightarrow q_{14}0Л$$

$$01^{x-1}01^{y-2}q_{14}1010$$

$$q_{14}1 \rightarrow q_{14}1Л$$

$$01^{x-1}q_{14}01^{y-1}010$$

$$q_{14}0 \rightarrow q_{15}1$$

$$01^{x-1}q_{15}1^y010$$

Чтобы достичь тот же результат и при $y = 0$, добавляем к записанной программе следующие команды:

$$q_70 \rightarrow q_{16}1$$

$$01^xq_{16}10$$

$$q_{16}1 \rightarrow q_{17}1Л$$

$$01^{x-1}q_{17}110$$

$$q_{17}1 \rightarrow q_{15}0$$

$$01^{x-1}q_{15}010.$$

Теперь мы должны переносить следующую единицу из оставшегося массива 1^{x-1} вправо и также вставлять её между двумя нулями. Для этого мы "заикливаем" программу следующими командами:

$$q_{15}1 \rightarrow q_71$$

$$q_{15}0 \rightarrow q_70$$

$$01^{x-1}q_71^y010.$$

Если $x - 1 > 0$, то на следующем круге слово $01^{x-1}q_71^y010$ перерабатывается в слово $01^{x-2}q_71^y0110$. Если $x - 2 > 0$, то получим слово $01^{x-3}q_71^y01110$ и т.д. Через x циклов получим слово $0q_71^y01^x0$. Далее, если $y > 0$, то это слово перейдёт в слово $q_801^y01^x0$; если $y = 0$, то оно перейдёт в слово $q_{17}011^x0$. Чтобы получить требуемое, остаётся добавить следующие команды:

$$q_80 \rightarrow q_{18}0П$$

$$q_{18}1 \rightarrow q_{18}1П$$

$$q_{18}0 \rightarrow q_00$$

$$01^yq_001^x0 \quad (y > 0)$$

$$q_{17}0 \rightarrow q_{19}0П$$

$$q_{19}1 \rightarrow q_00$$

$$0q_001^x0 \quad (y = 0).$$

ПРИМЕР 2.2.6. Г : Удвоение. Эта машина осуществляет переработку: $q_1 01^x 0^{x+3} \Rightarrow q_0 01^x 01^x 00$. Попробуем и здесь объяснить процесс составления программы машины Тьюринга. Начнём с команд:

$$q_1 0 \rightarrow q_2 0\Pi$$

$$q_2 1 \rightarrow q_2 1\Pi$$

$$01^x q_2 0$$

Представим полученное слово $01^x q_2 0$ в виде $01^x q_2 00^0 00^0 0^{x+1}$ и далее пишем программу, которая при $x - i > 0$ переводит слово $01^{x-i} q_2 01^i 01^i 0$ в слово $01^{x-(i+1)} q_0 1 01^{i+1} 01^{i+1}$. Вот она:

$$q_2 0 \rightarrow q_3 0Л$$

$$01^{x-(i+1)} q_3 1 01^i 01^i 0$$

$$q_3 1 \rightarrow q_4 0$$

$$q_4 0 \rightarrow q_5 0\Pi$$

$$q_5 0 \rightarrow q_6 1$$

$$q_6 1 \rightarrow q_6 1\Pi$$

$$01^{x-(i+1)} 01^{i+1} q_6 01^i 0$$

$$q_6 0 \rightarrow q_7 0\Pi$$

$$q_7 1 \rightarrow q_7 1\Pi$$

$$q_7 0 \rightarrow q_8 1$$

$$q_8 1 \rightarrow q_8 1Л$$

$$q_8 0 \rightarrow q_9 0Л$$

$$q_9 1 \rightarrow q_9 1Л$$

$$01^{x-(i+1)} q_9 01^{i+1} 01^{i+1}.$$

Защивкливаем данную процедуру с помощью команды:

$q_00 \rightarrow q_20$

$01^{x-(i+1)}q_201^i + 101^{i+1}.$

На следующем цикле мы получим слово $01^{x-(i+2)}q_201^{i+2}01^{i+2}$ и т.д., вплоть до слова $0q_201^x01^x0$. Команда $q_20 \rightarrow q_30$ создаст конфигурацию $q_3001^x01^x0$. Произведя теперь перенос нуля **A**, затем правый сдвиг **B**⁺, ещё раз перенос нуля **A** и, наконец, левый сдвиг **B**⁻, получим требуемое слово: $q_001^x01^x00$.

Композиция машин Тьюринга

Определение

Пусть заданы машины Тьюринга Θ_1 и Θ_2 , имеющие общий внешний алфавит $A = \{a_0, a_1, \dots, a_m\}$ и алфавиты внутренних состояний $Q_1 = \{q_0, q_1, \dots, q_n\}$ и $Q_2 = \{q_0, q'_1, \dots, q'_t\}$ соответственно.

Композицией (или произведением) машины Θ_1 на машину Θ_2 называется новая машина Θ (которая обозначается $\Theta_1 \cdot \Theta_2$) с тем же внешним алфавитом $A = \{a_0, a_1, \dots, a_m\}$ алфавитом внутренних состояний

$$Q = \{q_0, q_1, \dots, q_n, q_{n+1}, \dots, q_{n+t}\}$$

и программой, получающейся следующим образом.

Во всех командах из Θ_1 , содержащих символ остановки q_0 , заменяем последний на q_{n+1} . Все остальные символы в командах из Θ_1 остаются неизменными. В командах из Θ_2 символ q_0 оставляем неизменным, а все остальные состояния q'_i ($i = 1, \dots, t$) заменяем соответственно на q_{n+i} . Совокупность всех так полученных команд образует программу машины-композиции $\Theta = \Theta_1 \cdot \Theta_2$.

Таким образом, работа машины $\Theta = \Theta_1 \cdot \Theta_2$ состоит в следующем. Сначала работает машина Θ_1 ; в момент её остановки начинает работу машина Θ_2 , которая своей остановкой заканчивает работу машины $\Theta = \Theta_1 \cdot \Theta_2$.

Применение композиции машин Тьюринга для их конструирования. Введённая операция играет важную роль во всех вопросах, связанных с синтезом машин Тьюринга, т.е. является удобным инструментом для конструирования машин Тьюринга. Покажем это на примерах.

ПРИМЕР 2.3.2. Ц : **Циклический сдвиг.** Эта машина осуществляет переработку: $01^x 01^y q_1 01^z 0 \Rightarrow 01^z q_0 01^x 01^y 0$.

Эту машину можно составить (синтезировать) в виде композиции ранее построенных машин Тьюринга. Проверим, что такой перевод произойдёт в результате последовательного применения (композиции) ранее построенных машин **В**, **В⁻** и **В**, а именно

$$\mathbf{Ц}_3 = \mathbf{ВВ}^{-1} \mathbf{В} .$$

$$\begin{aligned} & \text{В самом деле, вычисляем: } \mathbf{ВВ}^{-1} \mathbf{В}(01^x 01^y q_1 01^z 0) = \\ & = \mathbf{ВВ}^{-1}(\mathbf{В}(01^x 01^y q_1 01^z 0)) = \mathbf{ВВ}^{-1}(01^x 01^z q 01^y 0) = \\ & = \mathbf{В}(\mathbf{В}^{-1}(01^x 01^z q 01^y 0)) = \mathbf{В}(01^x q 01^z 01^y 0) = 01^z q_0 01^x 01^y 0 . \end{aligned}$$

ПРИМЕР 2.3.3. **K_2 : Копирование.** Эта машина осуществляет переработку: $q_1 01^x 01^y \Rightarrow 01^x 01^y q_0 01^x 01^y$.

Проверьте, что эта машина представляет собой следующую композицию построенных выше машин:

$$K_2 = B^+ \Gamma B^+ \mathbf{B} \Gamma B^+ \mathbf{B} B^- B^- \mathbf{B} B^+.$$

Обратите только внимание на то, что применять машины нужно в последовательности слева направо: B^+ , Γ , \mathbf{B} , B^+ и т.д.



Вычислимые по Тьюрингу функции

$$f : N^n \rightarrow N.$$

$$A = \{a_0, a_1, a_2, \dots, a_n\}.$$

$$\text{Nom } a_0 = p_0 = 2$$

$$\text{Nom } a_1 = p_1 = 3,$$

$$\text{Nom } a_2 = p_2 = 5, \dots$$

$$\text{Nom } a_i = p_i$$

$$\alpha = a_{i_1} a_{i_2} a_{i_3} \dots a_{i_k}$$

$$\text{Nom } \alpha = 2^{\text{Nom } a_{i_1}} \cdot 3^{\text{Nom } a_{i_2}} \cdot 5^{\text{Nom } a_{i_3}} \cdot \dots \cdot p_{k-1}^{\text{Nom } a_{i_k}},$$

где p_{k-1} — k -ое по порядку простое число. Ясно, что по данному номеру занумерованное им слово восстанавливается однозначно.

По исходному алгоритму переработки слов можно **построить алгоритм для вычисления соответствующей функции;**

в этом случае

такие функции называются алгоритмически (или эффективно) вычислимыми.

Возникает вопрос о соотношении между классом

алгоритмически вычисляемых функций и классом функций, вычисляемых на машинах Тьюринга.

Совпадают ли эти классы?

Вычислимость функций на машине Тьюринга

Определение

Функция называется вычислимой по Тьюрингу, или вычислимой на машине Тьюринга, если существует машина Тьюринга, вычисляющая её,

т.е. такая машина Тьюринга, которая вычисляет её значения для тех наборов значений аргументов, для которых функция определена, и работающая вечно, если функция для данного набора значений аргументов не определена.

Остаётся **договориться** о некоторых условностях

Во-первых,

речь идёт о функциях (*или возможно о частичных функциях, т.е. не всюду определённых*), заданных на множестве натуральных чисел и принимающих также натуральные значения.

Во-вторых,

нужно условиться:

✓ как записывать на ленте машины Тьюринга значения

аргумент x_1, x_2, \dots, x_n

✓ из *какого положения* начин $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ отку

исходного слова

✓ в *каком положении* получать значение функции.

Это можно делать следующим образом:
Значения x_1, x_2, \dots, x_n аргументов будем располагать на ленте в виде следующего слова:

$$0 \underbrace{11 \dots 1}_{x_1} 0 \underbrace{11 \dots 1}_{x_2} 0 \dots 0 \underbrace{11 \dots 1}_{x_n} 0,$$

где в первом массиве число единиц равно x_1 , во втором – x_2 , и т.д., в последнем – x_n .

Здесь полезно ввести следующие обозначения. Для натурального x обозначаем: $1^x = 1\dots 1$, $0^x = 0\dots 0$. Дополнительно полагаем $0^0 = 1^0 = \Lambda$ – пустое слово. Так что на слова $1^0 = \Lambda$, $1^1 = 1$, $1^2 = 11$, $1^3 = 111$, ... будем смотреть как на "изображения" натур-

ральных чисел $0, 1, 2, 3, \dots$ соответственно. Таким образом, предыдущее слово можно представить следующим образом: $01^{x_1}01^{x_2}\dots 01^{x_n}0$.

Начинать переработку данного слова будем из **стандартного начального положения**

Если функция $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ определена на данном наборе значений аргументов, то в результате на ленте должно быть записано подряд $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ единиц; в противном случае машина должна работать бесконечно.

При выполнении всех перечисленных условий будем говорить, что **машина Тьюринга вычисляет данную функцию.**

Таким образом, сформулированное определение становится абсолютно строгим

Правильная вычислимость функций на машине Тьюринга

Определение

Будем говорить, что машина Тьюринга

правильно вычисляет функцию $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$,

если начальное слово $q_1 0 1^{x_1} 0 1^{x_2} \dots 0 1^{x_n} 0$ она

переводит в слово $q_0 0 1^{f(x_1, x_2, \dots, x_n)} 0 \dots 0$ и

при этом в процессе работы **не пристраивает к начальному слову новых ячеек на ленте ни слева, ни справа.**

Если же функция f не определена на данном наборе значений аргументов, то, начав работать из указанного положения, она никогда в процессе работы **не будет надстраивать ленту слева.**

Тезис Тьюринга (основная гипотеза теории алгоритмов)

ТЕЗИС ТЬЮРИНГА. Для нахождения значений функции, заданной в некотором алфавите, тогда и только тогда существует какой-нибудь алгоритм, когда функция является вычислимой по Тьюрингу, то есть когда она может вычисляться на подходящей машине Тьюринга.