Тригонометрические уравнения

Задание 13

Существуют разные способы отбора корней в тригонометрических уравнениях:

- ***Арифметический способ.***
- ***Перебор значений целочисленного параметра и вычисление корней.***
- ***Функционально - графический способ.***
- ***Отбор корней тригонометрического уравнения, на числовой прямой.***
- ***Отбор корней тригонометрического уравнения на числовой окружности.***

2. Что надо уметь и знать, чтобы отобрать корни на числовой окружности.

- Движение начинается от нуля., если корень положительный , то против часовой стрелки, если отрицательный , то по часовой стрелки.

- Числовая окружность по положительному направлению $2\pi(6{,}28); 4\pi; 6\pi$ и т.д.
- По отрицательному направлению $-2\pi(-6{,}28); -4\pi; -6\pi$ и т.д.

- Поэтому, если дают числовой промежуток $\left[\frac{5\pi}{2}; \frac{11\pi}{2}\right]$, его надо записать в другом виде $\left[2\pi + \frac{\pi}{2}; 4\pi + \frac{3\pi}{2}\right]$ или если предлагают промежуток $\left[-\frac{7\pi}{2}; -3\pi\right)$, значит надо записать в виде $\left[-2\pi - \frac{3\pi}{2}; -2\pi - \pi\right)$

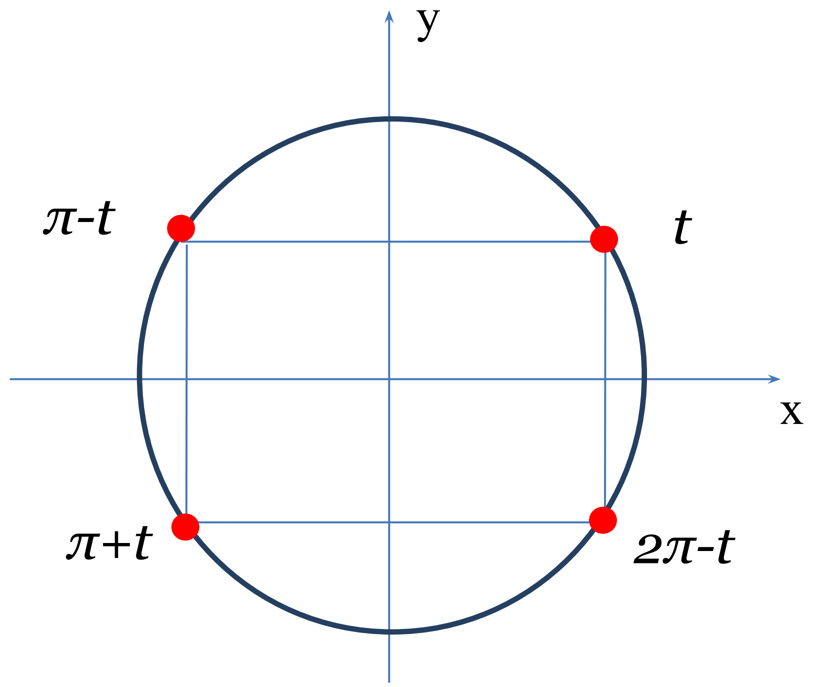
2. Что надо уметь и знать, чтобы отобрать корни на числовой окружности.

- *Движение начинается от нуля., если корень положительный , то против часовой стрелки, если отрицательный , то по часовой стрелки.*

- *Числовая окружность по положительному направлению* $2\pi(6{,}28); 4\pi; 6\pi$ *и т.д.*
- *По отрицательному направлению* $-2\pi(-6{,}28); -4\pi; -6\pi$ *и т.д.*

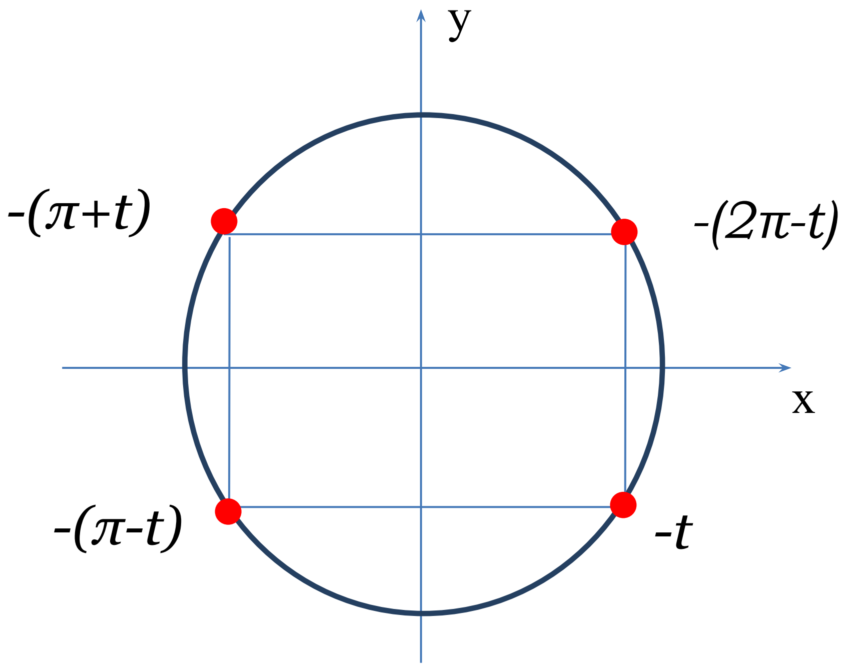
- *Поэтому, если дают числовой промежуток* $\left[\frac{5\pi}{2}; \frac{11\pi}{2}\right]$, *его надо записать в другом виде* $\left[2\pi + \frac{\pi}{2}; 4\pi + \frac{3\pi}{2}\right]$ *или если предлагают промежуток* $\left[-\frac{7\pi}{2}; -3\pi\right)$, *значит надо записать в виде* $\left[-2\pi - \frac{3\pi}{2}; -2\pi - \pi\right)$

Покажем это на круге по положительному направлению



Обратим внимание на то, что точки симметричные точке первой четверти расположенные на окружности являются вершинами прямоугольника, стороны которого параллельны осям координат, что позволяет вычислить точку любой четверти, через точку первой четверти.

По отрицательному направлению.



Ели точка будет больше чем 2π, 4π и т. д, то надо к этим значениям прибавить части круга, также по отрицательному направлению.

а) Решите уравнение $2\cos 2x + 4\sin\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)-1=0$

$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-3\pi;\ -\pi]$

По формуле приведения:
«синус» изменится на **«косинус»**
IVчет.

$$\sin\left(\frac{3\pi}{2}+x\right) = -\cos x$$

В IV четв. знак исходной функции синуса отрицательный

$$2\cos 2x - 4\cos x - 1 = 0$$

$$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$$

$$2(\cos^2 x - \sin^2 x) - 4\cos x - 1 = 0$$

$$2\cos^2 x - 2\sin^2 x - 4\cos x - 1 = 0$$

$$2\cos^2 x - 2(1-\cos^2 x) - 4\cos x - 1 = 0$$

$$2\cos^2 x - 2 + 2\cos^2 x - 4\cos x - 1 = 0$$

$$4\cos^2 x - 4\cos x - 3 = 0$$

Пусть *cos x=a*, -1≤a≤1

$$4a^2 - 4a -$$

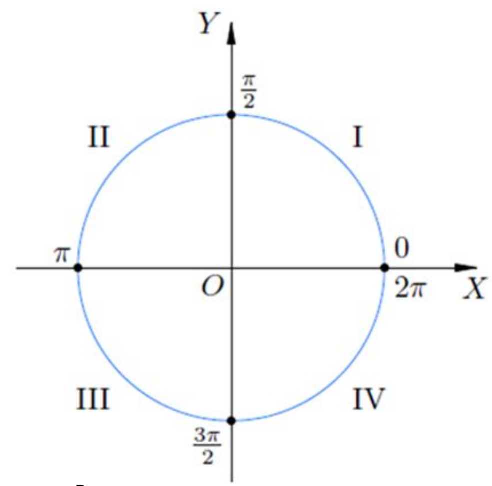
$$D = 4^2 -$$

$$a = \frac{4\pm 8}{2\cdot 4} =$$

$$\cos x = -\frac{1}{2}$$

$$x = \pm\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) + 2\pi n$$

$$x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z$$



а) Ответ: $x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z.$

Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-3\pi;\ -\pi\right]$

$$x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n$$

$$\boxed{\frac{2\pi}{3} + 2\pi n}$$

n=-1

$[-3\pi; -\pi]$ $\quad \leq \quad \leq \quad / : \pi$

$$-3 \leq \frac{2}{3} + 2n \leq -1 \quad / -\frac{2}{3}$$

$$-3\frac{2}{3} \leq 2n \leq -1\frac{2}{3}$$

$$-\frac{11}{3} \leq 2n \leq -\frac{5}{3} \quad / : 2$$

$$-\frac{11}{6} \leq n \leq -\frac{5}{6}$$

$\boxed{n = -1,}$

$$x = -\frac{4\pi}{3}$$

$$\boxed{-\frac{2\pi}{3} + 2\pi n}$$

n=-1

$[-3\pi; -\pi]$ $\quad \leq \quad \leq \quad / : \pi$

$$-3 \leq -\frac{2}{3} + 2n \leq -1 \quad / +\frac{2}{3}$$

$$-2\frac{1}{3} \leq 2n \leq -\frac{1}{3}$$

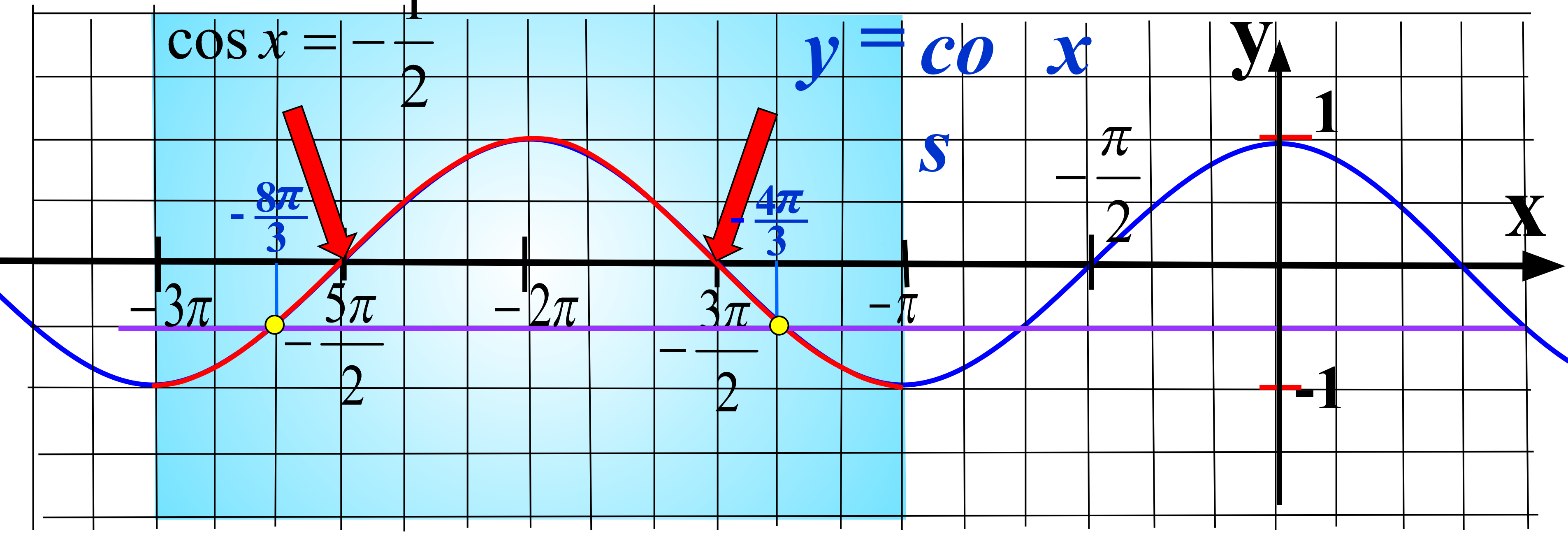
$$-\frac{7}{3} \leq 2n \leq -\frac{1}{3} \quad / : 2$$

$$-\frac{7}{6} \leq n \leq -\frac{1}{6}$$

$\boxed{n = -1,}$

$$x = -\frac{2\pi}{3} - 2\pi, \quad x = -\frac{8\pi}{3}$$

б) Найдите все корни этого уравнения $2\cos 2x + 4\sin\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)-1=0$, принадлежащие отрезку $[-3\pi;\ -\pi]$



$$-\frac{5\pi}{2}-\frac{\pi}{6}=-\frac{15\pi}{6}-\frac{\pi}{6}=-\frac{16\pi}{6}=-\frac{8\pi}{3}.$$

$$-\frac{3\pi}{2}+\frac{\pi}{6}=-\frac{9\pi}{6}+\frac{\pi}{6}=-\frac{8\pi}{6}=-\frac{4\pi}{3}.$$

б) Ответ: $x=-\frac{8\pi}{3};\ x=-\frac{4\pi}{3}.$

Т-ца знач.

Решите уравнение $\cos 2x = 1 - \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi\right)$

проверь себя

$$1-2\sin^2 x = 1-\sin x, \quad 2\sin^2 x - \sin x = 0,$$
$$\sin x\left(\sin x - \frac{1}{2}\right) = 0.$$

πn $\quad\quad \dfrac{\pi}{6}+2\pi n$ $\quad\quad 5\dfrac{\pi}{6}+2\pi n$

Решение: б) корни уравнения sin x= 1/2

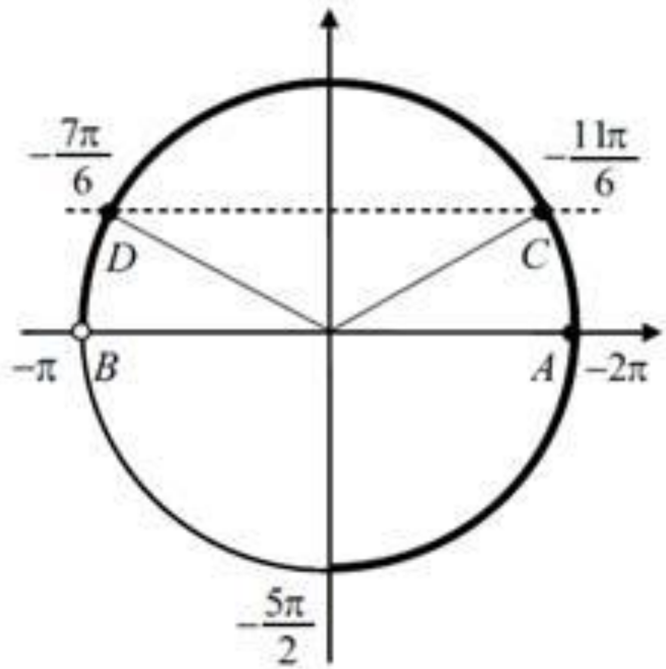
$$\sin x = 0$$

$$\left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi\right)$$

$$-2\pi; \quad -2\pi + \frac{\pi}{6} = -\frac{11\pi}{6}; \quad -\pi - \frac{\pi}{6} = -\frac{7\pi}{6}$$

изображен жирной дугой (см. рис.). В указанном промежутке содержатся три корня уравнения:

$$-2\pi; -\frac{11\pi}{6}; -\frac{7\pi}{6}$$



Задания для самостоятельного решения

а) Решите уравнение. б) Найдите все корни данного		Ответ
$\frac{1}{\cos^2 x}+3\operatorname{tg} x-5=0$	$\left[-\pi; \frac{\pi}{2}\right]$	а) $\frac{\pi}{4}+\pi k, -\operatorname{arctg}4+\pi k, k \in Z$
		б) $-\frac{3\pi}{4}, -\operatorname{arctg} 4, \frac{\pi}{4}$
$\frac{3}{\sin(\pi-x)}-\frac{1}{\sin^2 x}=2$	$\left[-2\pi; -\frac{\pi}{2}\right]$	а) $\frac{\pi}{6}+2\pi n, n \in Z, \frac{5\pi}{6}+2\pi n, n \in Z,$ $\frac{\pi}{2}+2\pi n, n \in Z$
		б) $-\frac{11\pi}{6}, -\frac{3\pi}{2}, -\frac{7\pi}{6}$
$6\sin^2 x+7\cos x-7=0$	$[-3\pi; -\pi]$	а) $2\pi n, \pm\arccos\frac{1}{6}+2\pi m, n, m$
		б) $-2\pi-\arccos\frac{1}{6}, -2\pi+\arccos\frac{1}{6}$
$5\cos^2 x-12\cos x+4=0$	$\left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi\right]$	а) $\pm\arccos\frac{2}{5}+2\pi n,\ n \in Z$
		б) $-2\pi-\arccos\frac{2}{5}, -2\pi+\arccos\frac{2}{5}$
$\operatorname{tg}^2 x+5\operatorname{tg} x+6=0$	$\left[-2\pi; -\frac{\pi}{2}\right]$	а) $-\operatorname{arctg} 2+\pi n,\ -\operatorname{arctg} 3+\pi m,\ n, m \in Z$
		б) $-\pi-\operatorname{arctg} 2, -\pi-\operatorname{arctg} 3$