

Дискретная математика

Список литературы

- 1. Шишмарев Ю.Е. Дискретная математика: Конспект лекций. Ч.1. – 2-е изд.- Владивосток: Изд-во ВГУЭС, 2001.**
- 2. Шишмарев Ю.Е. Дискретная математика: Конспект лекций. Ч.2.-.Владивосток: Изд-во ВГУЭС, 2002.**
- 3. Емцева Е.Д., Солодухин К.С. Дискретная математика: Курс лекций. Ч.3.-Владивосток: Изд-во ВГУЭС, 2002.**
- 4. Шишмарев Ю.Е., Емцева Е.Д., Солодухин К.С. Дискретная математика. Сборник задач. Ч.1. – 2-е изд., испр. и доп. - Владивосток: Изд-во ВГУЭС, 2002.**
- 5. Новиков Ф.А. Дискретная математика для программистов. – СПб.: Питер, 2001.**
- 6. Лекции по теории графов/ Емеличев В.А., Мельников О.И., Сарванов В.И., Тышкевич Р.И. - М.: Наука, 1990.**
- 7. Виленкин Н.Я., Виленкин А.Н., Виленкин П.А. Комбинаторика.- М.: ФИМА, МЦНМО, 2006**

Метод математической индукции ММИ

Лекция 0

Введение

- Во многих разделах математики приходится доказывать истинность предложений, зависящих от натуральной переменной, для всех значений этой переменной.
 - Один из наиболее распространенных методов доказательств истинности таких предложений является
метод математической индукции
-

Введение

□ Вспомним знаменитого Шерлока Холмса. Какой метод рассуждения применялся им при расследовании дел?

👍 Правильно, метод дедукции – метод рассуждения, при котором новое положение выводится логическим путем от общих положений к частным выводам.

□ А какой метод рассуждений является противоположным дедукции?

👍 Верно, индукция – способ рассуждения от частных положений к общим выводам.

😊 «Это невозможно!»- скажешь ты, вспомнив тему сегодняшнего урока. Математикам не свойственно делать общие выводы на основании частных случаев. Не спеши огорчаться, математики придумали свою индукцию – математическую, которая не уступает в строгости другим математическим методам.

Метод математической индукции

(1838 г., Британская энциклопедия, де Морган)



- **Огастес - де Мóрган**
(1806-1871) —
шотландский
математик и логик.
-

Метод математической индукции

- Предложение $P(n)$ считается истинным для всех натуральных значений переменной n , если выполняются следующие условия:
 - Предложение $P(n)$ верно при $n = 1$;
 - Для любого натурального числа k из предположения, что $P(n)$ верно для $n = k$, следует, что оно верно и для $n = k + 1$.
-

Схема доказательства ММИ

1. *база индукции* (проверка справедливости предложения $P(1)$);
 2. *индуктивное предположение* (допущение, что предложение $P(k)$ верно для любого натурального k);
 3. *индуктивный переход* (доказательство, что верно предложение $P(k+1)$ с помощью индуктивного предположения).
-

Пример

□ $1+2+3+\dots+100=?$

□ $1+2+3+\dots+n=?$

Иоганн Карл Фридрих Гаусс (1777–1855)



немецкий математик, астроном, физик,
иностранный член-корреспондент (1802),
иностранный почетный член (1824)
Петербургской АН.

Пример 1

- Доказать ММИ, что сумма первых нечетных натуральных чисел равна n^2 , т.е. доказать формулу

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2 \quad (1)$$

Пример 1

□ Доказательство.

1. База индукции. Докажем, что формула верна при $n = 1$. Так как значение говорит о количестве слагаемых в левой части равенства, то левая часть равенства представляет собой одно слагаемое, а именно первое, т.е. 1. Значение правой части равенства находится непосредственной подстановкой вместо n единицы, т.е. $1^2 = 1$. Сравнивая левую и правую части равенства, имеем $1 = 1$ (верно).

Пример 1

2. Индуктивное предположение.

Допустим, что равенство (1) верно при $n = k$, для любого натурального k , т.е. верна формула

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2k - 1) = k^2$$

Пример 1

3. **Индуктивный переход.** Докажем, что равенство (1) верно при $n = k + 1$, т.е.

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2k - 1) + (2(k + 1) - 1) = (k + 1)^2 \quad (2)$$

Замечание. В левой части равенства мы написали предпоследнее слагаемое, что дает возможность использовать при доказательстве индуктивное предположение.

Используя пункт 2), заменим в левой части равенства (2) первые k слагаемых на выражение k^2 , а последнее слагаемое упростим, раскрыв скобки. Тогда левая часть примет вид

$$(1 + 3 + 5 + \dots + (2k - 1)) + (2(k + 1) - 1) = k^2 + (2k + 2 - 1) = k^2 + 2k + 1$$

Свернем последнее выражение, используя формулу квадрата суммы:

$$k^2 + 2k + 1 = (k + 1)^2.$$

Итак, левая часть имеет вид $(k + 1)^2$, а, значит, равна правой. Отсюда, формула (1) верна для любого натурального n .

Другая формулировка ММИ

- Заметим, что индуктивный процесс не обязан начинаться с 1. В качестве базы индукции может выступать любое целое число a , и тогда формулировка метода математической индукции примет вид.
 - Предложение $P(n)$ считается истинным для всех целых значений переменной $n \geq a$, если выполняются следующие условия:
 1. Предложение $P(n)$ верно при $n = a$;
 2. Для любого целого числа $k \geq a$ из предположения, что $P(n)$ верно для $n = k$, следует, что оно верно и для $n = k + 1$.
-

Пример 2

- При каких натуральных значениях верно неравенство $2^n > n^2 + 1$.
-

Замечание

- Необходимо отметить, что важно соблюдать всю цепочку индуктивного доказательства.
-

Пример 3

- Докажем ММИ, что каждое натуральное число равно следующему за ним , таким образом, доказывая, что все натуральные числа равны между собой.
 - **Доказательство.** Пусть утверждение верно при некотором k , т.е. $k = k + 1$. Покажем, что тогда $k + 1 = k + 2$. Действительно, прибавим к обеим частям единицу $k = k + 1 \Rightarrow k + 1 = k + 2$. Значит, все натуральные числа равны между собой.
-

Пример 4

- Докажем, что все кошки на земле серые.
 - Точнее покажем, что любое конечное общество кошек одного цвета.
 - Доказательство поведем индукцией по n - числу кошек в обществе.
-

Пример 4

1. **База индукции.** Очевидно, что $P(1)$ истинно.
 2. **Индуктивное предположение.** Допустим, что утверждение $P(k)$ истинно для любого натурального k .
 3. **Индуктивный переход.** Рассмотрим произвольный набор из $k+1$ кошки. Выведем из этого общества одну кошку, назовем ее Муркой. Оставшиеся k кошек по предположению индукции одного цвета. Вернем Мурку и заберем другую, которую назовем Нюркой. Опять по предположению индукции оставшиеся в обществе k кошек одного цвета, причем такого же, как Мурка и Нюрка.
- ☐ Вывод: любое конечное общество кошек одного цвета.
- ☐ **Найти ошибку в рассуждении.**
-