Решение задач с параметром графическим способом

Самолазова Лариса Александровна

учитель математики МКОУ «СШ №7 г. Михайловки Волгоградской области»

Математическое понятие параметра

Параметром называются коэффициенты при неизвестных или свободные члены, заданные не конкретными числовыми значениями, а обозначенные буквами.

Решить задачу с параметром – это значит, для каждого значения *параметра* найти значения x, удовлетворяющие условию этой задачи.

Основные типы задач с параметрами:

Тип 1. Задачи, которые необходимо решить для всех значений параметра или для значений параметра из заданного промежутка.

Тип 2. Задачи, где требуется найти количество решений в зависимости от значения параметра.

Тип 3. Задачи, где необходимо найти значения параметра, при которых задача имеет заданное количество решений.

Тип 4. Задачи, в которых необходимо найти значения параметра, при которых множество решений удовлетворяет заданным условиям.

Основные способы решения задач с параметром

Аналитический. Это способ так называемого прямого решения, повторяющего стандартные процедуры нахождения ответа в задачах без параметра.	**Графический.** В зависимости от задачи (с переменной х и параметром *а*) рассматриваются графики или в координатной плоскости (х; у), или в координатной плоскости (х; *а*).	**Решение относительно параметра.** Переменные х и а принимаются равноправными и выбирается та, относительно которой аналитическое решение признается более простым.

Преимущества графического метода решения задач с параметром.

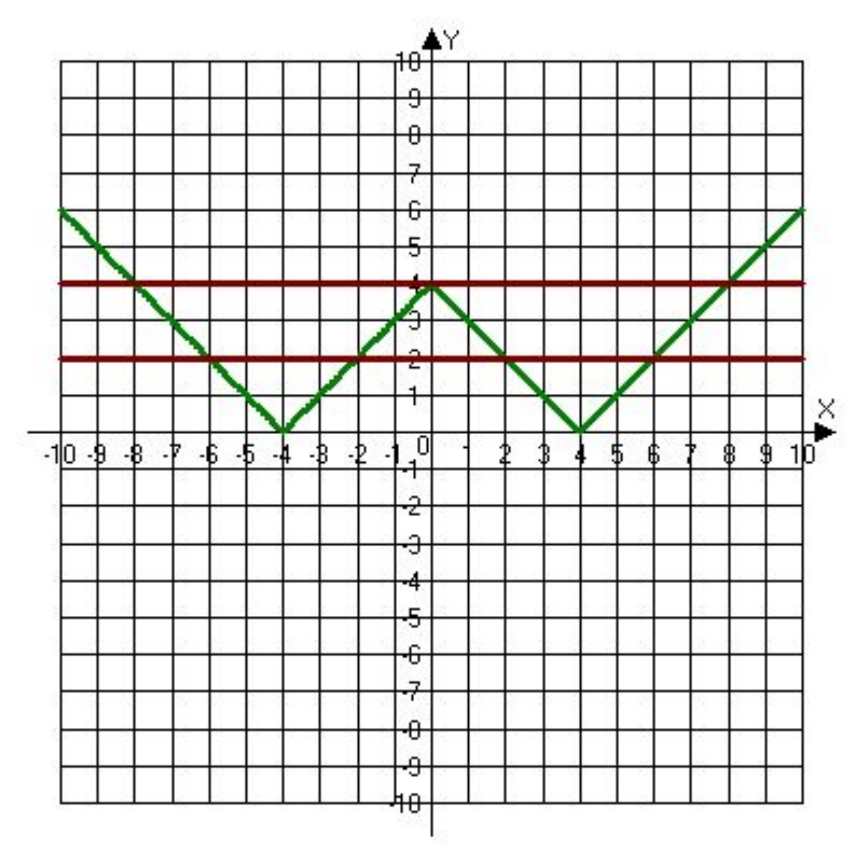
экономия времени

отсутствие сложных и громоздких вычислений

подсказка на более рациональный аналитический метод решения

Пример 1. *Построить график функции* $f(x)=\left||x|-4\right|$ *и с его помощью определить максимальное число корней уравнения* $\left||x|-4\right|=a.$

Решение:



С помощью элементарных преобразований строим график функции $f(x)=\left||x|-4\right|$

Проводя прямые ***y=a,*** видим, что
при ***a<0*** уравнение не имеет корней;
при ***a=0*** – два корня;
при ***0<a<4*** – четыре корня;
при ***a=4*** – три корня;
a>4 – два корня;

Ответ: 4.

Сколько корней имеет уравнение в зависимости от a?

$$|x^2-4|=a;\qquad ||x^2-2x|-7|=a;$$

$$x^2(x-4)+a=0;\qquad 2x|x|+x^2-6x=a.$$

Алгоритм решения уравнения вида f(x)=a.

- Строим в одной системе координат графики функций y=f(x) и y=a.
- Находим точки пересечения графиков функций. Абсциссы точек пересечения будут являться корнями уравнения.
- Если общих точек у графиков нет, то данное уравнение решений не имеет.

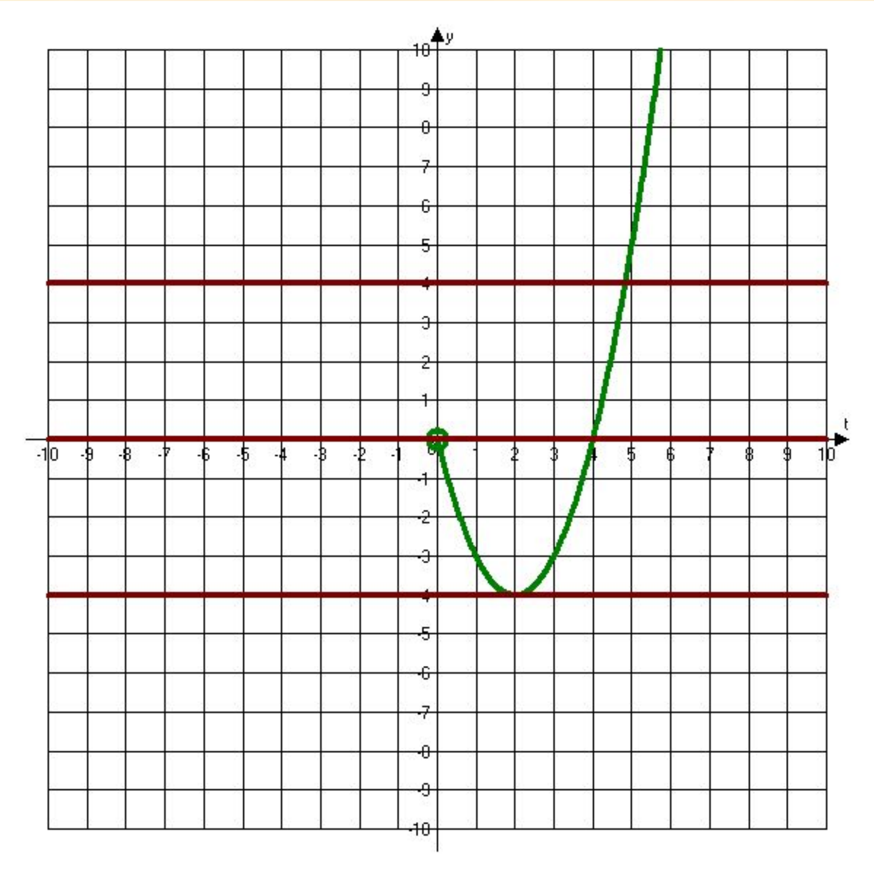
Пример 2. *При каких значениях m уравнение* $2011^{2x} - 4 \cdot 2011^{x} + m^{2} - 3m = 0$ *имеет единственный корень?*

Решение: Введем замену: $2011^{x} = t, \quad t > 0$. Получим:

$$t^{2} - 4t = -m^{2} + 3m$$

Построим график функции

$$y = t^{2} - 4t.$$



Следовательно, уравнение имеет единственное решение, если прямая

$$y = -m^{2} + 3m$$

пересекает график функции в единственной точке, т.е.

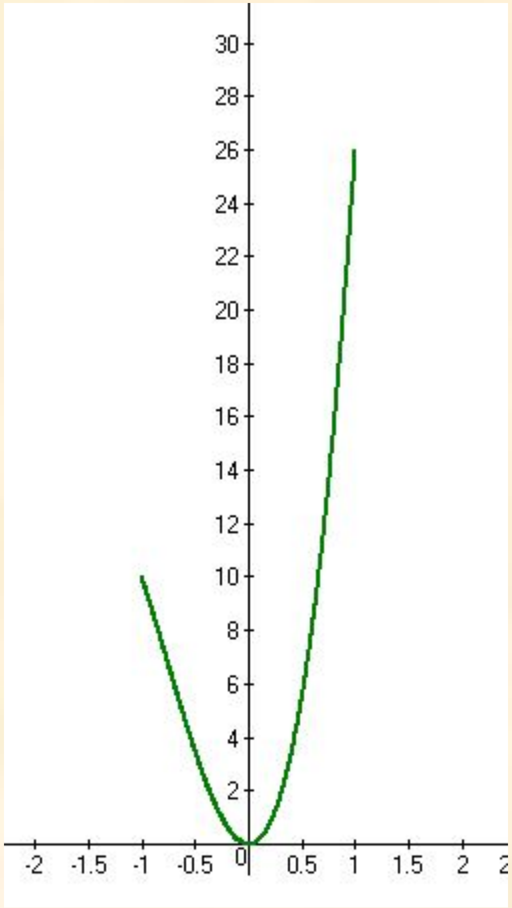
$$\left[\begin{array}{l} -m^{2} + 3m = -4; \\ -m^{2} + 3m \geq 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow m \in \{-1\} \cup [0;3] \cup \{4\}$$

Ответ: $m \in \{-1\} \cup [0;3] \cup \{4\}$.

Пример 3. Найдите все значения р, при которых уравнение

$8\sin^3 x - 9\cos 2x = p$ не имеет решений.

Решение:



$$8\sin^3 x - 9(1 - 2\sin^2 x) = p$$

$$8\sin^3 x + 18\sin^2 x = p + 9$$

$$t = \sin x, \qquad t \in [-1;1]$$

$$8t^3 + 18t^2 = p + 9$$

$$\left[\begin{array}{l} p+9 > 26 \\ p+9 < 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow p \in (-\infty; -9) \cup (17; \infty).$$

Ответ: $p \in (-\infty; -9) \cup (17; \infty)$.

Сколько корней имеет уравнение в зависимости от а?

$$x^4+6x^2+a=0$$

$$8\sqrt{x}-x+3a=0$$

$$\left(\frac{1}{9}\right)^x-6\left(\frac{1}{3}\right)^x=a$$

$$\log_2^2 x-4\log_2 x=a$$

$$a(ctg^2x+1)+2\sin x-3=0$$

Задачи, взятые из материалов ЕГЭ прошлых лет

C5 Найдите все положительные значения a, при каждом из которых система

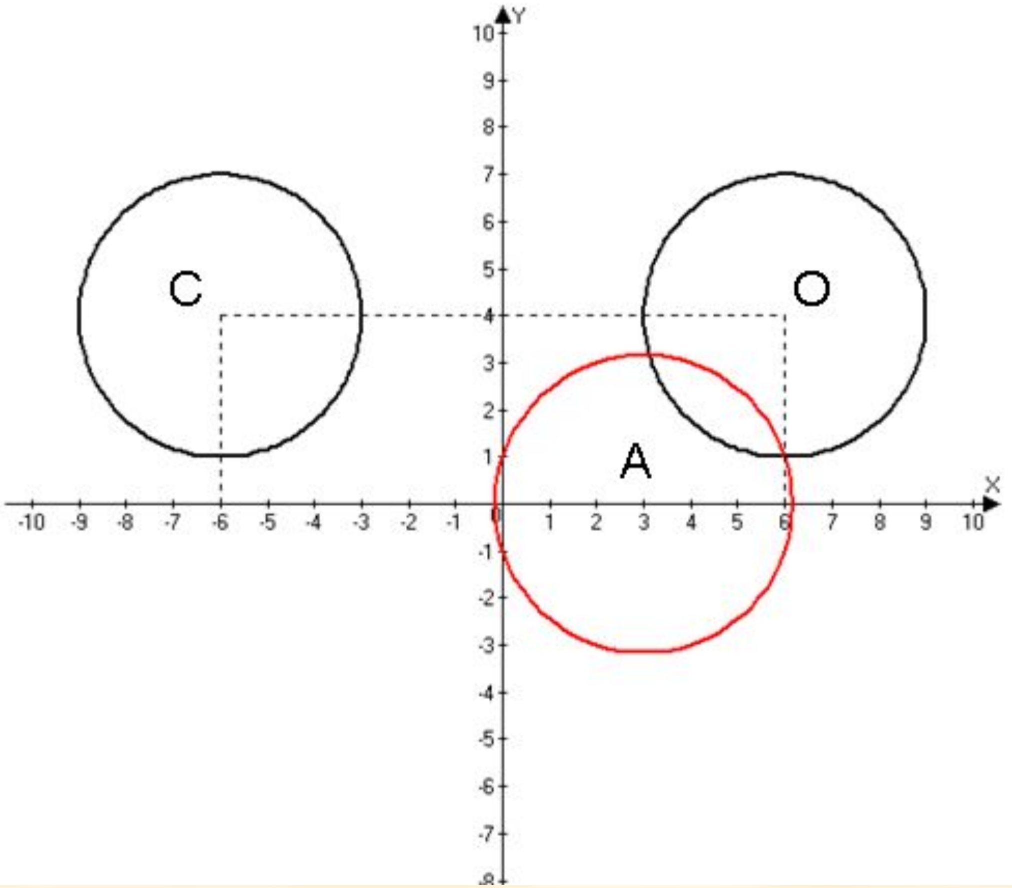
$$\begin{cases} (|x|-6)^2+(y-4)^2=9 \\ (x-3)^2+y^2=a^2 \end{cases}$$

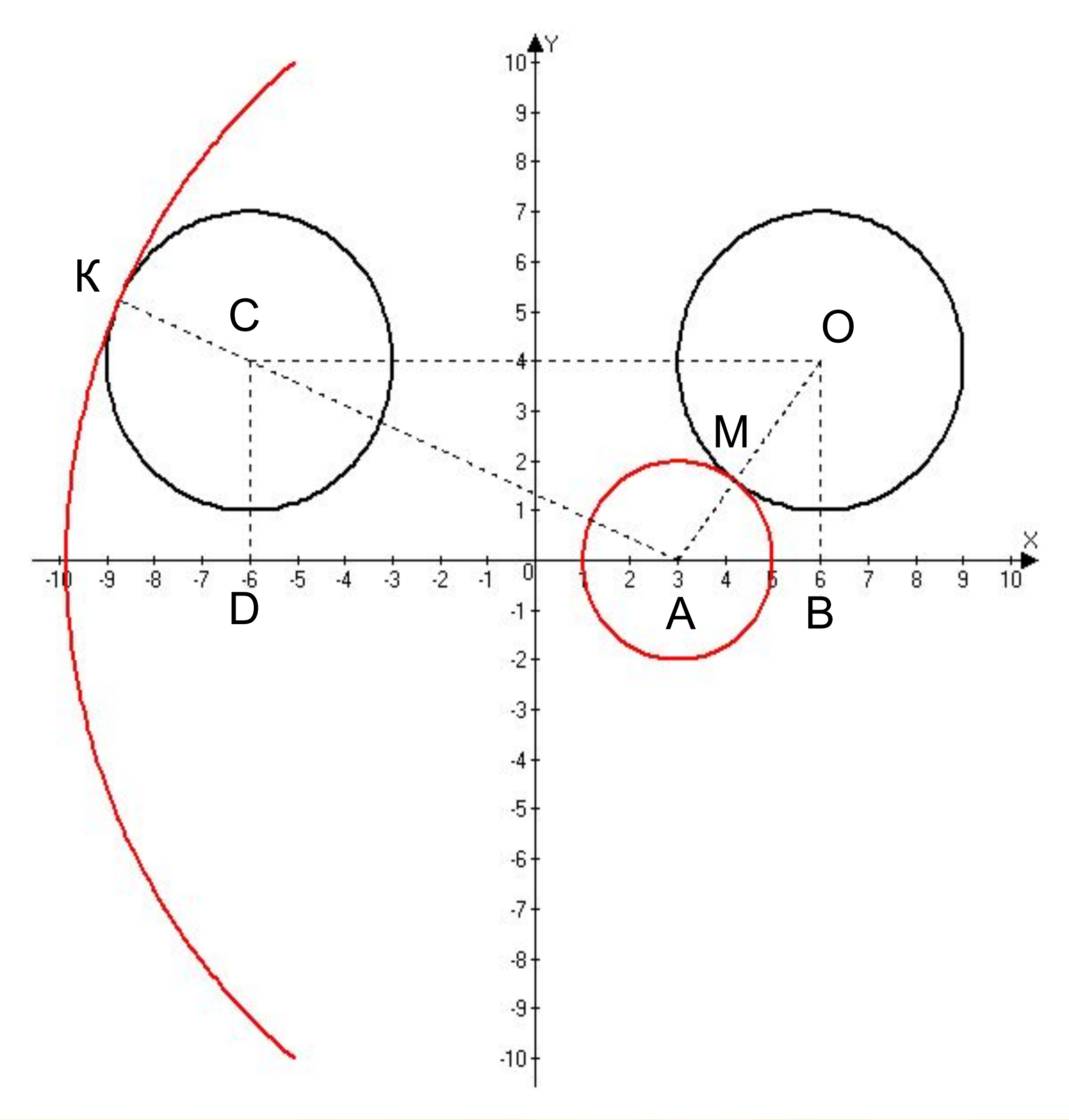
имеет одно решение.

Решение:

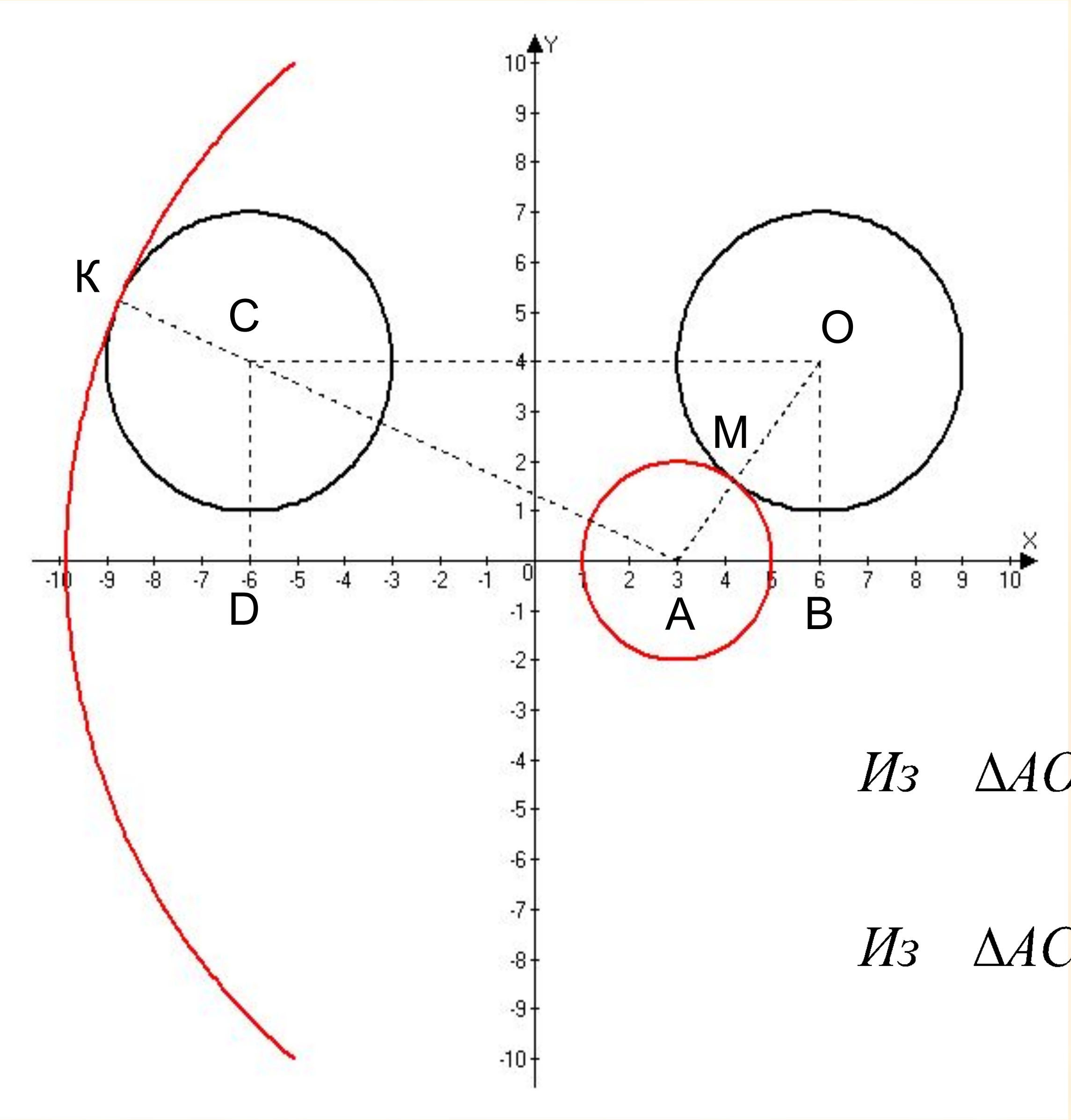
Первое уравнение задает на плоскости две окружности радиуса 3, симметричные относительно оси ординат. Центры этих окружностей в точках C(-6;4) и O(6;4).

Второе уравнение - уравнение окружности радиуса a>0 и центром в точке A(3;0).





Система имеет единственное решение тогда и только тогда, когда окружность, заданная вторым уравнением касается одной окружности и не пересекает вторую окружность, заданных первым уравнением.



$$\text{Из} \quad \Delta AOB \qquad AO = 5,$$

$$AM = 5 - 3 = 2;$$

$$\text{Из} \quad \Delta ACD \quad AC = \sqrt{16+81} = \sqrt{97},$$

$$AK = 3 + \sqrt{97}.$$

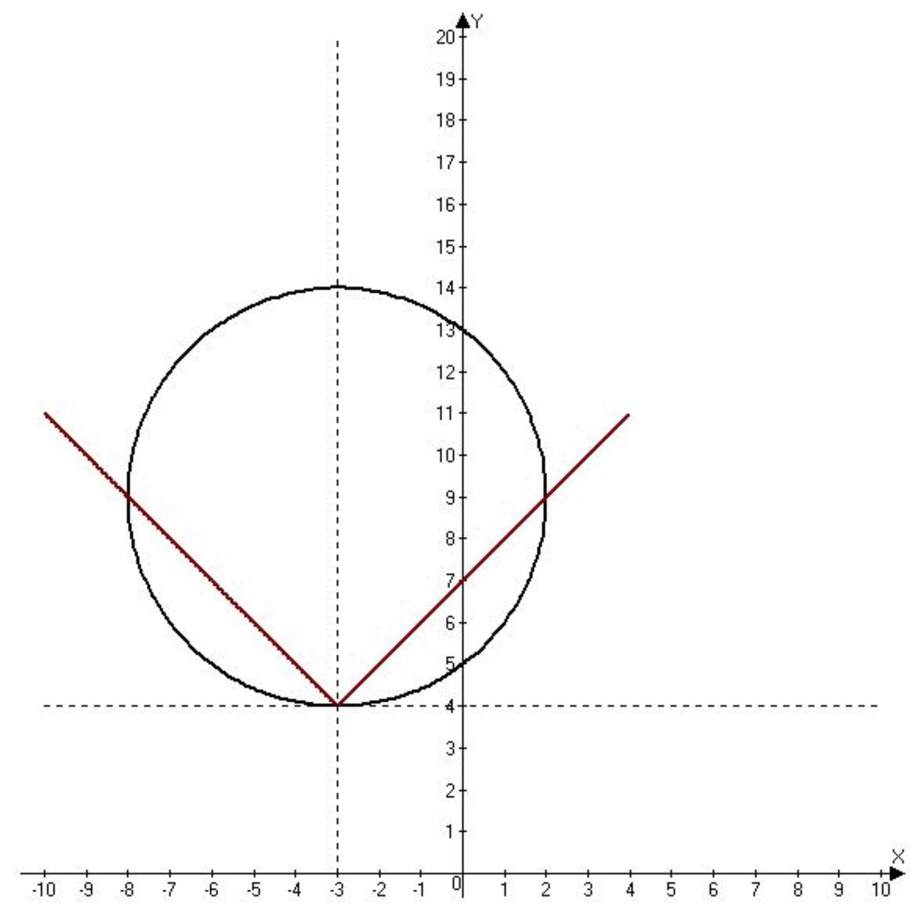
$$\textit{Ответ}: \quad 2, \quad 3 + \sqrt{97}.$$

С5. **Найдите все значения a, при каждом из которых система**

$$\begin{cases} (x+3)^2 + (y-9)^2 = 25, \\ y = |x-a| + 4 \end{cases}$$

имеет ровно три различных решения.

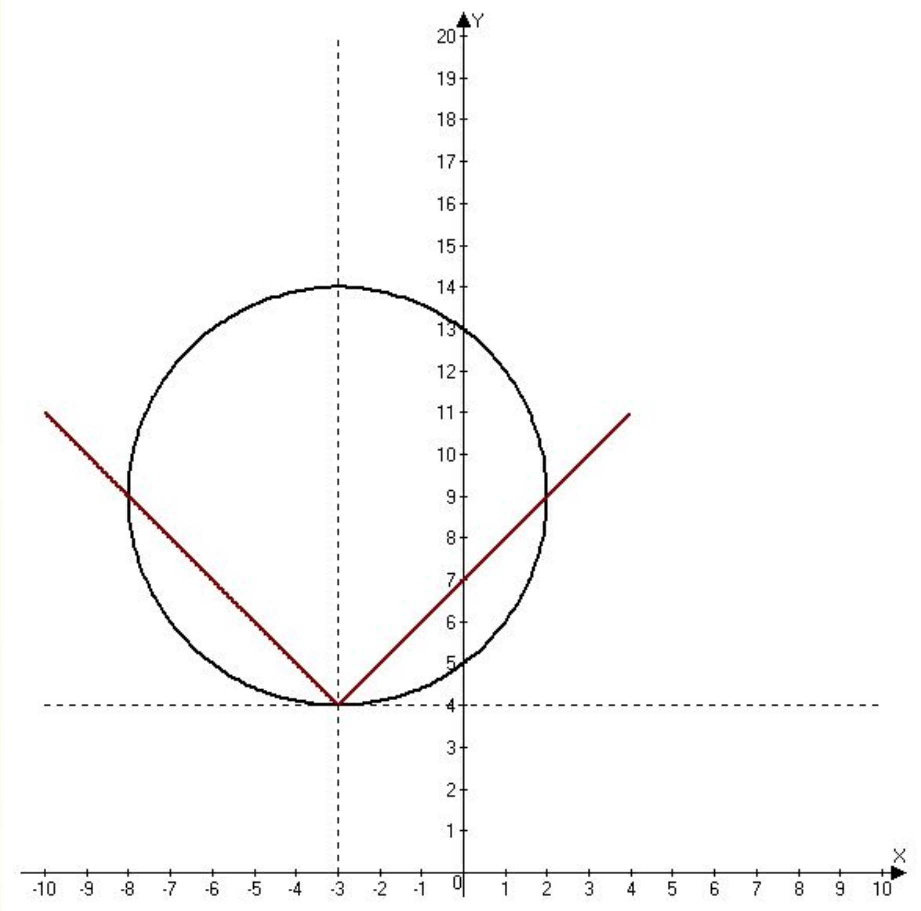
Решение:



Первое уравнение системы является уравнением окружности с центром (-3;9) и радиусом 5.

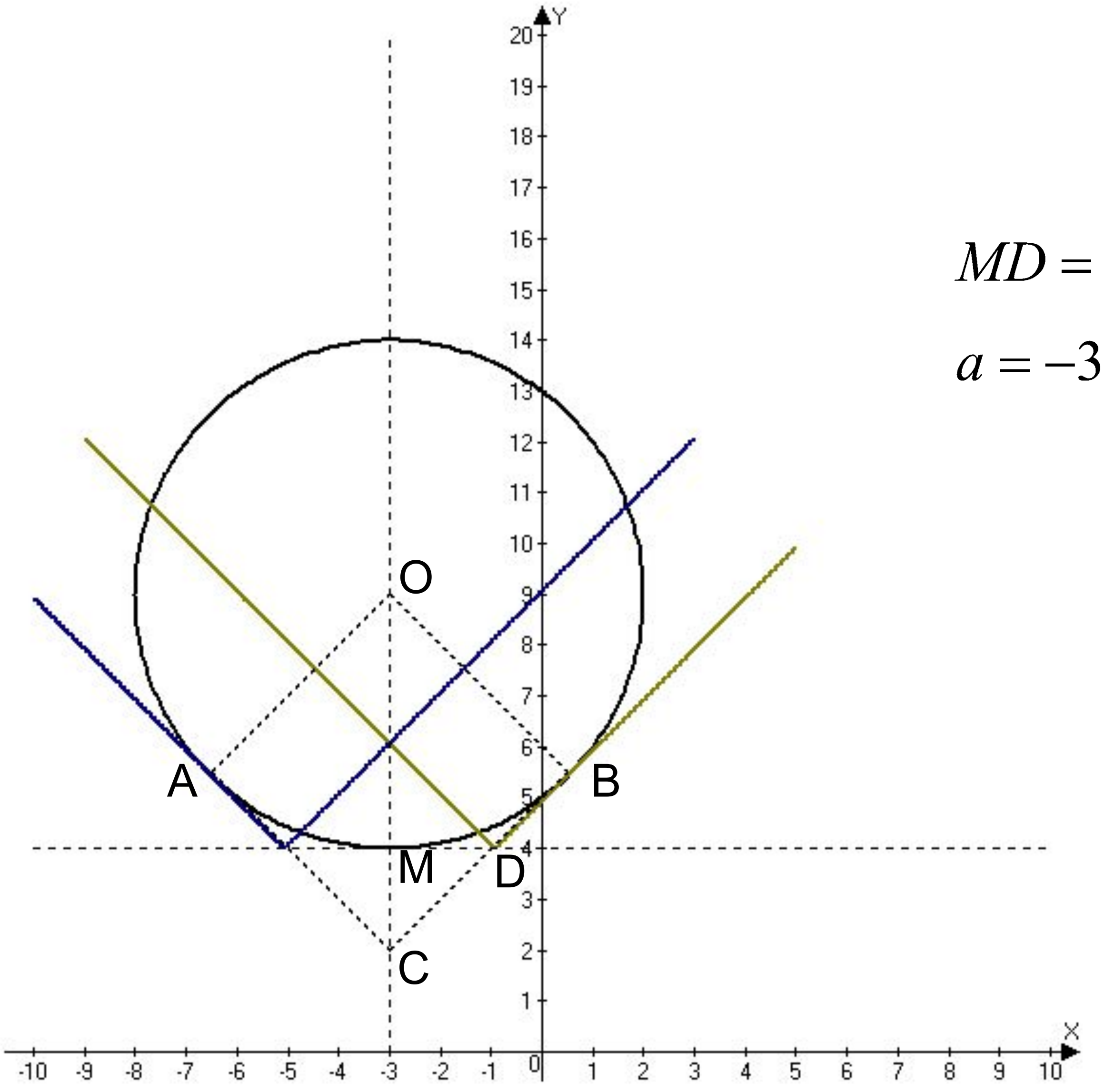
Второе уравнение представляет собой прямой угол с вершиной в точке (a;4), симметричный относительно прямой x=a. При изменении параметра a вершина угла перемещается по прямой y=4, являющейся касательной к окружности.

Три общие точки окружность и угол имеют в трех случаях.



1. Вершина прямого угла лежит в точке касания окружности и прямой у =4, а его стороны пересекают окружность в двух точках. Очевидно, что в этом случае а=-3.

2. Одна из сторон угла пересекает окружность в двух точках, а другая касается окружности (два случая).



AOBC – квадрат со стороной равной 5 и диагональю $5\sqrt{2}$

$$MD = MC = OC - OM = 5\sqrt{2} - 5$$

$$a = -3 + 5\sqrt{2} - 5 = 5\sqrt{2} - 8$$

В силу симметричности еще одно значение параметра равно

$$a = 2 - 5\sqrt{2}$$

$Ответ:$

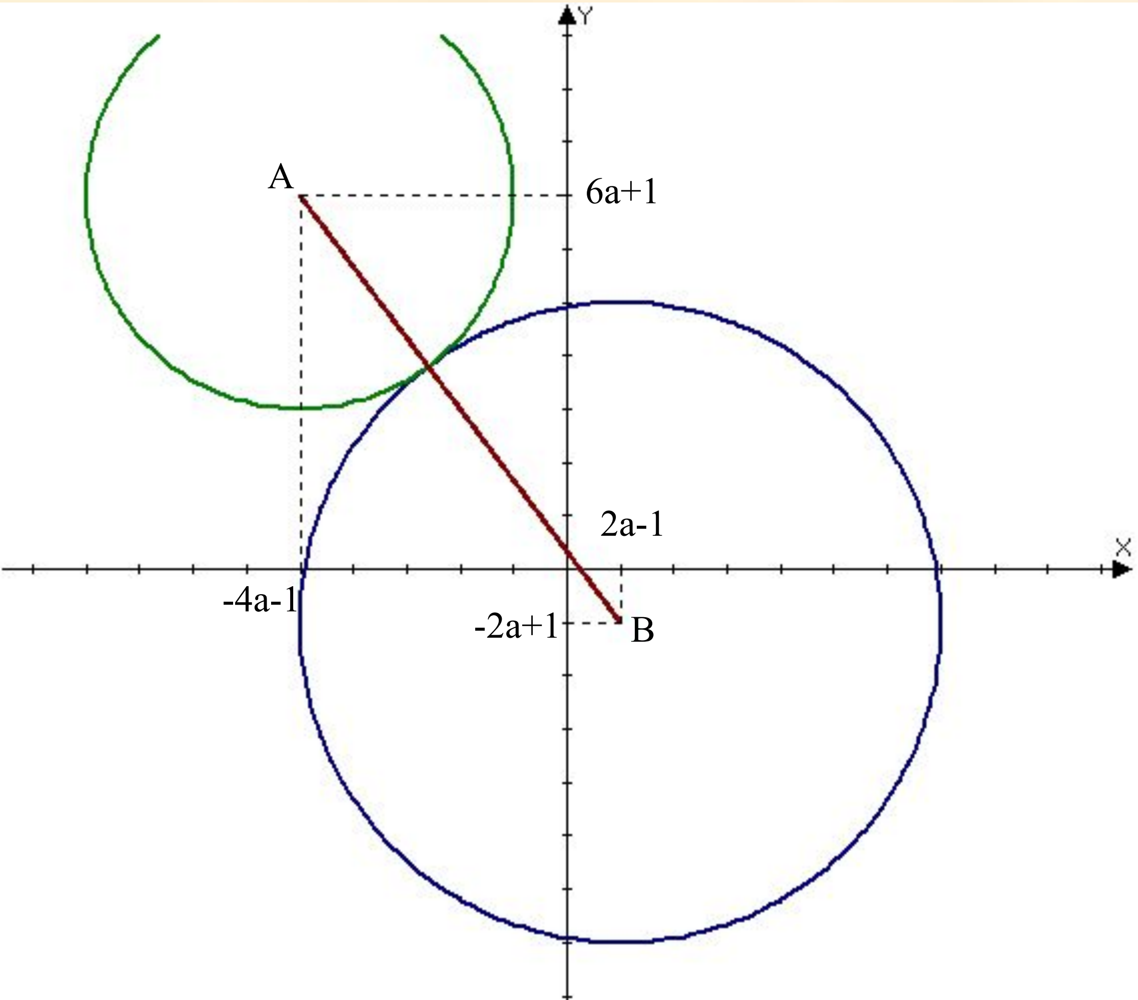
$$2 - 5\sqrt{2}; \quad -3; \quad 5\sqrt{2} - 8.$$

C5 Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система неравенств

$$\begin{cases}(x+1-2a)^2+(y+2a-1)^2\le(2a+1)^2\\(x+1+4a)^2+(y-6a-1)^2\le(9a-6)^2\end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение.

Решение:



На координатной плоскости эти неравенства задают круги. Система будет иметь хотя бы одно решение, если круги касаются или пересекаются, т.е. расстояние между центрами кругов меньше или равно сумме радиусов.

$$\sqrt{(2a-1+4a+1)^2+(-2a+1-6a-1)^2}\le|2a+1|+|9a-6|$$

$$\sqrt{36a^2+64a^2}\le|2a+1|+|9a-6|$$

$$10|a|\le|2a+1|+|9a-6|$$

$$1)\quad \begin{cases} a<-0{,}5 \\ -10a\le-2a-1-9a+6 \end{cases} \Rightarrow \quad a<-0{,}5;$$

$$2)\quad \begin{cases} -0{,}5\le a\le 0 \\ -10a\le 2a+1-9a+6 \end{cases} \Rightarrow \quad -0{,}5\le a\le 0;$$

$$3)\quad \begin{cases} 0 < a < \dfrac{2}{3} \\ 10a \le 2a + 1 - 9a + 6 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad 0 < a \le \frac{7}{17};$$

$$4)\quad \begin{cases} a \ge \dfrac{2}{3} \\ 10a \le 2a + 1 + 9a - 6 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad a \ge 5;$$

$$\textit{Ответ}: \qquad a \in (-\infty; \frac{7}{17}] \cup [5; \infty).$$

С5 Найдите все значения параметра a, не меньшие 1, при каждом из которых уравнение $f(x)=\left|9^a-3\right|\sqrt{x}$ имеет 6 решений, где f — нечетная периодическая функция с периодом $T=4$, определенная на всей числовой прямой, причем $f(x)=18a^2\left(\left|x-1\right|-1\right)^2$, если $0\le x\le 2$.

Решение:

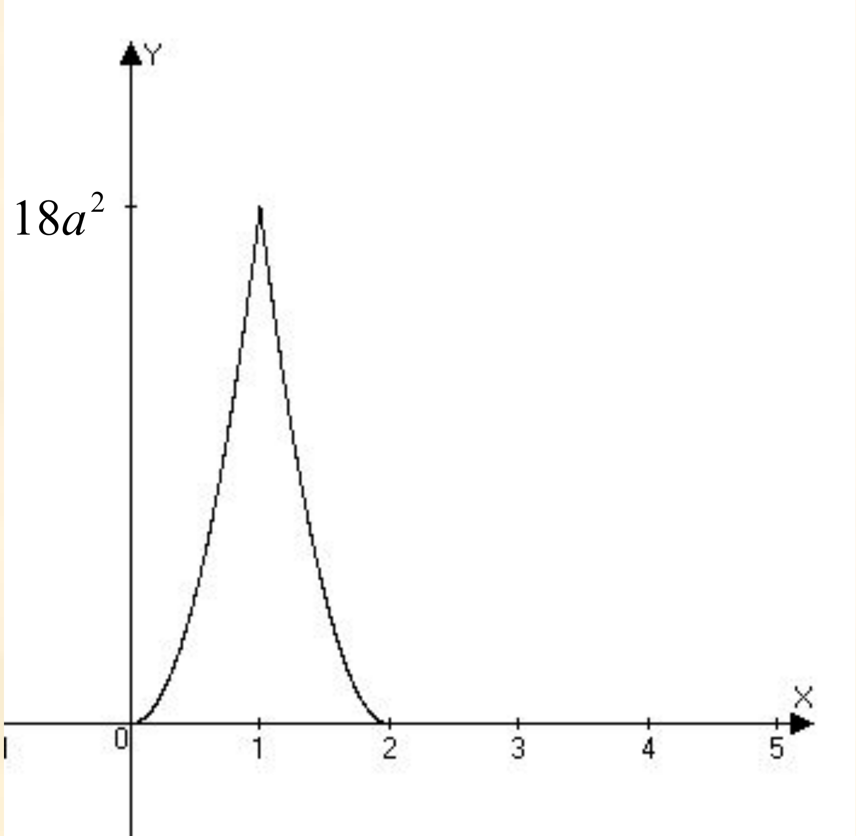
Если $a=0$, то функция $f(x)$ тождественно равна нулю, и ее график имеет с графиком функции $g(x)=2\sqrt{x}$ единственную общую точку.

Пусть $a\neq 0.$

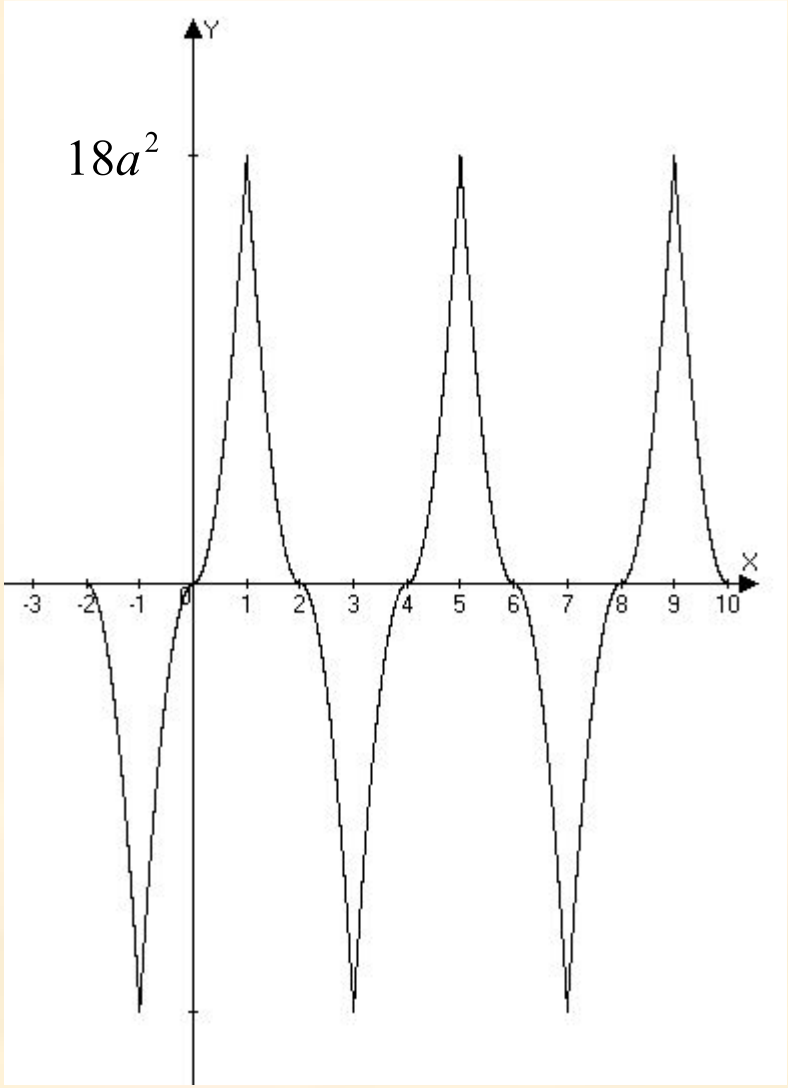
Построим график функции

$$f(x) = 18a^2(|x-1|-1)^2, \quad если \quad 0 \le x \le 2.$$

$$f(x) = \begin{cases} 18a^2x^2, & если \quad 0 \le x \le 1; \\ 18a^2(x-2)^2, & если \quad 1 \le x \le 2. \end{cases}$$



Учитывая, что $f(x)$ нечетная периодическая функция с периодом T=4, достроим график

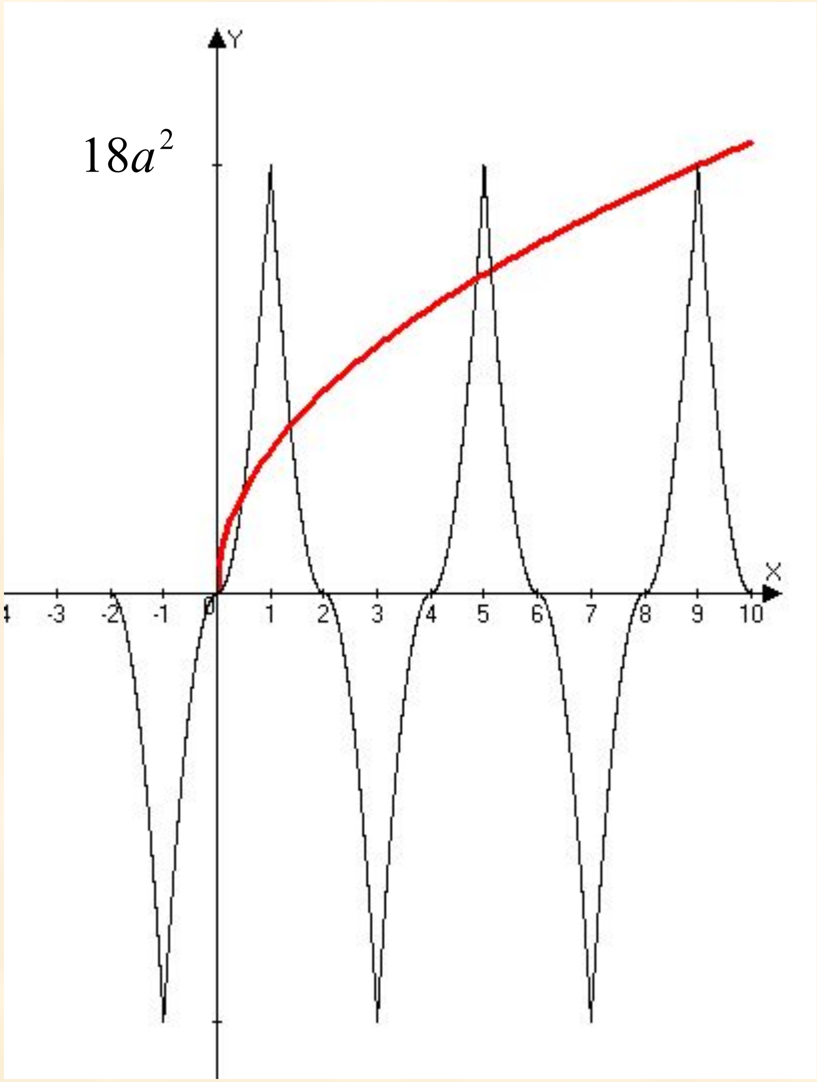


Построим график функции $f(x) = \left|9^a - 3\right|\sqrt{x}$

Уравнение $f(x) = \left|9^a - 3\right|\sqrt{x}$

будет иметь 6 решений, если графики функций пересекутся ровно в 6 точках, т.е. будут проходить через точку с координатами

$(9;\quad 18a^2)$



$$\left|9^a - 3\right| \cdot 3 = 18a^2$$

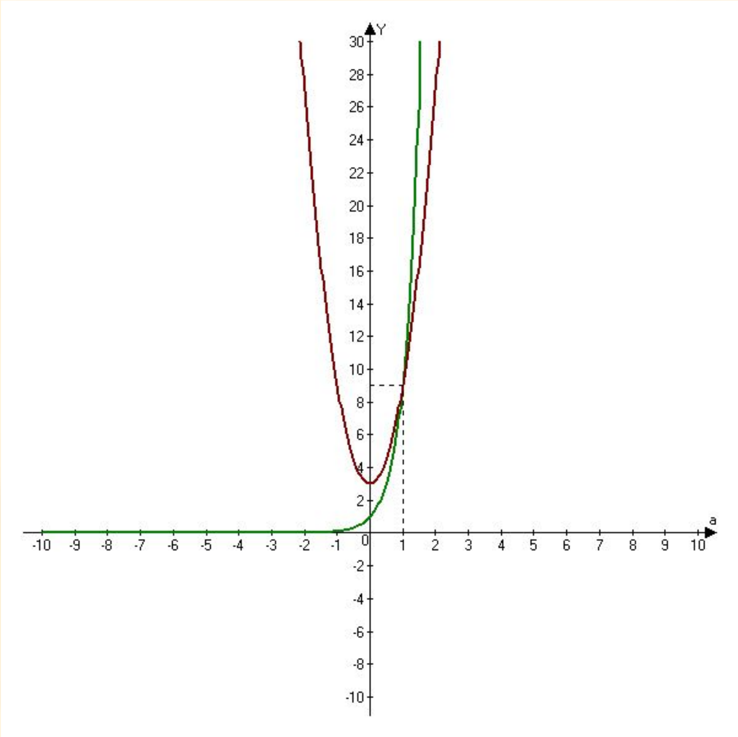
$$9^a - 3 = 6a^2$$

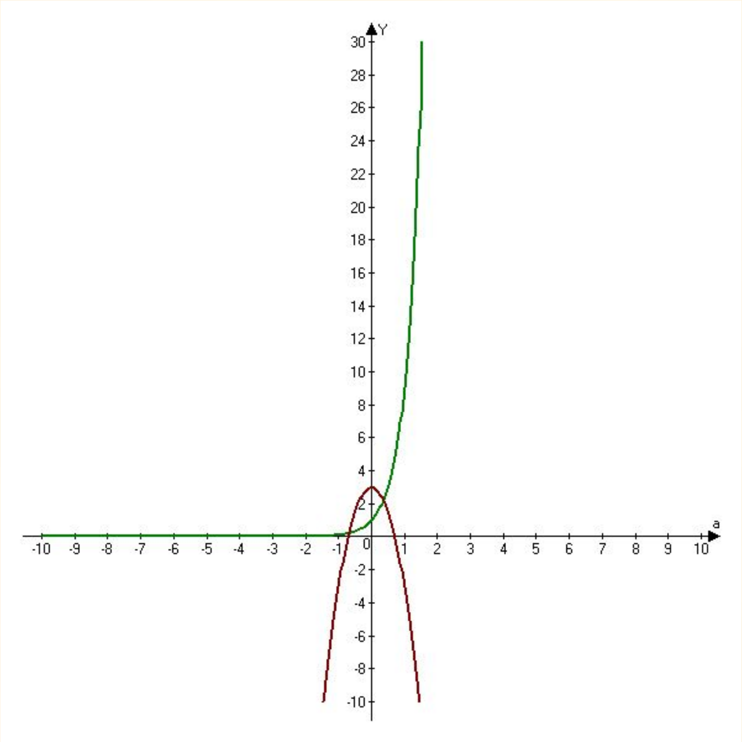
$$9^a = 6a^2 + 3$$

или

$$9^a - 3 = -6a^2$$

$$9^a = -6a^2 + 3$$





Первое уравнение имеет единственный корень 1.
Второе уравнение имеет два корня, но они оба меньше 1, а, следовательно, не удовлетворяют условию задачи.

Ответ: 1.

C5 Найдите все значения a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} x^2 + (9a+4)x + 8a^2 + 4a < 0 \\ x^2 + a^2 = 16 \end{cases}$$

имеет решения.

Решение:

Разложим на множители квадратный трехчлен

$$x^2 + (9a+4)x + 8a^2 + 4a$$

$$D = (9a+4)^2 - 4(8a^2 + 4a) = 81a^2 + 72a + 16 - 32a^2 - 16a =$$

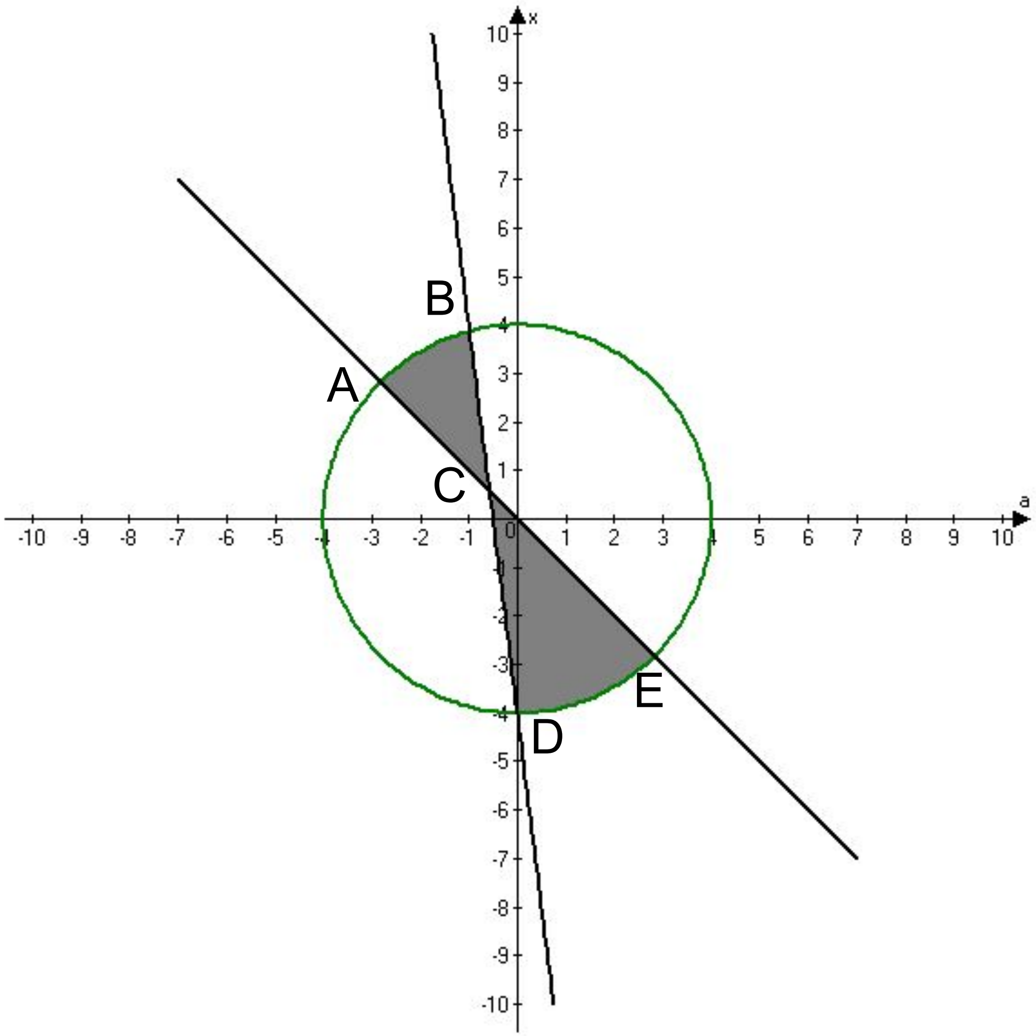
$$= 49a^2 + 56a + 16 = (7a+4)^2$$

$$x_1 = \frac{-9a - 4 - 7a - 4}{2} = -8a - 4;$$

$$x_2 = \frac{-9a - 4 + 7a + 4}{2} = -a.$$

$$x^2 + (9a+4)x + 8a^2 + 4a = (x+a)(x+8a+4)$$

$$\begin{cases}(x+a)(x+8a+4)<0\\ x^2+a^2=16\end{cases}$$



Рассмотрим плоскость Оах.

Уравнение задает на плоскости окружность с центром (0;0) радиуса 4.

Множество точек плоскости Оах, удовлетворяющих неравенству системы, лежит внутри двух вертикальных углов АСВ и DCE.

Следовательно, решениями системы являются точки дуг окружности, лежащие внутри указанных углов, а искомые значения параметра – абсциссы этих точек.

Координаты концов этих дуг, удовлетворяют системам:

для точек A и E

$$\begin{cases} x+a=0 \\ x^2+a^2=16 \end{cases}$$

$$a_1=-2\sqrt{2},\qquad a_2=2\sqrt{2}$$

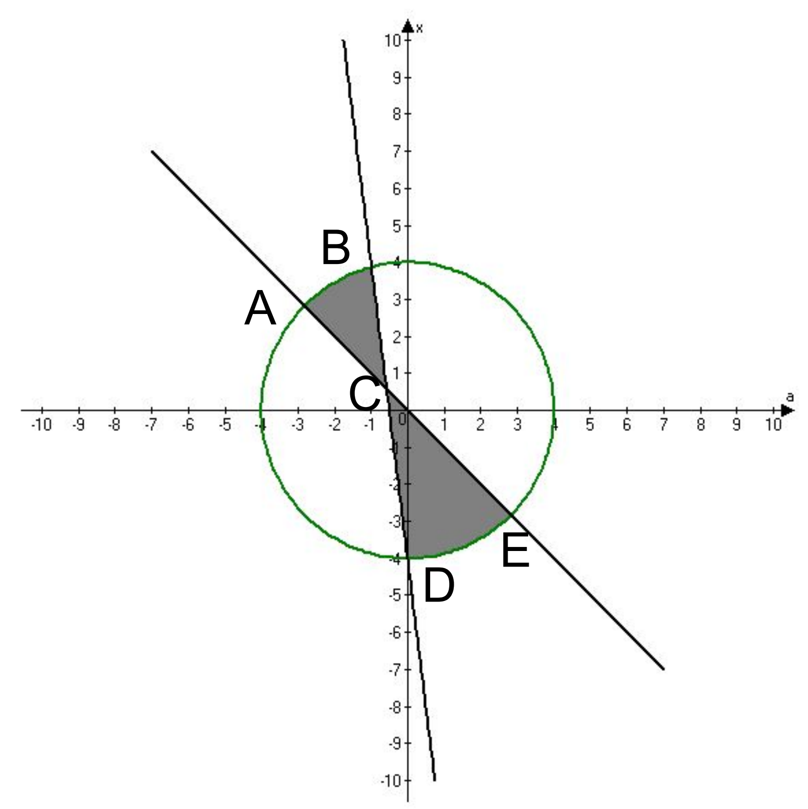
для точек B и D

$$\begin{cases} x+8a+4=0 \\ x^2+a^2=16 \end{cases}$$

$$a_3=-\frac{64}{65},\qquad a_4=0.$$

Таким образом, абсциссы точек дуг AB и DE образуют интервалы

$$(-2\sqrt{2};-\frac{64}{65})\quad и \quad (0;2\sqrt{2}).$$



Ответ: $(-2\sqrt{2};-\frac{64}{65}) \cup (0;2\sqrt{2}).$

C5 Найти все пары (x, y), $x \ge 0$, $y \le 0$, удовлетворяющие системе

$$\begin{cases} \dfrac{6}{f(x)-4} + \dfrac{1}{f(y)-1} = 2 \\ (f(y)-1)(f(x)-4) = 6f(y)-6, \end{cases}$$

где f — периодическая функция с периодом $T = 2$, определенная на всей числовой прямой, причем $f(x) = 10|x|$ при $-1 \le x < 1$.

Решение:

Пусть $f(x) - 4 = a, \quad f(y) - 1 = b.$

Тогда система примет вид:

$$\begin{cases} \dfrac{6}{a} + \dfrac{1}{b} = 2 \\ ab = 6(b+1) - 6 \end{cases}$$

$$a = 6, \quad b = 1.$$

Следовательно, $f(x) = 10, \quad f(y) = 2.$

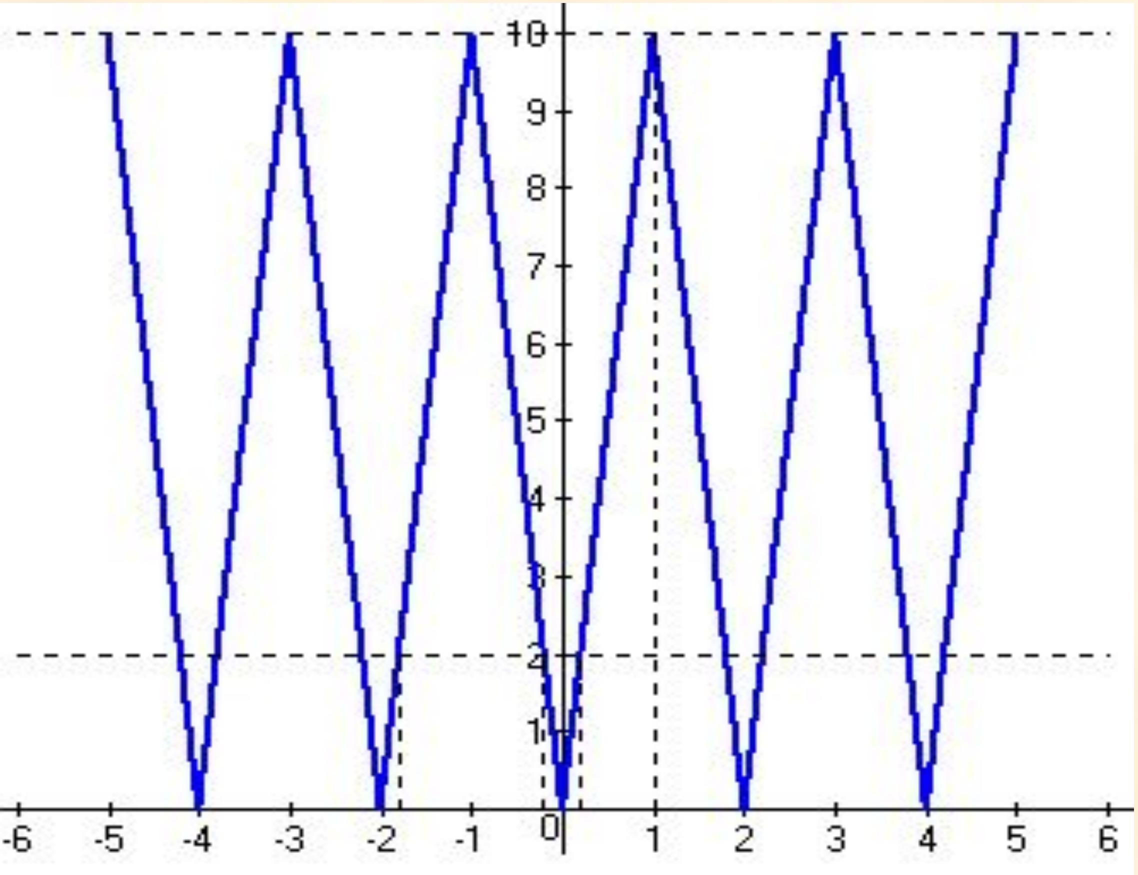
Построим график функции f(x).

Значения 10 функция принимает в точках 1+2n, n∈Z.

Значения 2 - в точках ±0,2+2k, k∈Z.

Учитывая условия, что x неотрицательный, а y неположительный, получим:

$$x = 1 + 2n, \quad y = -0{,}2 - 2k, \quad y = -1{,}8 - 2k, \quad n, k = 0,1,2...$$



$Ответ:$

$(1 + 2n; \quad -1{,}8 - 2k),$

$(1 + 2n; \quad -0{,}2 - 2k),$

$n, k = 0,1,2...$

Задачи взяты из сборников для подготовки к ЕГЭ прошлых лет.

Картинки:

http://cok.opredelim.com/tw_files2/urls_37/85/d-84226/84226_html_569b7b33.jpg

http://www.shans-online.com/images/news/2012/05/4fbde6425d02b.jpg

http://cs619731.vk.me/v619731814/24cd0/z4TNkfgIrEE.jpg

http://barn-school6.ucoz.ru/2014-2015/0412.jpg