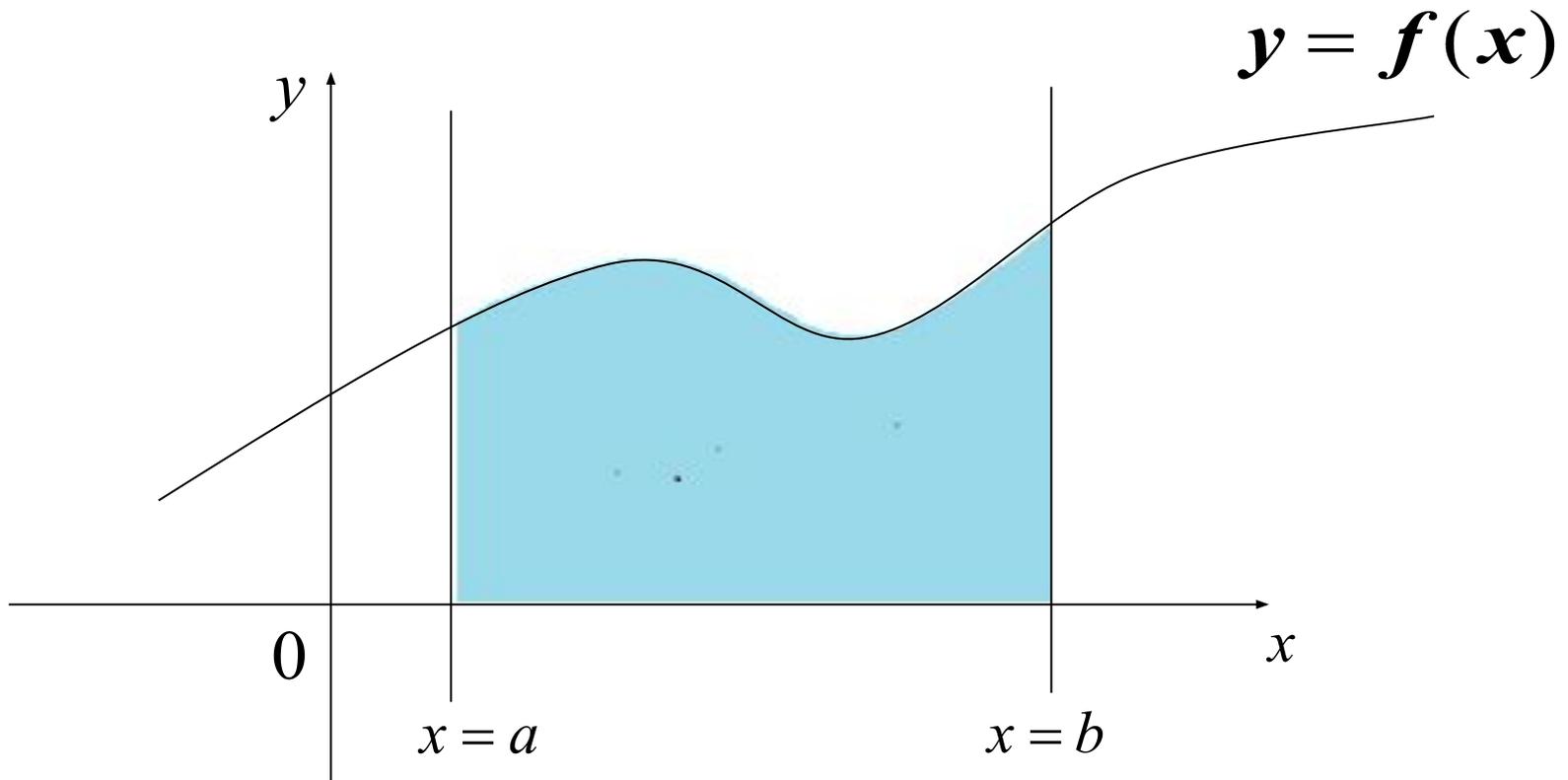


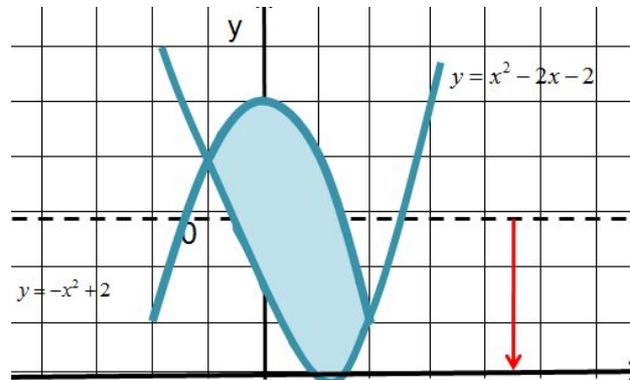
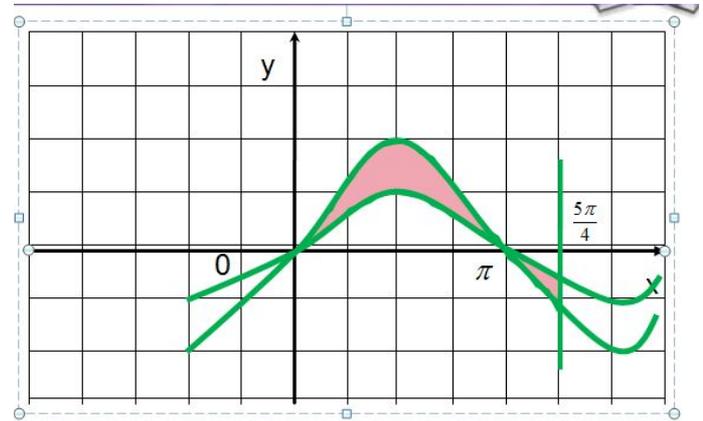
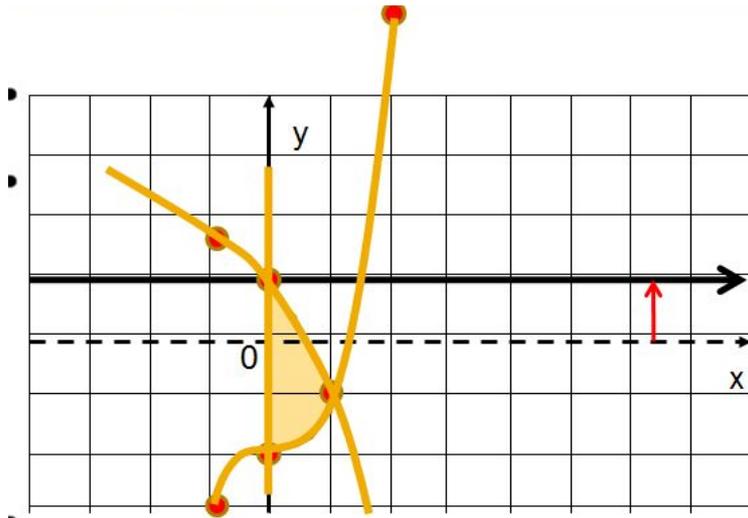


Вычисление площадей плоских фигур с помощью определенного интеграла

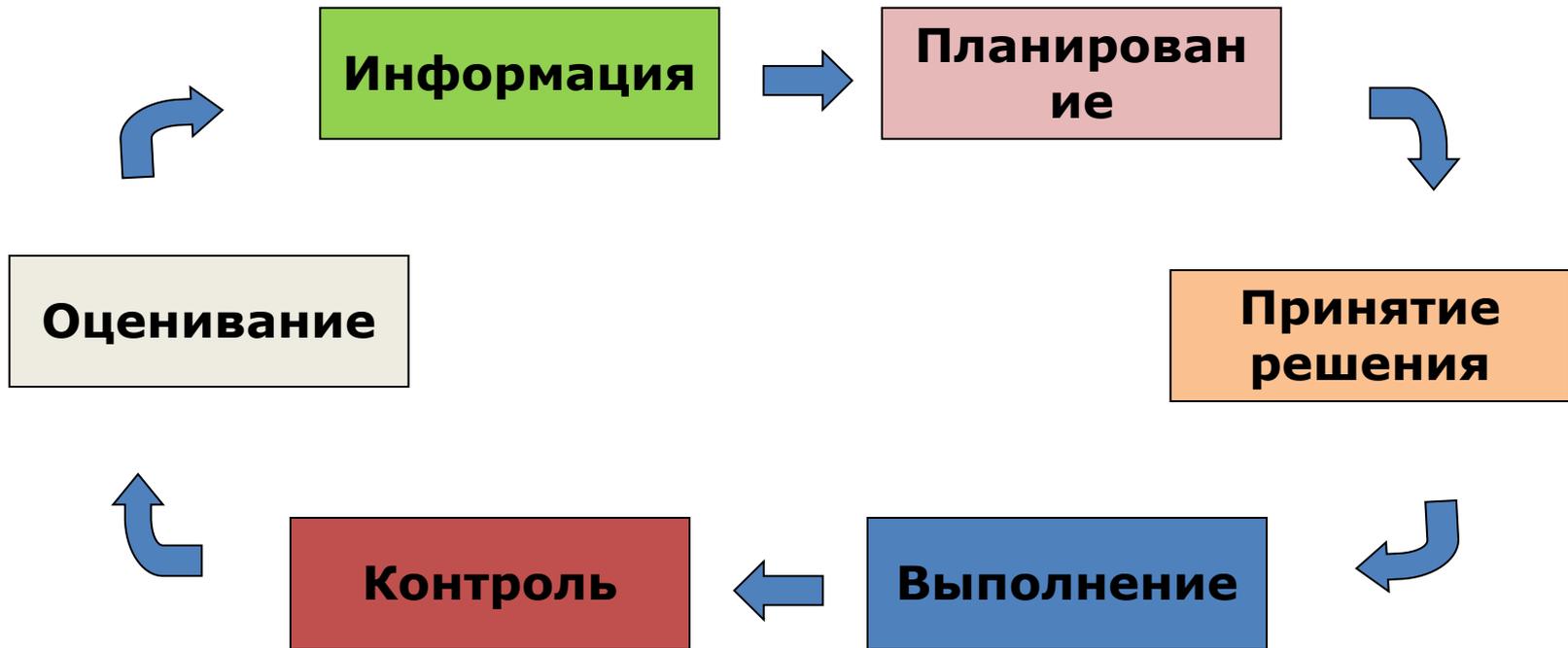
Криволинейная трапеция



$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$



Этапы работы





ЗАДАЧА



Перед зданием школы решено разбить клумбу. Но по форме клумба не должна быть круглой, квадратной или прямоугольной. Она должна содержать в себе прямые и кривые линии. Пусть она будет плоской фигурой, ограниченной линиями

$$Y = 4/X + 2; X = 4; Y = 6.$$

Необходимо ещё подсчитать сколько денег можно получить за вскапывание этой клумбы, если за каждый м² выплачивается 50 руб.?

Цели урока:

- 1) самостоятельно спланировать свою работу;
- 2) научиться составлять алгоритм решения задач на вычисление площади плоских фигур;
- 3) уметь аргументировать свою точку зрения;
- 4) уметь концентрировать внимание на задании;
- 5) научиться применять определённый интеграл при решении практических задач;
- 6) учиться анализировать выполненную работу.

Алгоритм последовательности действий при вычислении площади плоской фигуры

(Задание 1):

- 1. По условию задачи сделать схематический чертеж;**
- 2. Представить искомую функцию, как сумму или разность площадей криволинейных трапеций, выбрать соответствующую формулу;**
- 3. Найти пределы интегрирования (a и b) из условия задачи и чертежа t_1 и t_2 , если они не заданы;**
- 4. Вычислить площадь каждой криволинейной трапеции и площадь искомой фигуры.**

Задание 2

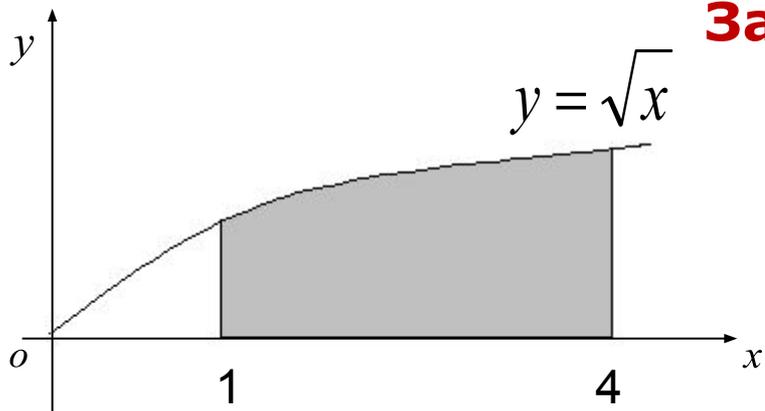


Рис. 1

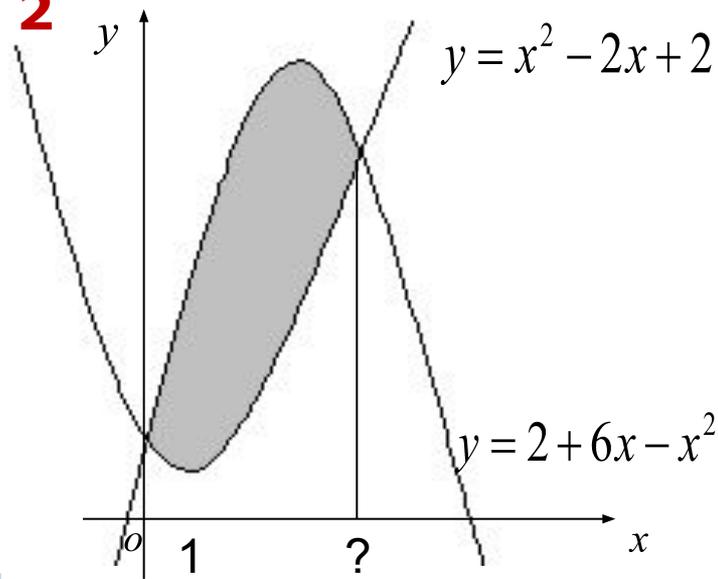


Рис. 2

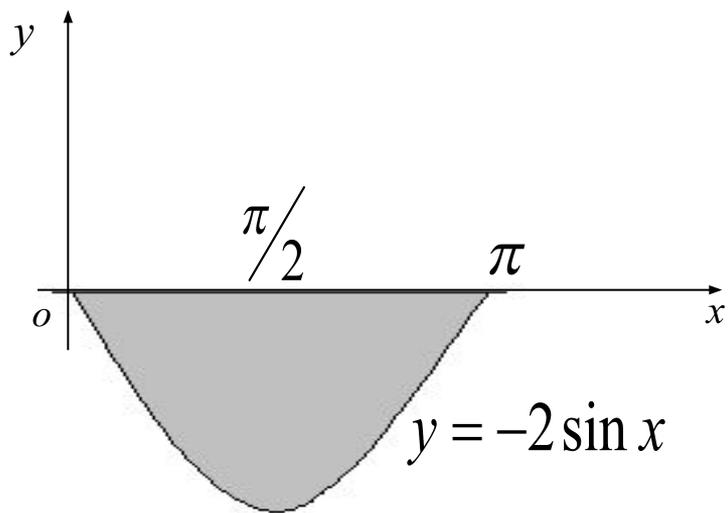


Рис. 3

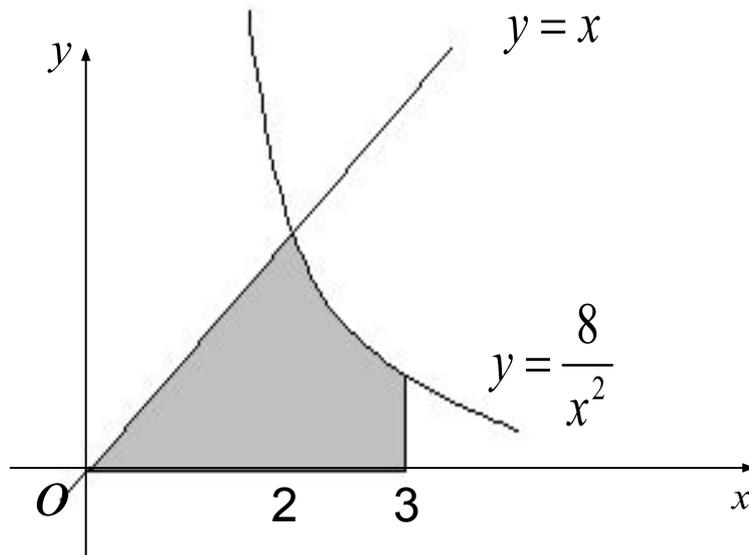


Рис. 4



Вычислить площадь земельного участка ограниченного графиком функции:

1) $y = 3x^2$ и прямыми $x=1$, $x=2$, $y=0$.

2) $y = 2x$, прямыми $x=2$, $x=3$ и отрезком оси Ox от 2 до 3.

3) $y=x^3$ прямыми $x=1$ $x=3$ и отрезком оси Ox от 1 до 3.

4) Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями
 $y = -x^2 + 9$, $y=0$.

• Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями:

$$y = x^2 \text{ и } y = -x + 2.$$



ОТВЕТЫ К ЗАДАЧАМ (Задание 3)

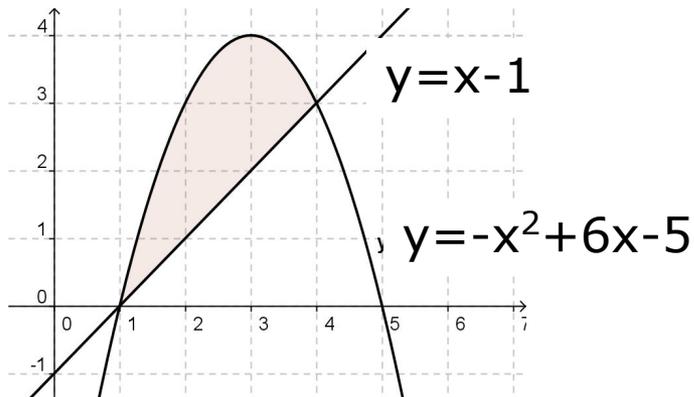
Вариант 1	Вариант 2	Вариант 3	Вариант 4	Вариант 5
7 кв. ед	5 кв. ед.	4 кв. ед.	36 кв. ед.	4,5 кв. ед.

Задание 4

Вариант I

Проверьте правильность решения, исправьте найденные ошибки.

Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:
 $y=x-1$ и $y=-x^2+6x-5$



Применим формулу $S = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx$
По рисунку $a=1$ $b=4$

$$S = \int_1^4 (-x^2 + 6x - 5 - (x - 1)) dx = \int_1^4 (-x^2 + 5x - 6) dx = \left. \frac{-x^3}{3} + 2,5 \cdot x - 6x \right|_1^4 =$$

$$\frac{-64}{3} + 2,5 \cdot 4 - 24 + \frac{1}{3} - 2,5 + 6 = -21 + 10 - 24 - 2,5 + 6 = -31,5$$

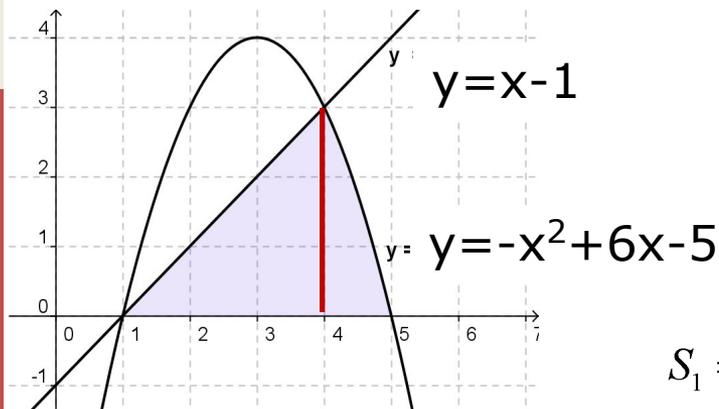
$$S = |-31,5| = 31,5$$

Задание 4 Вариант II

Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:

$$y=x-1, y=-x^2+6x-5 \text{ и } y=0$$

Решение:



Площадь искомой фигуры равна разности площадей двух криволинейных трапеций, а значит разности двух определённых интегралов на промежутке $[1;4]$.

$$\begin{aligned} S_1 &= \int_1^4 (-x^2 + 6x - 5) dx = \left. \frac{-x^3}{3} + 3x^2 - 5x \right|_1^4 = \\ &= -\frac{64}{3} + 3 \cdot 16 - 20 - \left(\frac{-1}{3} + 3 - 5 \right) = -\frac{64}{3} + 48 - 20 + \frac{1}{3} + 2 = 9 \end{aligned}$$

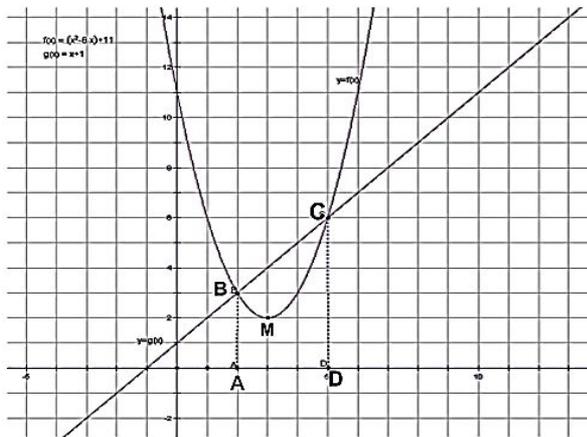
$$\begin{aligned} S_2 &= \int_1^4 (x-1) dx = \left. \frac{x^2}{2} - x \right|_1^4 = \frac{16}{2} - 4 - \frac{1}{2} + 1 = \\ &= 8 - 4 - \frac{1}{2} + 1 = 4,5 \end{aligned}$$

$$S_1 - S_2 = 9 - 2,5 = 6,5$$

Задание 4 Вариант III

Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:
 $y=x+1$, $y=x^2-6x+11$.

Найдём пределы интегрирования по графику $a=1$ $b=5$.



$$S = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx \quad , \quad \text{где } f(x) = x^2 - 6x + 11 \quad g(x) = x + 1$$

$$\begin{aligned} S &= \int_1^5 (x^2 - 6x + 11 - x - 1) dx = \left. \frac{x^3}{3} - 5x + 10 \right|_1^5 = \frac{125}{3} - 25 + 10 - \frac{8}{3} + 10 - 10 = \\ &= 117/3 - 15 = 39 - 15 = 24 \end{aligned}$$



ЗАДАЧА



Перед зданием школы решено разбить клумбу. Но по форме клумба не должна быть круглой, квадратной или прямоугольной. Она должна содержать в себе прямые и кривые линии. Пусть она будет плоской фигурой, ограниченной линиями

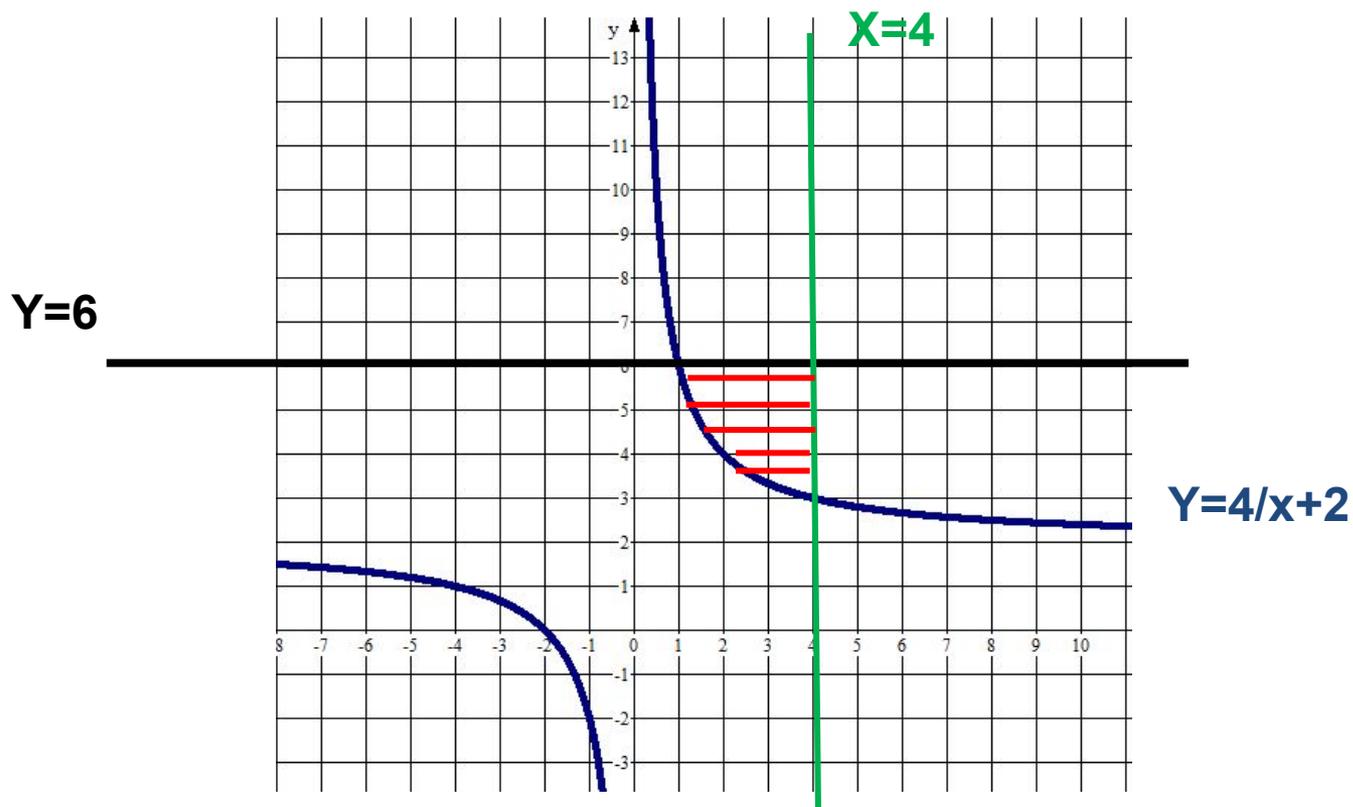
$$Y = 4/X + 2; X = 4; Y = 6.$$

Необходимо ещё подсчитать сколько денег можно получить за вскапывание этой клумбы, если за каждый m^2 выплачивается 50 руб.?

1

Эталон решения

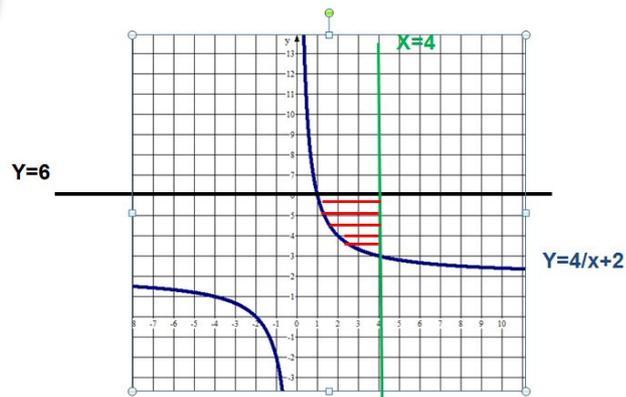
Изобразим линии на координатной плоскости и выделим искомую фигуру.



Эталон решения



2



Вычислим площадь полученной фигуры

по формуле:

$$S = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx$$

где $f(x) = 6$, а $g(x) = 4/x + 2$

Эталон решения



3

Найдем пределы интегрирования:

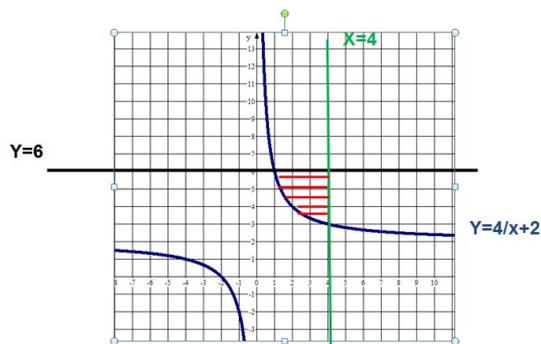
$X = 4$ – по условию, следовательно, абсцисса точки пересечения графиков

$$Y = 4/X + 4 \text{ и } Y = 6.$$

Решим уравнение $4/X + 2 = 6;$

$$4/X = 4$$

$$X = 1.$$



4

Эталон решения

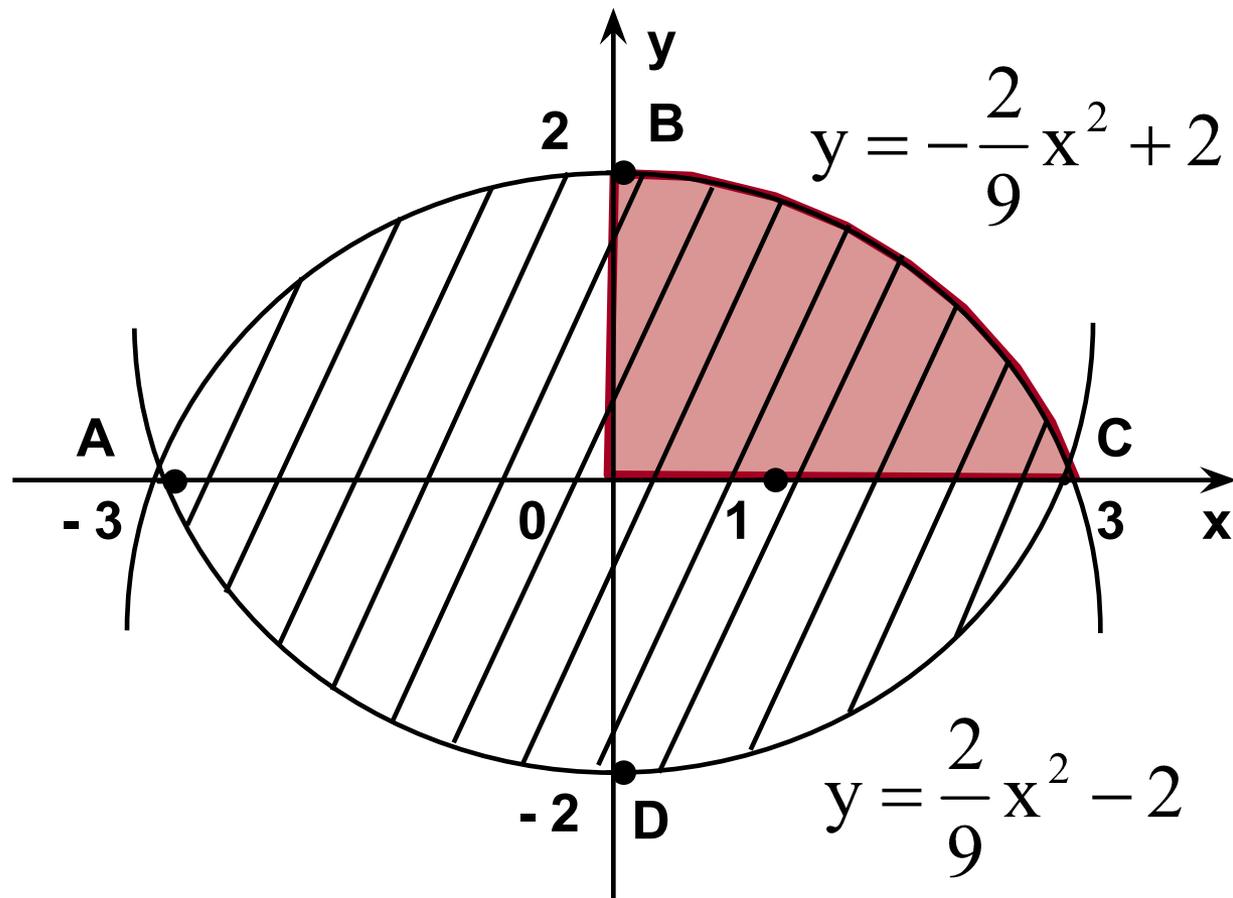


$$\begin{aligned}\int_1^4 \left(6 - \frac{4}{x} - 2\right) dx &= \int_1^4 \left(4 - \frac{4}{x}\right) dx = \\ &= 4x - \ln x \Big|_1^4 = 16 - \ln 4 - 4 + \ln 1 \\ &= 12 - \ln 4 \approx 6,4 (\text{м}^2)\end{aligned}$$

Так как за каждый квадратный метр выплачивается 50 рублей, то заработок составит:

$$6,4 * 50 = 320 \text{ (рублей).}$$

Укажите различные способы вычисления площади фигуры и выберите самый рациональный.



$$S_{ABCD} = 4S_{OBC} = 4 \int_0^3 \left(-\frac{2}{9}x^2 + 2 \right) dx$$



Цели урока:

- 1) самостоятельно спланировать свою работу;
- 2) научиться составлять алгоритм решения задач на вычисление площади плоских фигур;
- 3) уметь аргументировать свою точку зрения;
- 4) уметь концентрировать внимание на задании;
- 5) научиться применять определённый интеграл при решении конкретных задач;
- 6) учиться анализировать выполненную работу.