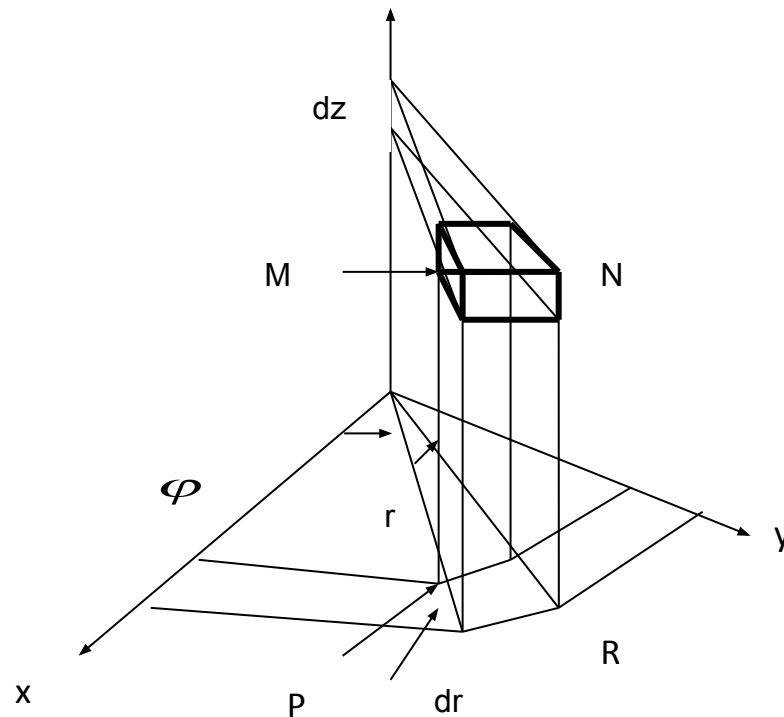


Презентация по
Математическому Анализу
Семинар 32

Вычисление тройных интегралов Цилиндрические координаты

Отнесем область T к системе цилиндрических координат (r, φ, z) , в которой положение точки M в пространстве определяется полярными (r, φ) координатами ее проекции P на плоскости OXY и ее аппликатой z .

Выберем взаимное расположение осей координат как указано на следующем рисунке



Связь между декартовыми и цилиндрическими координатами точки следующая:

$$x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi, z = z \quad (*)$$

Преобразование интеграла $\iiint_T f(x, y, z) dV$ к цилиндрическим координатам производится совершенно аналогично преобразованию двойного интеграла к полярным координатам.

Для этого нужно в $f(x, y, z)$ переменные x, y, z заменить по формулам (*).

Элемент объема положить равным $dV = r dr d\varphi dz$ и вычислить интеграл по области, построенной во вспомогательной системе координат $O_1 r \varphi z$.

Получаем

м:

$$\iiint_T f(x, y, z) dV = \iiint_{T^*} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi, z) r dr d\varphi dz$$

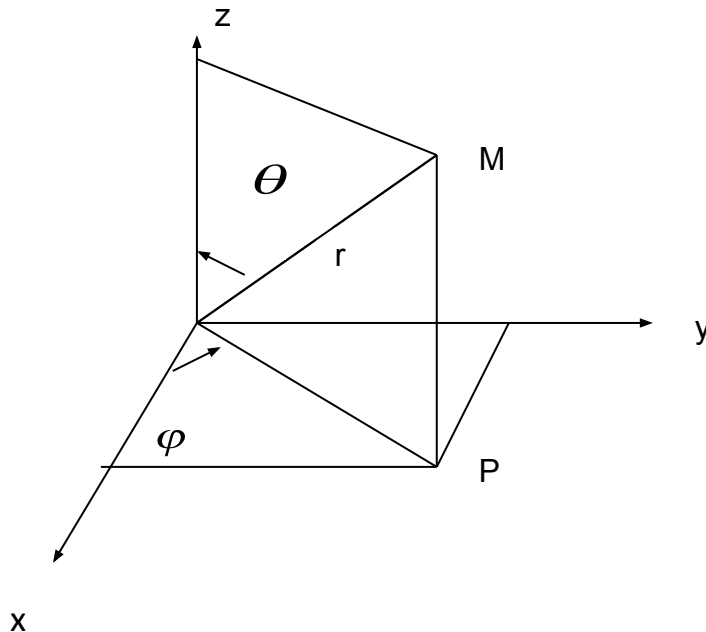
Если рассмотреть в качестве области интегрирования внутреннюю часть прямого цилиндра $r \leq R, 0 \leq z \leq h$, то все пределы интегрирования постоянны

$$I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R r dr \int_0^h f(r \cos \varphi, r \sin \varphi, z) dz$$

Сферические координаты

Отнесем область интегрирования T к сферическим координатам (r, φ, θ) .

В этой системе координат положение точки M пространства определяется ее расстоянием r от начала координат (длина радиус-вектора точки), углом θ между радиус-вектором точки и осью OZ и углом φ между проекцией радиус-вектора точки на плоскость OXY и осью OX .



Установим связь между декартовыми и сферическими координатами.

**Из рисунка
имеем:**

$$z = MP = r \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = r \cos \theta; OP = r \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = r \sin \theta; x = OP \cos \varphi; y = OP \sin \varphi$$

Окончательн

о:
$$x = r \sin \theta \cos \varphi; y = r \sin \theta \sin \varphi; z = r \cos \theta$$

Для элемента объема получаем
$$dV = r^2 \sin \theta \cdot dz \cdot d\varphi \cdot d\theta \quad (**)$$

выражение

Заменив в тройном интеграле x, y, z по формулам (*) и взяв элемент объема равным (**), получаем

$$\iiint_T f(x, y, z) dV = \iiint f(r \sin \theta \cos \varphi, r \sin \theta \sin \varphi, r \cos \theta) r^2 \sin \theta \cdot dr \cdot d\varphi \cdot d\theta$$

Примеры с

решениями:

1. Вычислит $I = \iiint_T x^2 dx dy dz$, если T – шар $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$

Решение Перейдем к сферическим

координатам.
изменяются

так:

В области T
координаты

ρ, φ, θ

$$0 \leq \rho \leq R, 0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq \theta \leq \pi$$

Следовательно

но,

$$I = \iiint_T x^2 dx dy dz = \iiint_T \rho^4 \sin^3 \theta \cos^2 \varphi d\rho d\varphi d\theta = \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta \int_0^{2\pi} \cos^2 \varphi d\varphi \int_0^R \rho^4 d\rho =$$

$$\frac{R^5}{5 \cdot 2} \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta \left[\varphi + \frac{1}{2} \sin 2\varphi \right]_0^{2\pi} = \frac{\pi R^5}{5} \int_0^\pi (\cos^2 \theta - 1) d(\cos \theta) = \frac{4\pi R^5}{15}$$

2. Вычислит $I = \iiint_T z \sqrt{x^2 + y^2} dx dy dz$, если область T ограничена
 ь цилиндром

$$x^2 + y^2 = 2x \quad \text{и плоскостями } y=0, z=0, \\ z=a.$$

Решение Перейдем к цилиндрическим

координатам.
 Уравнение цилиндра в этих координатах примет
 вид:

$$\rho^2 \cos^2 \varphi + \rho^2 \sin^2 \varphi = 2\rho \cos \varphi \Rightarrow \rho = 2 \cos \varphi$$

В области T координаты ρ, φ, θ изменяются
 так:

$$0 \leq \rho \leq 2 \cos \varphi, 0 \leq \varphi \leq \pi / 2, 0 \leq z \leq a$$

Следовательно

но,

$$I = \iiint_T z \sqrt{x^2 + y^2} dx dy dz = \iiint \rho^2 d\rho d\varphi dz = \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{2 \cos \varphi} \rho^2 d\rho \int_0^a z dz = \frac{1}{2} a^2 \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{2 \cos \varphi} \rho^2 d\rho =$$

$$\frac{4}{3} a^2 \int_0^{\pi/2} \cos^3 \varphi d\varphi = \frac{4}{3} a^2 \int_0^{\pi/2} (1 - \sin^2 \varphi) d(\sin \varphi) = \frac{4}{3} a^2 \left[\sin \varphi - \frac{1}{3} \sin^3 \varphi \right]_0^{\pi/2} = \frac{8}{9} a^2$$

3. Вычислит $I = \iiint_T (x^2 + y^2) dx dy dz$, если T – верхняя половина
 ь шара
 $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$

Решение Перейдем к сферическим
 . координатам.
 изменяются

В области T
 координаты

ρ, φ, θ

так: $0 \leq \rho \leq R, 0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq \theta \leq \pi / 2$

**Следователь
 но,**

$$I = \iiint_T (x^2 + y^2) dx dy dz = \iiint_T \rho^4 \sin^3 \theta d\rho d\varphi d\theta = \int_0^{\pi/2} \sin^3 \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R \rho^4 d\rho =$$

$$= \frac{2\pi R^5}{5} \int_0^{\pi/2} (\cos^2 \theta - 1) d(\cos \theta) = \frac{2\pi R^5}{15} \left[\frac{1}{3} \cos^3 \theta - \cos \theta \right]_0^{\pi/2} = \frac{4}{15} \pi R^5$$

**Примеры для самостоятельного
решения:**

1. Вычислит $I = \iiint_T x \cdot y \cdot z dx dy dz$, если область T ограничена
сферой

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1 \quad \text{и плоскостями } x=0, y=0, \\ z=0.$$

2. Вычислит $I = \iiint_T (x^2 + y + z^2) dx dy dz$ если область T ограничена
цилиндром

$$x^2 + z^2 = 1 \quad \text{и плоскостями } y=0, \\ y=1.$$

3. Вычислит $I = \iiint_T dx dy dz$, если T – шар $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$

4. Вычислит $I = \iiint_T \sqrt{1 + (x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} dx dy dz$, если T – шар $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$

5. Вычислить $I = \iiint_T (x^2 + y^2) dx dy dz$, где область T ограничена
поверхностями

$$z = (x^2 + y^2)/2, z = 2$$