



Лекція №2.

Тема Визначники матриць (продовження) Системи лінійних рівнянь.

План

1. Властивості визначників.
2. Правило обчислення визначника n - го порядку
3. Розв'язування систем n лінійних рівнянь з n невідомими Формули Крамера.
4. Обернена матриця.
5. Розв'язування систем n лінійних рівнянь з n невідомими за допомогою оберненої матриці.



Властивості визначників

Властивість 1.

Значення визначника не змінюється при транспонуванні.

Приклад 1.
$$\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = -2, \quad \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = -2$$

Наслідок. У визначнику рядки та стовпці мають однакові властивості.

Властивість 2.

Визначник змінить знак на протилежний, якщо поміняти місцями будь-які два рядки.

Приклад 2.
$$\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = -2 \quad \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 2$$



Властивості визначників

Властивість 3.

Визначник, стовпець якого складається з нулів, дорівнює нулеві.

Приклад 3
$$\begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} = 0$$

Властивість 4.

Визначник, що має два однакових стовпця, дорівнює нулеві.

Приклад 4
$$\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 0$$



Властивості визначників

Властивість 5.

Визначник, що має два пропорційні стовпці, дорівнює нулю.

Приклад 5
$$\begin{vmatrix} 3 & 9 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 0$$

Властивість 6.

Визначник зростає у k раз, якщо усі елементи одного стовпця (рядка) помножити на однакове число k .

Наслідок. Спільний множник елементів одного стовпця можна винести за знак визначника.

Приклад 6

а)
$$\begin{vmatrix} 6 & 8 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 8 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 6, \quad б) \quad \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 3 \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 6$$



Властивості визначників

Властивість 7.

Значення визначника не зміниться, якщо до елементів якогось стовпця додати (відняти) відповідні елементи іншого стовпця, що помножені на одне і те ж число.

Приклад 7

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 0,$$

1 рядок $\times(-4)$ +2 рядок; 1 рядок $\times(-7)$ +3 рядок

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -12 \end{vmatrix} = 0$$



Властивості визначників

Властивість 8.

Якщо у визначнику елементи i -го рядка є сумою двох доданків, то він дорівнює сумі двох відповідних визначників.

$$\begin{vmatrix} a_{11} + b_1 & a_{12} + b_2 & a_{13} + b_3 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Приклад 8

$$\begin{vmatrix} 5 & 6 & 7 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix}.$$



Правило обчислення визначника n -го порядку.

Для обчислення визначників порядку $n > 3$ використовують алгебраїчні доповнення

Мінори та алгебраїчні доповнення елементів визначника

Мінором M_{ij} елемента a_{ij} називається визначник $(n-1)$ -го порядку, утворений з визначника n -го порядку, викресленням i -го рядка та j -го стовпця.

Алгебраїчним доповненням A_{ij} елемента a_{ij} визначника називається мінор цього елемента взятий з відповідним знаком.

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$



Правило обчислення визначника n- го порядку.

Приклад 9

Знайти алгебраїчні доповнення елементів a_{21} та a_{33} визначника

Розв'язок
$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 4 & 2 \\ -3 & 1 & 4 \end{vmatrix}$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} M_{21} = -M_{21} \quad A_{33} = (-1)^{3+3} M_{33} = M_{33}$$

$$M_{21} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 4 & 2 \\ -3 & 1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 13$$

$$M_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 4 & 2 \\ -3 & 1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 5$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot 13 = -13 \quad A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot 5 = 5$$



Правило обчислення визначника n- го порядку.

Приклад 10

Записати алгебраїчне доповнення елемента a_{23} визначника

$$\begin{vmatrix} 5 & 7 & 6 & -3 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 7 \\ -8 & -2 & -4 & 3 \end{vmatrix}$$

Розв'язок

$$a_{23} = 2 \quad M_{23} = \begin{vmatrix} 5 & 7 & 6 & -3 \\ \cancel{4} & \cancel{1} & \cancel{2} & \cancel{3} \\ 0 & -1 & 3 & 7 \\ -8 & -2 & -4 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 7 & -3 \\ 0 & -1 & 7 \\ -8 & -2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot M_{23} = -M_{23}$$

$$A_{23} = 313$$



Правило. Розклад визначника за елементами рядка (стовпця).

(теорема Лапласа (23.03.1747-5.03.1827)).

Визначник n-го порядку дорівнює сумі добутків усіх елементів будь-якого стовпця (або рядка) на відповідні їм алгебраїчні доповнення.

У випадку використання i-го рядка правило має вигляд

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{21} & \dots & a_{2k} & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ik} & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nk} & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{i1} \cdot A_{i1} + a_{i2} A_{i2} + \dots + a_{ik} \cdot A_{ik} + \dots + a_{in} \cdot A_{in}$$



Обчислення визначника порядку $n \geq 3$.

Приклад 11

$$\begin{vmatrix} 2 & 12 & 11 & 3 \\ 4 & -7 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ -13 & 2 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 2 \cdot A_{11} + 4 \cdot A_{21} + 0 \cdot A_{31} + (-13) \cdot A_{41} = 2 \cdot \begin{vmatrix} -7 & 2 & 5 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 5 \end{vmatrix} -$$

$$-4 \cdot \begin{vmatrix} 12 & 11 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 5 \end{vmatrix} + 13 \cdot \begin{vmatrix} 12 & 11 & 3 \\ -7 & 2 & 5 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot (70 + 4 + 20 - 10) - 4 \cdot (-120 + 22 + 12 - 55) +$$

$$+ 13 \cdot (24 + 42 + 55 - 6 + 120 + 77) = 168 + 564 + 4056 = 4788.$$



Обернена матриця.

Матрицю A^{-1} називають **оберненою** до матриці A , якщо виконуються рівності

$$A \times A^{-1} = A^{-1} \times A = E.$$

Умови існування A^{-1} до A :

- 1) A - квадратна;
- 2) $\Delta A \neq 0$.

Обернена матриця має вигляд

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta A} \times \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

де $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ – алгебраїчні доповнення елемента a_{ij} .



Обернена матриця.

Приклад

Знайти матрицю, обернену до матриці

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Розв'язок

1) Обчислюємо значення визначника матриці A

$$\Delta A = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 7 \neq 0$$

2) Знаходимо алгебраїчні доповнення усіх елементів



Приклад 12 (продовження)

$$\begin{aligned} A_{11} &= (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1; & A_{21} &= (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1; & A_{31} &= (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -2; \\ A_{12} &= (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -2; & A_{22} &= (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 5; & A_{32} &= (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 4; \\ A_{13} &= (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 3; & A_{23} &= (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -4; & A_{33} &= (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1. \end{aligned}$$

3) Записуємо обернену до А матрицю

$$A^{-1} = \frac{1}{7} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -2 & 5 & 4 \\ 3 & -4 & 1 \end{pmatrix}; \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{7} & \frac{1}{7} & -\frac{2}{7} \\ -\frac{2}{7} & \frac{5}{7} & \frac{4}{7} \\ \frac{3}{7} & -\frac{4}{7} & \frac{1}{7} \end{pmatrix}$$



Систему алгебраїчних рівнянь називають **лінійною**, якщо вона може бути записана у вигляді

[illegible]

де $x_1, x_2, \dots, x_n$, - невідомі; a_{ij} - коефіцієнти системи;
 b_k - вільні члени.



Системи лінійних рівнянь

Розв'язком системи називають множину дійсних чисел $c_1, c_2, \dots, c_n$, підстановка яких у систему замість невідомих, перетворює кожне рівняння у тотожність. Систему лінійних рівнянь (С. Л. Р.) називають **сумісною** якщо вона має хоч би один розв'язок, **несумісною** в протилежному випадку.

системи лінійних рівнянь

<u>сумісні</u>		<u>несумісні</u>
Визначені мають єдиний розв'язок	Невизначені мають безліч розв'язків	не мають жодного розв'язку



Системи лінійних рівнянь

Знаходження єдиного розв'язку

Системи n лінійних рівнянь з n невідомими .

С. Л. Р. має єдиний розв'язок, якщо визначник матриці з коефіцієнтів цієї системи не дорівнює нулю

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{21} & \dots & a_{2k} & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ik} & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nk} & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ 0 & 0 & b_{33} & b_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & b_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$$



Системи n лінійних рівнянь з n невідомими

Метод Крамера.

Розв'язком С.Л.Р. за правилом Крамера буде сукупність значень невідомих обчислених за формулами:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \dots, x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta},$$

$$\text{де } \Delta_j = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1,j-1} b_1 a_{1,j+1} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2,j-1} b_2 a_{2,j+1} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{n,j-1} b_n a_{n,j+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, j = \overline{1, n}$$

Цей визначник отримано шляхом послідовної заміни j -го стовпця визначника Δ стовпцем чисел $b_1, b_2, \dots, b_n$.



Приклад 13

Розв'язати систему лінійних рівнянь за формулами Крамера:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 1, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 5, \\ 3x_1 - 2x_2 = 6. \end{cases}$$

Розв'язок

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -6 - (-3) = -3.$$

$\Delta \neq 0$, можемо застосувати правило Крамера

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 5 & 1 & -1 \\ 6 & -2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 6 & -1 & 0 \\ 6 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 6 & -1 \\ 6 & -2 \end{vmatrix} = 6 \cdot (-2) - (-1) \cdot 6 = -6.$$



Приклад 13 (продовження)

За формулами Крамера: $x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-6}{-3} = 2$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & -1 \\ 3 & 6 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 6 & 0 \\ 3 & 6 & 6 \end{vmatrix} = 0.$$

$$x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{0}{-3} = 0$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \\ 3 & -2 & 6 \end{vmatrix} = 3.$$

$$x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{3}{-3} = -1$$

Відповідь: $\{2, 0, -1\}$



Системи n лінійних рівнянь з n невідомими

Метод оберненої матриці.

Якщо позначити $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ik} & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nk} & a_{nn} \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}$

то С.Л. Р. , згідно з правилом множення матриць та умовою рівності матриць, можна записати у матричній формі

$$A \times X = B$$

Тоді $A^{-1} \cdot A \times X = A^{-1} \cdot B \quad (A^{-1} \cdot A = E)$

$$X = A^{-1} \cdot B$$

де A^{-1} - матриця обернена до A .



Приклад 14

Розв'язати С.Л.Р. методом оберненої матриці

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 1, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 5, \\ 3x_1 - 2x_2 = 6. \end{cases}$$

Розв'язок

Запишемо систему рівнянь у вигляді матричного рівняння $A \cdot X = B$

$$\text{де } A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Тоді } X = A^{-1} \cdot B$$



Приклад 14 (продовження)

$$|A| = \Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$$

Знаходимо алгебраїчні доповнення:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = -2;$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = -3;$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -7;$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = -2;$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = -3;$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -4;$$



Приклад 14 (продовження)

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 1; \quad A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 3;$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 5.$$

Запишемо обернену матрицю до матриці A

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} = -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ -3 & -3 & 3 \\ -7 & -4 & 5 \end{pmatrix}$$



Приклад 14 (продовження)

$$\begin{aligned} X = A^{-1} \cdot B &= -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ -3 & -3 & 3 \\ -7 & -4 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 \cdot 1 + (-2) \cdot 5 + 1 \cdot 6 \\ -3 \cdot 1 + (-3) \cdot 5 + 3 \cdot 6 \\ -7 \cdot 1 + (-4) \cdot 5 + 5 \cdot 6 \end{pmatrix} = \\ &= -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Відповідь: $\{2, 0, -1\}$