

Лекция № 5

ТЕПЛОВОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ ФОТОН ВНЕШНИЙ ФОТОЭФФЕКТ

ВОПРОСЫ

37. Тепловое излучение. Абсолютно чёрное тело. Закон Кирхгофа. Закон Стэфана-Больцмана. Закон смещения Вина.

38. Формулы Планка. Связь формулы Планка с законом Стэфана-Больцмана и законом смещения Вина. Пирометрия. Принцип соответствия. Формула Планка и закон Релея-Джинса.

37. Тепловое излучение. Абсолютно чёрное тело. Закон Кирхгофа. Закон Стэфана-Больцмана. Закон смещения Вина.

Квантовая физика

Квантовая физика начиналась с двух проблем – не могли объяснить излучение тел и линейчатый спектр излучения и поглощения атомов. Были ещё некоторые другие, но эти считались главными и «последними».

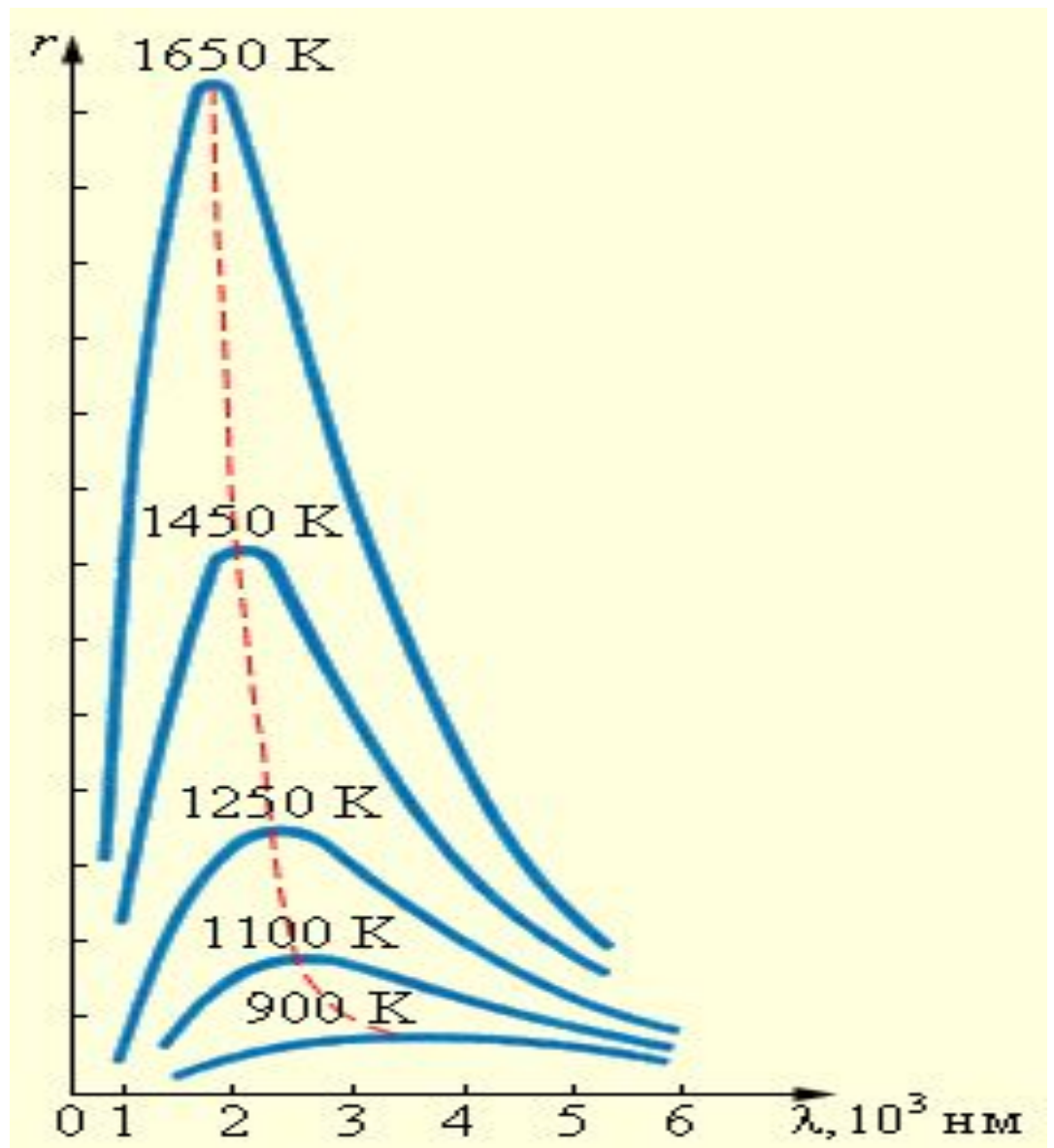
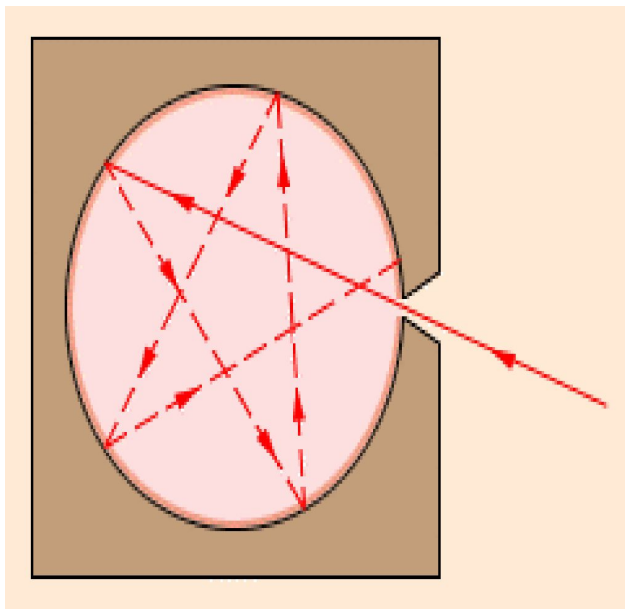
Тепловое излучение абсолютно
чёрных тел.

Люминесценция – любое излучение
(химическая, электрическая,
электронная люминесценция,
фотоизлучение) кроме теплового.

Все эти виды неравновесные
излучения – отдают энергии больше,
чем получают и при полном расходе
энергии процессы прекращаются.

Тепловое излучение – испускание
Электромагнитных волн (ЭМВ) за
счёт внутренней энергии.

Абсолютно чёрное тело (АЧТ) – тело,
поглощающее любое излучение, но и
излучающее согласно формуле
Планка.



Введём следующие понятия:

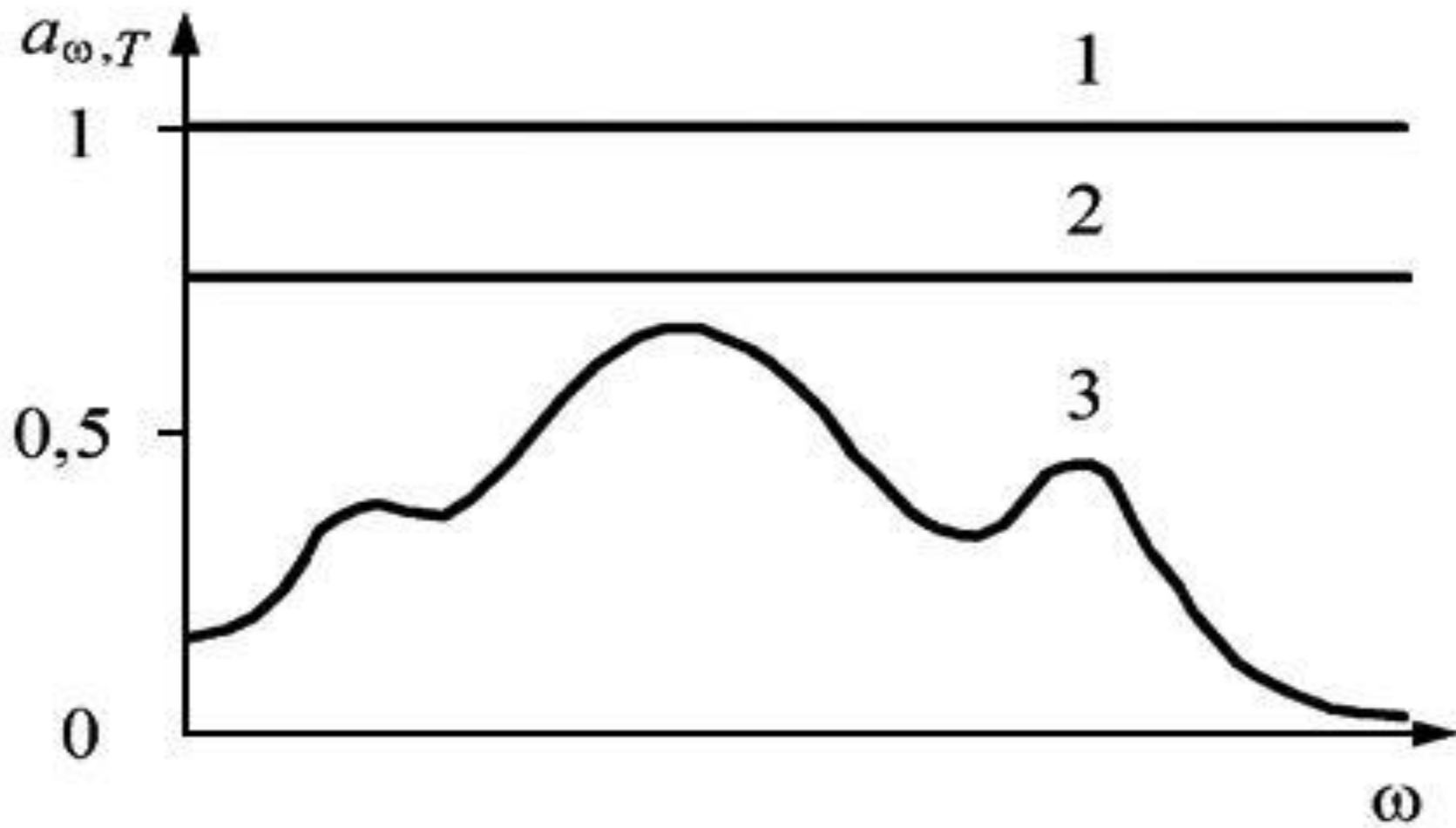
$dR_{\omega} = r_{\omega} d\omega$ – энергетическая
светимость, r_{ω} – излучательная
способность,

$$R = \int_{\omega_1}^{\omega_2} dR_{\omega} = \int_{\omega_1}^{\omega_2} r_{\omega} d\omega$$

светимость тела в диапазоне (ω_1, ω_2) .

Количество энергии, излучаемой с единицы площади поверхности тела в 1 с, в единичном интервале длин волн (частот) при данной абсолютной температуре, называют спектральной плотностью энергетической светимости. В СИ спектральная плотность энергетической светимости измеряется в Вт/м^3 .

И энергетическая светимость, и
 испускательная способность зависят
 от температуры: $dR_{\omega, T}, r_{\omega, T}$.
 $a_{\omega, T}$ – поглощательная способность
 тела. Для АЧТ $a_{\omega, T} = 1$, для
 абсолютно белого тела $a_{\omega, T} = 0$ (1 –
 на рисунке), для «серого» тела (все
 остальные тела, 2 – на рисунке)
 $0 < a_{\omega, T} < 1$. (3 – реальное тело).



Закон Кирхгофа

$$\left(\frac{r_{\omega, T}}{a_{\omega, T}} \right)_1 = \left(\frac{r_{\omega, T}}{a_{\omega, T}} \right)_2 = \boxtimes = \left(\frac{r_{\omega, T}}{a_{\omega, T}} \right)_{\text{АЧТ}} = f(\omega, T)$$

$f(\omega, T)$ – испускательная способность
АЧТ.

$U(\omega, T) = 4/c f(\omega, T)$ – плотность
энергии излучения.

Отношение спектральной плотности энергетической светимости тел к их поглощательной способности при постоянной температуре является одинаковой функцией длин волн (частот) и абсолютной температуры и равно спектральной плотности энергетической светимости абсолютно черного тела при той же температуре.

Закон Стефана-Больцмана

$$R^* = \int_0^{\infty} dR_{\omega, T} = \int_0^{\infty} f(\omega, T) d\omega = \sigma T^4$$

T – термодинамическая температура, σ – постоянная Стефана-Больцмана ($\sigma = 5,6703 * 10^{-8} \text{ Вт/м}^2 * \text{К}^4$).

Закон смещения Вина

$$T \lambda_{max} = b_1,$$

b_1 – постоянная Вина,
($b = 2,8978 * 10^{-3}$ м*К), λ_{max} – длина
волны, на которую приходится
максимальное значение
испускательной способности АЧТ.

Цветовой тон излучения АЧТ при его определённой температуре:

до 1000 К Красный

1000 – 1500 К Оранжевый

1500 – 2000 К Жёлтый

2000 – 4000 К Бледно-жёлтый

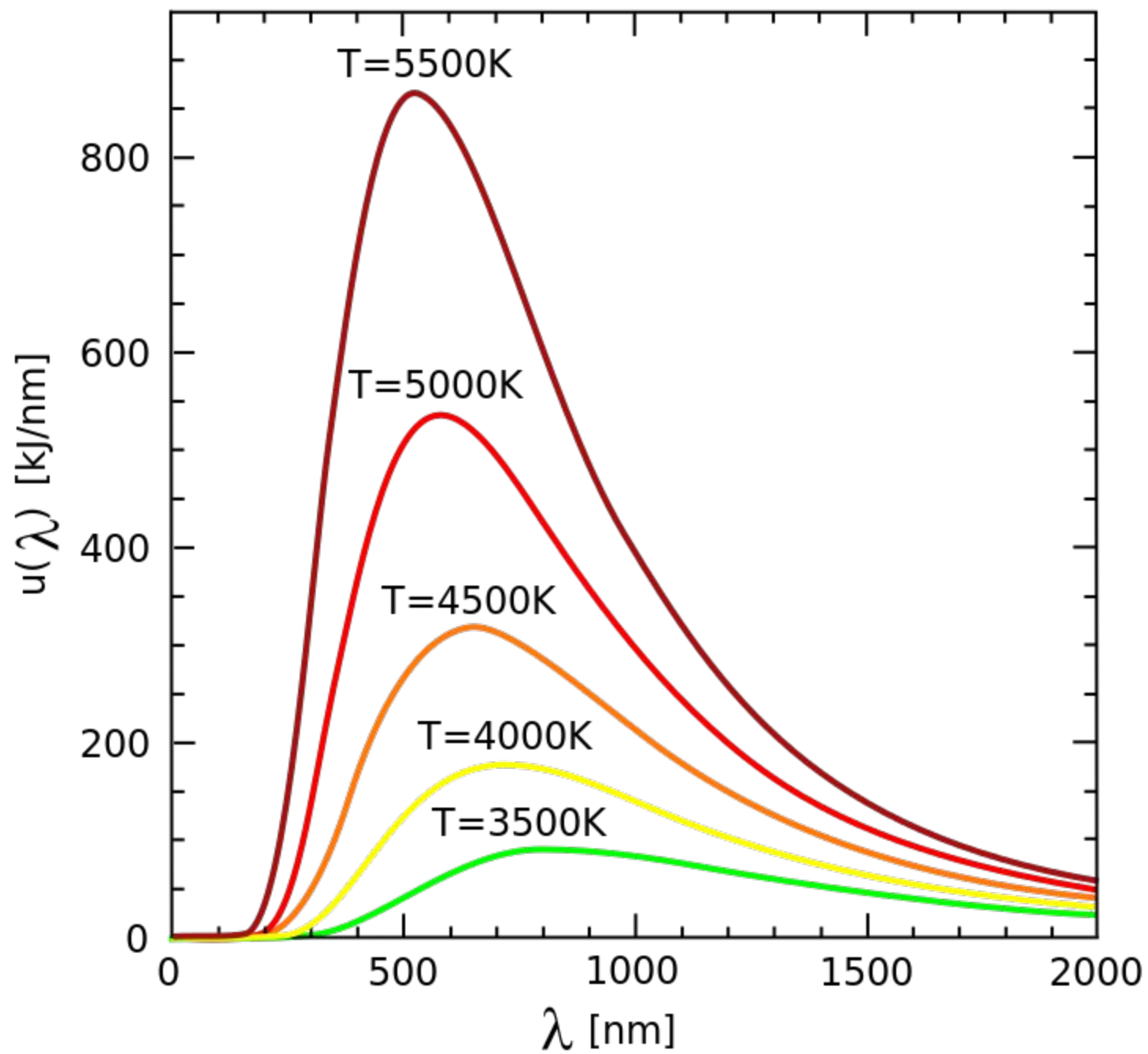
4000 – 5500 К Желтовато-белый

5500 – 7000 К Чисто белый

7000 – 9000 К Голубовато-белый

9000 – 15000 К Бело-голубой

15000 К и более Голубой





Второй закон Вина

Максимум спектральной плотности
энергетической светимости
абсолютно черного тела возрастает
пропорционально пятой степени
абсолютной температуры

$$r_{\lambda, T}^* = b_2 T^5,$$
$$b_2 = 1,3 * 10^{-5} \text{ Вт/м}^3 * \text{К}^5.$$

38. Формулы Планка. Связь формулы Планка с законом Стэфана-Больцмана и законом смещения Вина. Пирометрия. Принцип соответствия. Формула Планка и закон Релея-Джинса.

Закон Стэфана-Больцмана и закон смещения Вина выводятся из формулы Планка, которую он получил на основе квантовой природы света.

В 1900 году Планк предположил, что электромагнитное излучение испускается в виде отдельных порций энергии. Эту порцию (квант) называли фотоном.

Энергия фотона равняется

$$\varepsilon = E_{\text{ф}} = h\nu = \hbar\omega$$

$h, \hbar$ – постоянная Планка.

$$h = 6,6262 * 10^{-34} \text{ Дж*с,}$$

$$\hbar = 1,0546 * 10^{-34} \text{ Дж*с,}$$

$$\hbar = 1,0546 * 10^{-27} \text{ эрг*с,}$$

$$\hbar = 0,659 * 10^{-15} \text{ эВ*с.}$$

Формулы Планка

Испускательная способность

$$f(\omega, T) = \frac{\hbar \omega^3}{4\pi^2 c^2} \frac{1}{\exp(\hbar \omega / kT) - 1}$$

$$\varphi(\lambda, T) = \frac{4\pi^2 \hbar c^2}{\lambda^5} \frac{1}{\exp(2\pi \hbar c / kT\lambda) - 1}$$

Плотность энергии

$$U(\omega, T) = \frac{\hbar \omega^3}{\pi^2 c^3} \frac{1}{\exp(\hbar \omega / kT) - 1}$$

Энергетическая светимость АЧТ (закон Стэфана-Больцмана)

$$R^* = \int_0^{\infty} f(\omega, T) d\omega = \int_0^{\infty} \frac{\hbar \omega^3}{4\pi^2 c^2} \frac{1}{\exp(\hbar \omega / kT) - 1} d\omega$$

$$R^* = \frac{\hbar}{4\pi^2 c^2} \left(\frac{kT}{\hbar} \right)^4 \frac{\pi^4}{15} = \sigma T^4$$

Для получения закона смещения
Вина необходимо
продифференцировать выражение
испускающей способности АЧТ по
частоте, полученное выражение
приравнять к нулю и решить это
выражение. В итоге получим закон
смещения Вина.

$$T \lambda_{max} = b.$$

Пирометрия – определение температуры тела, путём сравнения его излучения с излучением эталона.

Пирометрия. .

Пирометрия. .

Пирометрия. .

Пирометрия. .

Пирометрия. .

.

Принцип соответствия – постулат квантовой механики, требующий совпадения её физических следствий в предельном случае больших квантовых чисел с результатами классической теории.

В общем смысле, принцип соответствия означает включение в новую теорию старой, как часть новой. Так, теория относительности при либо при очень малых скоростях, либо при скорости света равной бесконечности переходит в классическую.

Рассмотрим принцип соответствия
на примере формулы Планка
($\omega \rightarrow 0$ и/или $\hbar \rightarrow 0$).

$$f(\omega, T) = \frac{\hbar \omega^3}{4\pi^2 c^2} \frac{1}{\exp(\hbar \omega / kT) - 1} =$$

$$= \frac{\hbar \omega^3}{4\pi^2 c^2} \times$$

$$\times \left[\left(1 + \left(\frac{\hbar \omega}{kT} \right) + \frac{1}{2!} \left(\frac{\hbar \omega}{kT} \right)^2 + \frac{1}{3!} \left(\frac{\hbar \omega}{kT} \right)^3 + \dots \right) - 1 \right]^{-1}$$

Пренебрегаем членами разложения
экспоненты кроме первых двух:

$$f(\omega, T) \approx \frac{\hbar \omega^3}{4\pi^2 c^2} \left[\left(1 + \left(\frac{\hbar \omega}{kT} \right) \right) - 1 \right]^{-1} =$$
$$= \frac{kT \omega^2}{4\pi^2 c^2}$$

Таким образом, пришли к формуле Рэлея-Джинса, которая была получена на основе классических представлений и справедлива в области длинных волн, т.е. она часть более полной формулы Планка. В области коротких волн эта формула не работает – мощность излучения стремится к бесконечности, поэтому ввели понятие «ультрафиолетовая катастрофа».

39. Фотон. Энергия, импульс, давление фотонов. Внешний фотоэффект. Формула Эйнштейна.

40. Опыт Боте. Внутренний фотоэффект, вентильный фотоэффект.

41. Эффект Комптона. Рождение пары электрон-позитрон, аннигиляция электрона и позитрона.

39. Фотон. Энергия, импульс,
давление фотонов. Внешний
фотоэффект. Законы Столетова.
Формула Эйнштейна.

Электромагнитное излучение – процесс образования свободного электромагнитного поля при неравномерном движении и взаимодействии электрических зарядов.

В квантовой теории излучения электромагнитное поле рассматривается как совокупность квантов электромагнитного поля – фотонов.

Энергия фотона

$$\varepsilon = E_{\text{ф}} = h\nu = \hbar\omega$$

Импульс фотона

$$p = \frac{E_{\text{ф}}}{c} = \frac{h\nu}{c} = \frac{\hbar\omega}{c} = \frac{h}{\lambda} = \frac{2\pi\hbar}{\lambda} \quad \hbar p = \hbar k$$

- 1) масса покоя фотона равна нулю;
- 2) фотон в вакууме всегда движется со скоростью света c .

Давление фотонов.

При поглощении фотон сообщает стенке импульс $p = E/c$, если плотность фотонов n , то за единицу времени на единицу поверхности падает nc фотонов.

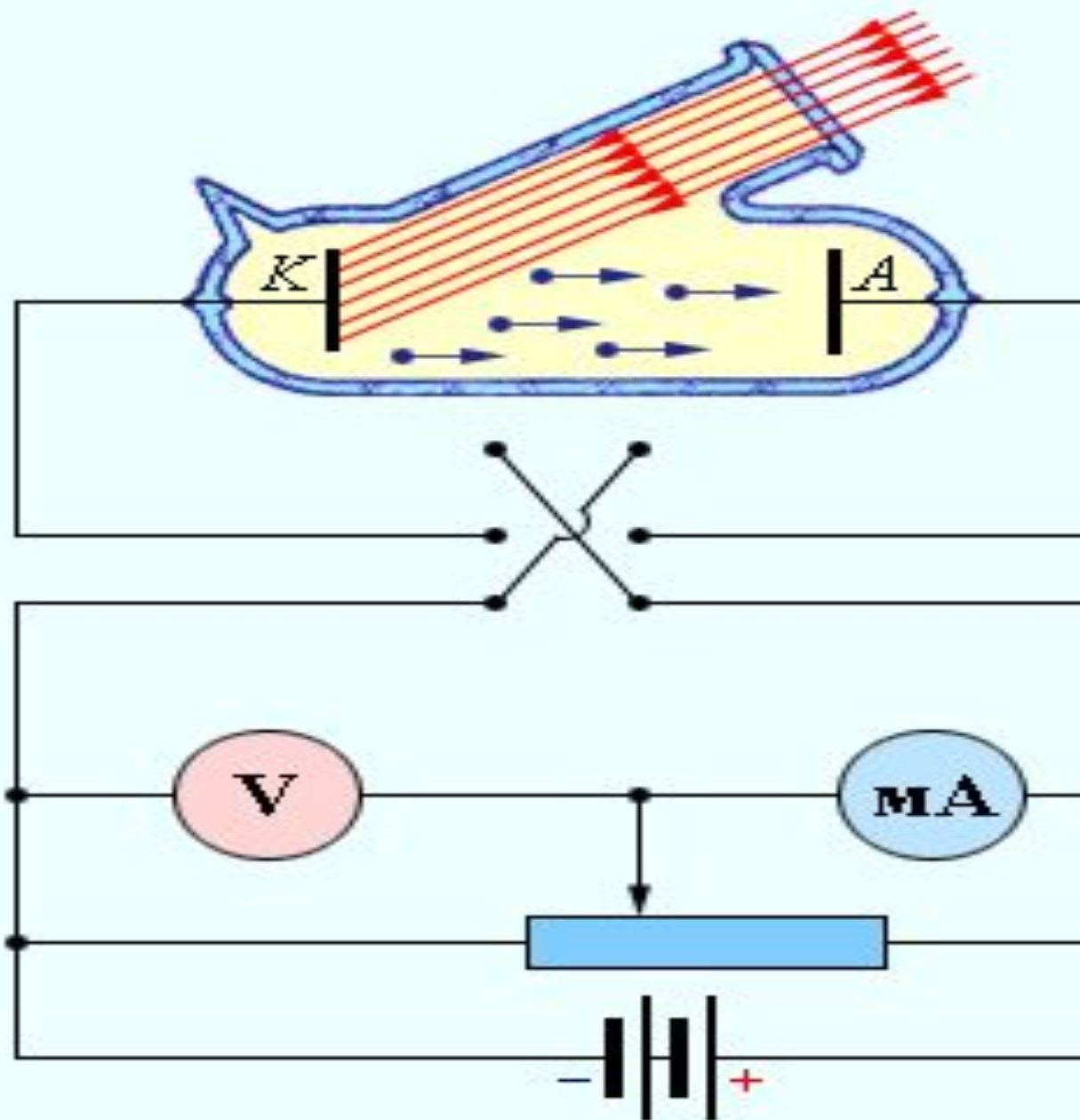
$$p = \frac{E_{\phi}}{c} nc = E_{\phi} n = w = \frac{I}{c}$$

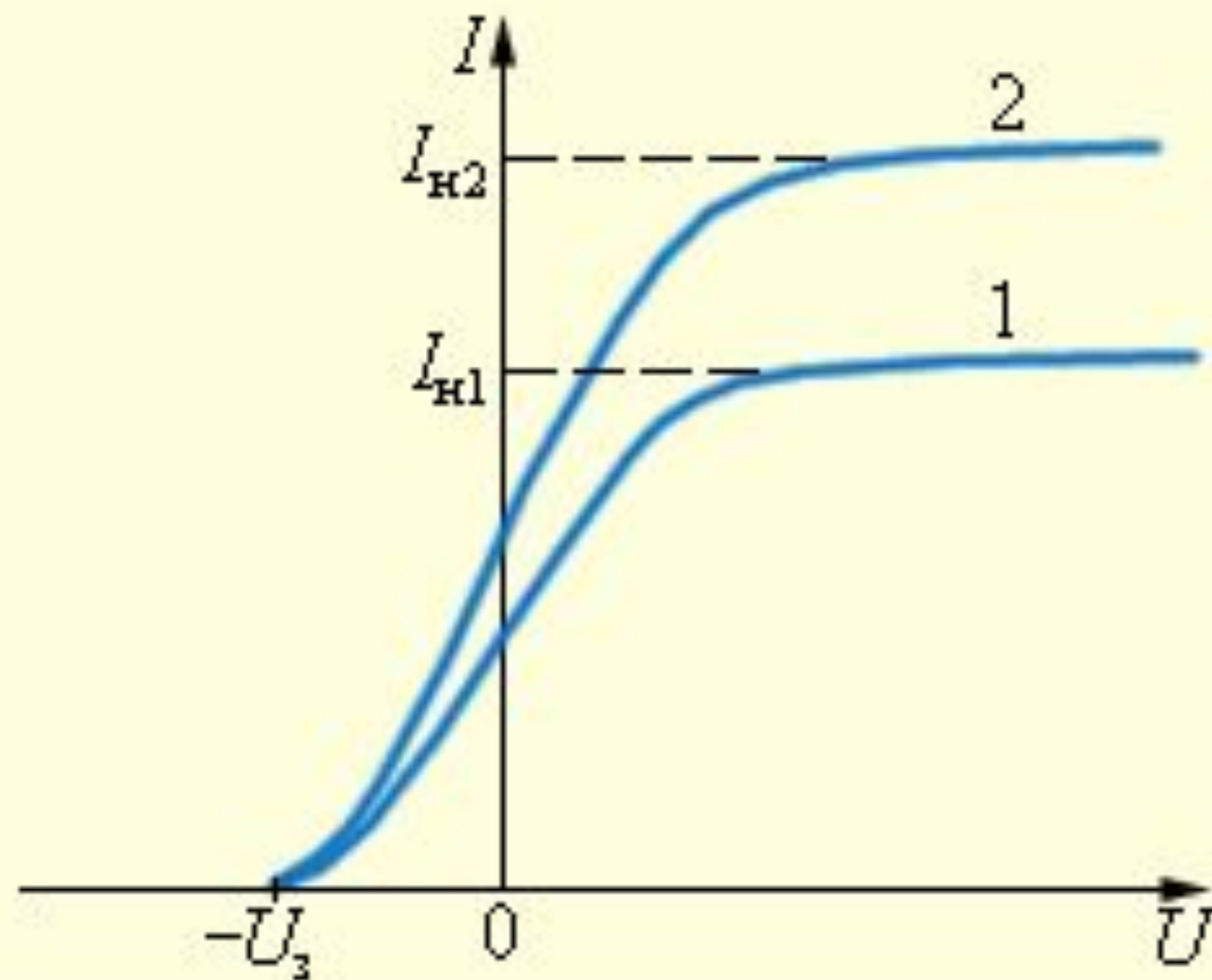
w – плотность электромагнитной энергии, I – интенсивность света.

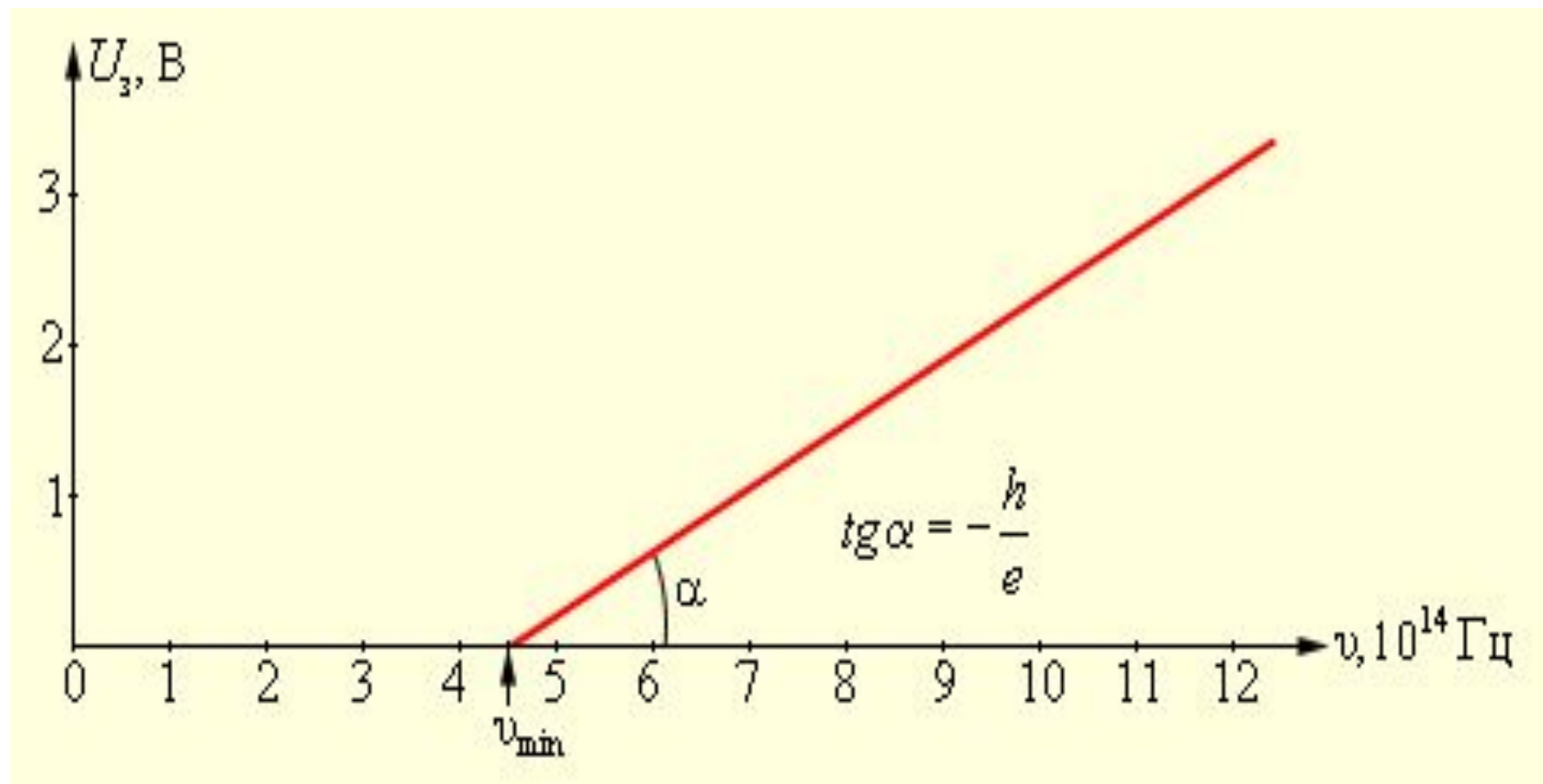
Фотоэффект (внешний фотоэффект)
– явление испускания веществом
электронов под действием
излучения.

Испускание веществом каких-либо
частиц называют эмиссией. Поэтому
внешний фотоэффект называют
фотоэлектронной эмиссией.

В вакуумном стеклянном сосуде находятся анод (А), катод (К), которые включены в электрическую цепь. При отсутствии освещения фототок равен нулю. Если на катод направить световой поток определенной частоты, то гальванометр покажет наличие тока в цепи, т. к. из катода вырываются электроны, которые, достигнув анода, замыкают цепь.







Волновая природа света не могла объяснить почему от интенсивности зависит ток насыщения и не зависит запирающее напряжение U_3 .

Столетов исследовал явление фотоэффекта и установил законы:

1. Сила фототока пропорциональна интенсивности падающего излучения. Интенсивность излучения влияет лишь на число вырванных электронов.

2. Максимальная скорость покидающих вещество электронов зависит от частоты падающего на него света.

Эйнштейн предложил квантовую интерпретацию. Свет поглощается квантами $\hbar\omega$, часть энергии идёт на вырывание электрона из металла (работа выхода – $A_{\text{ВЫХ}}$). Остаток энергии идёт на кинетическую энергию электрона, которую можно вычислить из запирающего напряжения

$$E_{\text{кин}} = \frac{mv^2}{2} = eU_3$$

Эйнштейн предложил формулу,
которая выражает закон сохранения
энергии для фотоэффекта

$$h\nu = A_{\text{ВЫХ}} + \frac{mv_{\text{max}}^2}{2}$$

Если энергии фотона хватает только
на вырывание электрона, то говорят
о красной границе фотоэффекта –
минимальная частота, при которой
фотоэффект возможен:

$$h\nu_{\text{min}} = A_{\text{ВЫХ}}$$

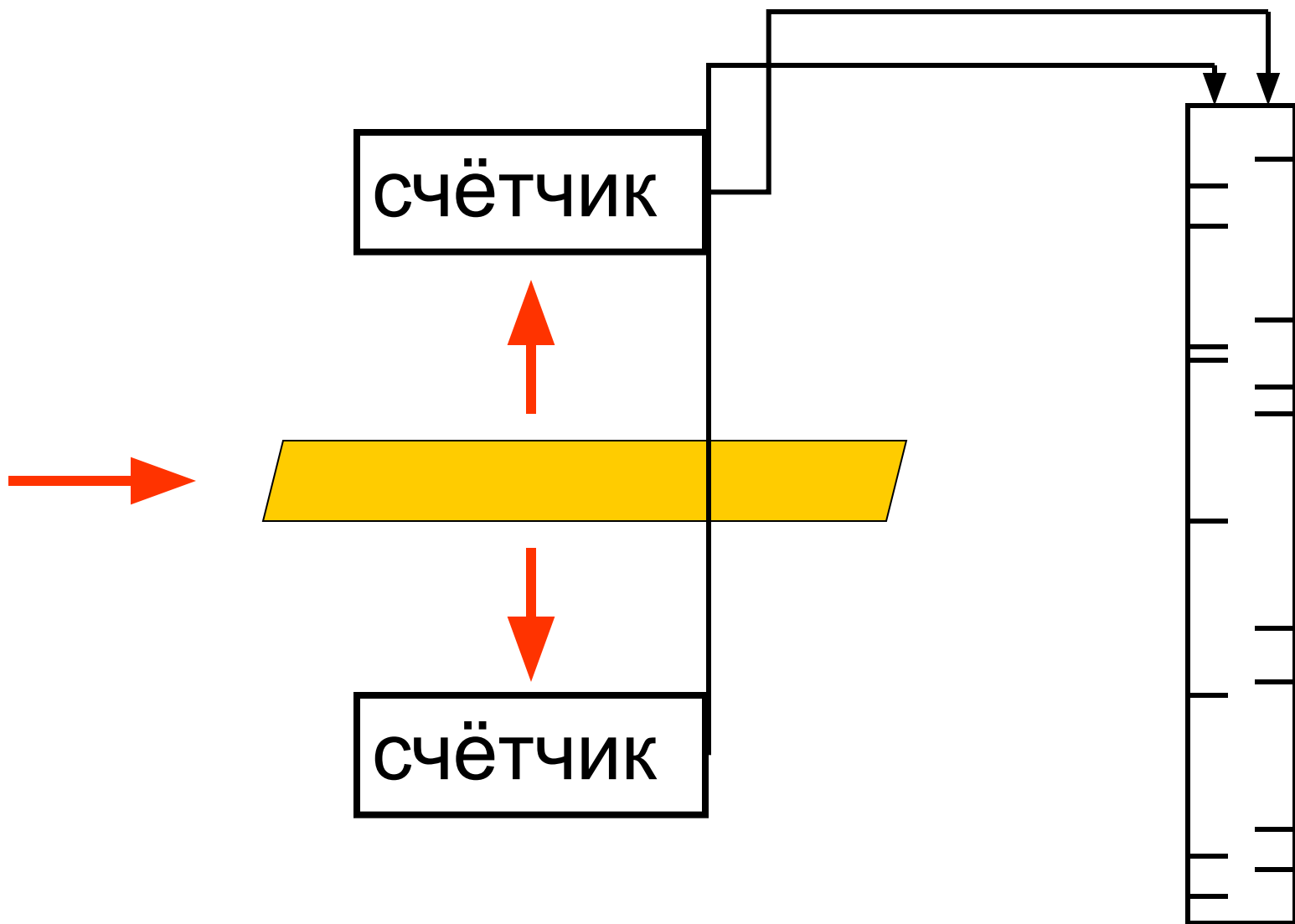
40. Опыт Боте. Внутренний
фотоэффект, вентиляный
фотоэффект.

Опыт Боте

Эйнштейн предположил, что свет излучается, поглощается и распространяется порциями – фотонами.

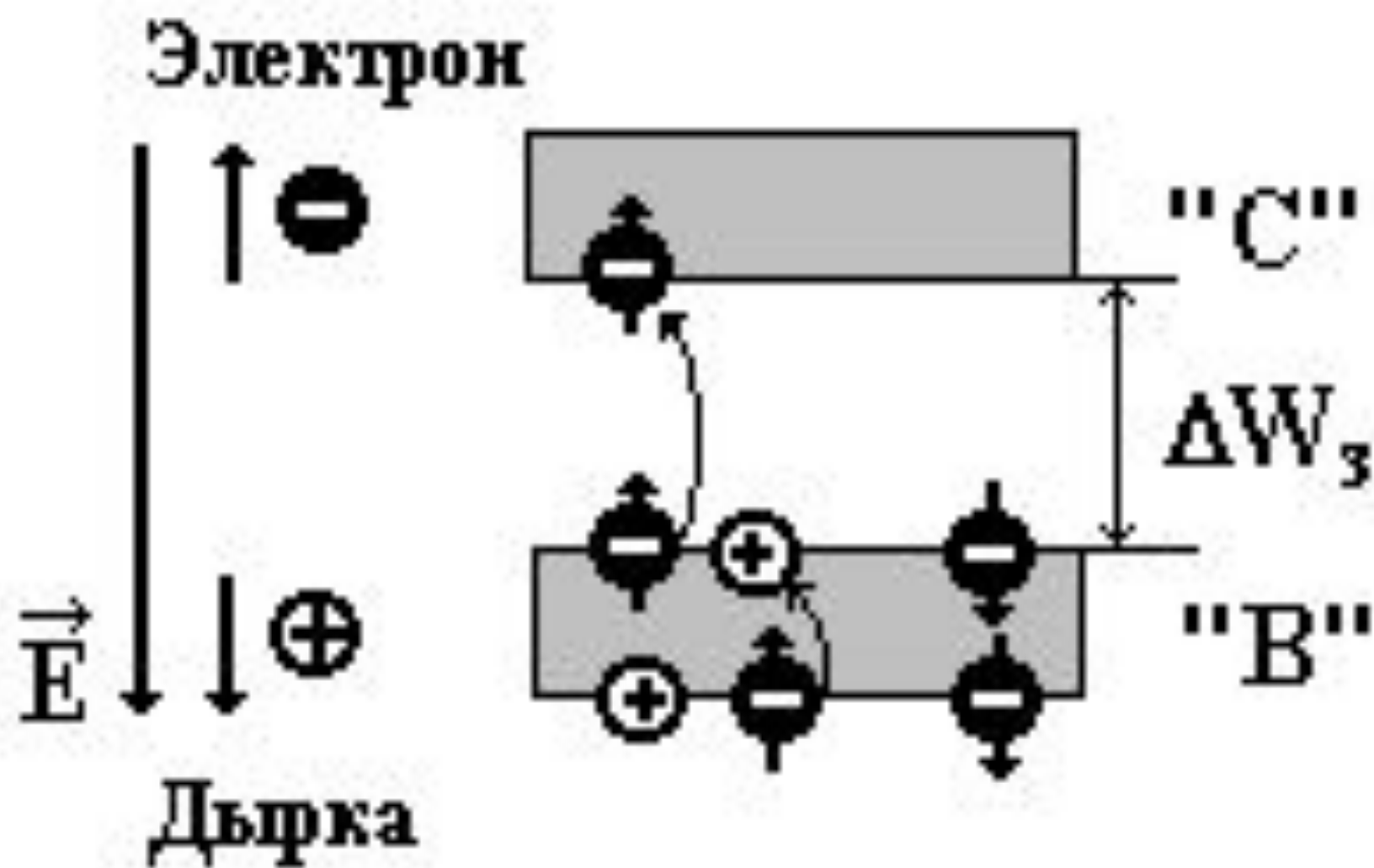
Для проверки корпускулярности света, Боте предложил наблюдать фотоны в двух равновероятных направлениях.

Рентгеновское излучение направляют на золотую фольгу, фольга переизлучает энергию в двух направлениях, перпендикулярных плоскости фольги. Это излучение фиксируется счётчиками и подаётся сигнал на самописцы. Сигналы на записи ни коим образом не связаны, следовательно, свет распространяется порциями (квантами) – фотонами.



Внутренний фотоэффект наблюдается при освещении светом полупроводников, диэлектриков и некоторых органических веществ.

Под влиянием фотоионизации атомов (ионов) происходит уменьшение их сопротивления. При внутреннем фотоэффекте в чистых полупроводниках электроны переходят из валентной зоны в зону проводимости.



При переходе электрона из валентной зоны в зону проводимости образуется вакансия, которую занимает электрон валентной зоны, а в том месте, откуда ушел электрон, в свою очередь, возникает вакансия, которую занимает следующий электрон и т. д. Данный процесс равносителен движению положительного заряда, который называли дыркой.

В этом процессе электрон проводимости участия не принимает.

Основным параметром, определяющим фотоэлектрические свойства вещества является ширина запрещенной зоны ΔW_3 . Если на полупроводник падает фотон с энергией $h\nu \geq \Delta W_3$, то фотоэффект наблюдается.

Вентильный фотоэффект
Вентильная фотоЭДС – это ЭДС,
возникающая в результате
пространственного разделения
электронно-дырочных пар,
генерируемых светом в
полупроводнике электрическим
полем n - p перехода,
гетероперехода, приэлектродного
барьера.

При вентильном фотоэффekte электрическое поле к фотоэлементу не прикладывается, т. к. они сами являются генераторами фотоЭДС.

Характерной особенностью фотоэлементов с вентильным фотоэффектом является наличие запирающего слоя между полупроводником и электродом, который вызывает выпрямляющее действие данного слоя.

Тонкий запирающий слой ($d \approx 10^{-7}$ м) на границе металл – полупроводник вызывает запирающее действие фотоэлемента и возникновение фотоЭДС до 1 В. В этом случае лучистая энергия света непосредственно переходит в электрическую.

КПД фотоэлемента $\sim 2,5\%$. (В современных солнечных батареях КПД = 10% – 20%.)

Лекция № 6

ЭФФЕКТ КОМПТОНА СПЕКТРЫ АТОМОВ

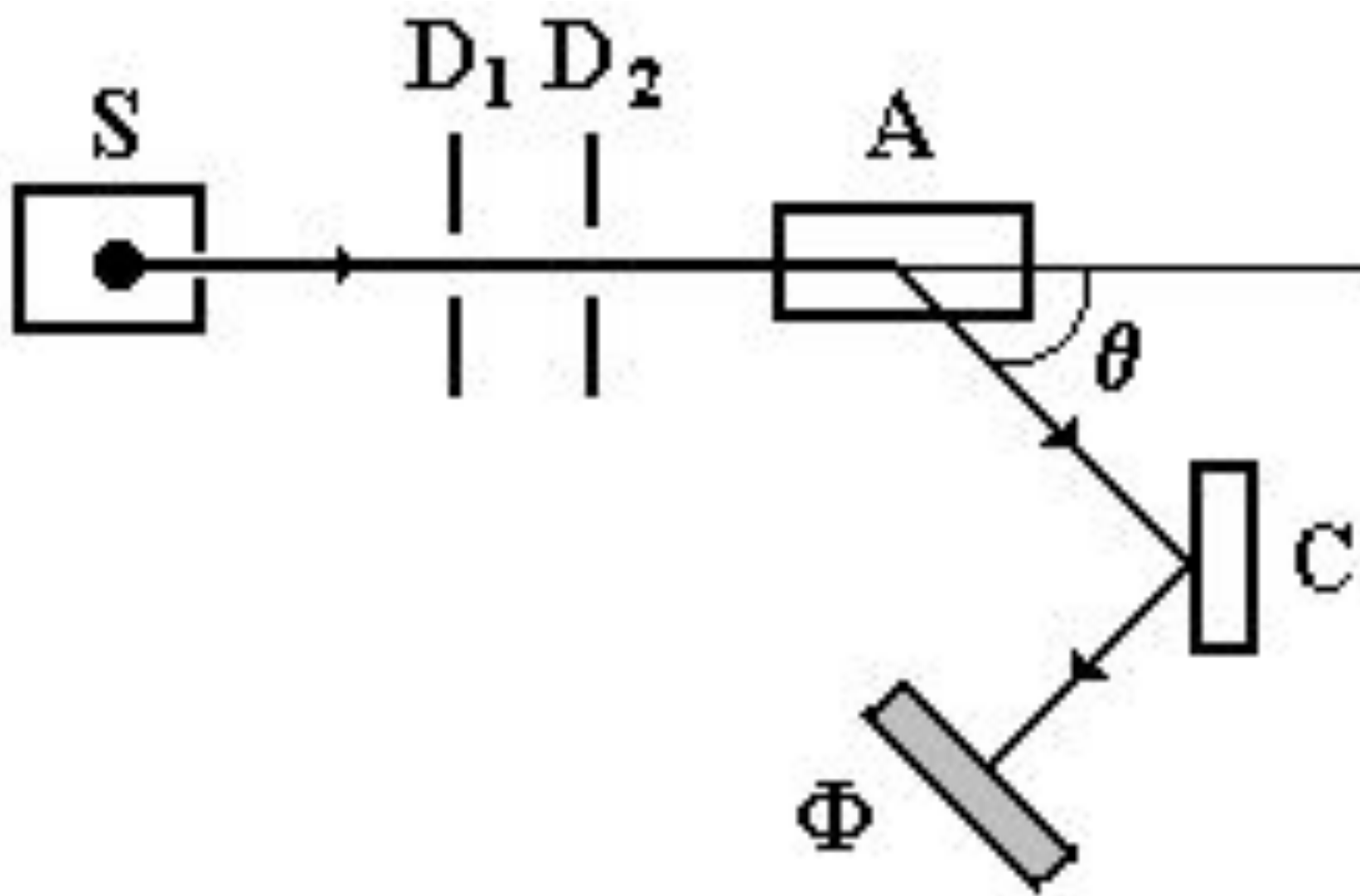
41. Эффект Комптона. Рождение пары электрон-позитрон, аннигиляция электрона и позитрона.
42. Спектр атомов. Модель атома Резерфорда. Постулаты Бора.
43. Опыт Франка и Герца. Тормозное рентгеновское излучение.

Эффект Комптона

Явление Комптона состоит в увеличении длины волны рентгеновских лучей при их рассеянии на атомах вещества, которое сопровождается фотоэффектом. С точки зрения классической волновой теории длина волны рассеянного излучения должна равняться длине волны падающего.

Схема опыта Комптона.

S – источник рентгеновского излучения; D_1 и D_2 – диафрагмы, формирующие узкий пучок рентгеновских лучей; A – вещество, рассеивающее рентгеновские лучи, которые затем попадают на спектрограф С и фотопластинку Ф.



Явление Комптона характеризуется следующими закономерностями:

1. Зависит от атомного номера вещества. Чем больше порядковый номер вещества, тем меньше интенсивность смещённой компоненты.

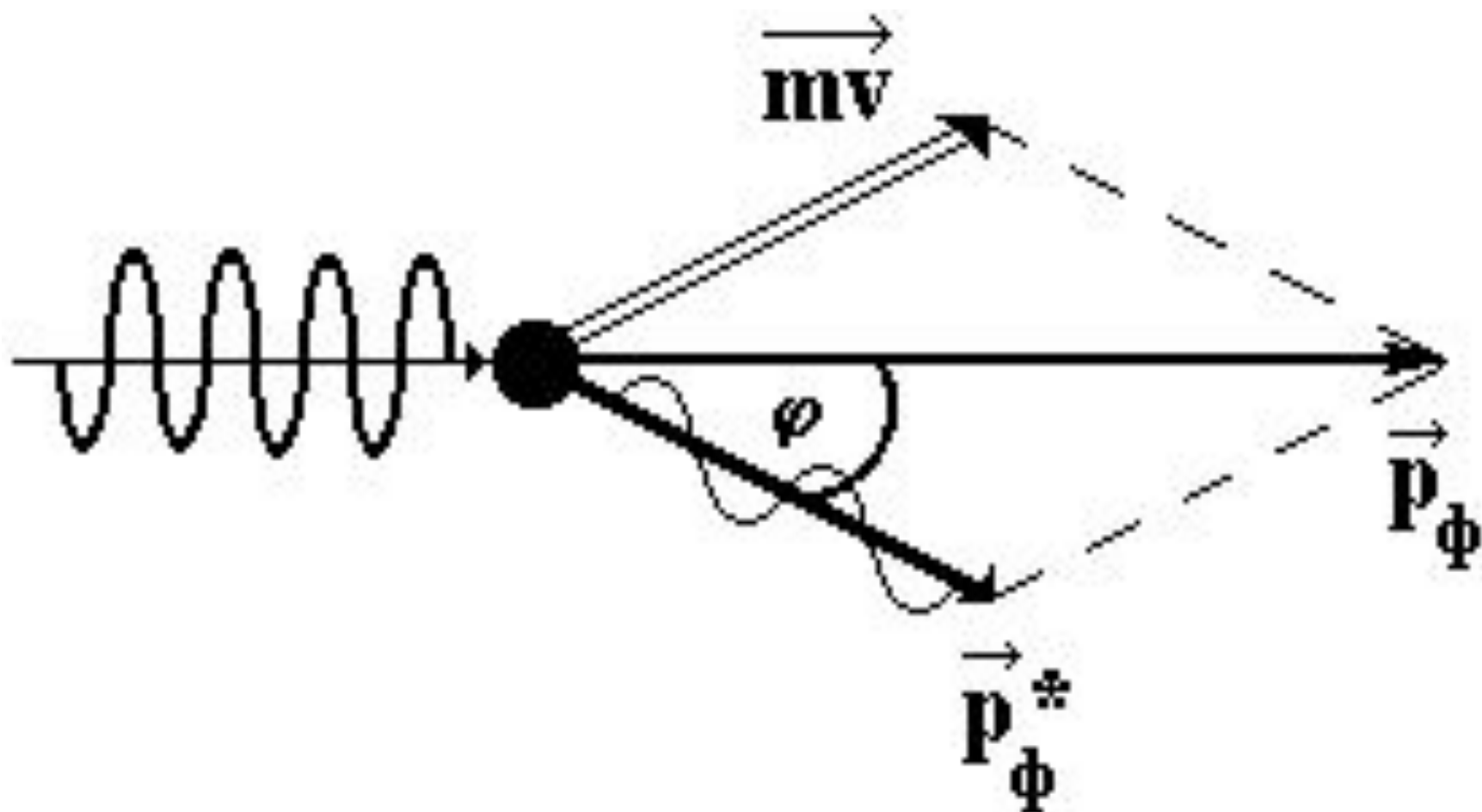
2. При увеличении угла рассеяния интенсивность комптоновского рассеяния возрастает. 3. Смещение длины волны возрастает с увеличением угла рассеяния. 4. При одинаковых углах рассеяния смещение длины волны одно и тоже для всех веществ.

Явление Комптона объясняется тем, что оно происходит на электронах, слабо связанных в атомах.

Падающие рентгеновские лучи представляют собой поток рентгеновских фотонов с энергией $\varepsilon = h\nu$ и импульсом

$$p = mc = \frac{h\nu}{c}$$

При взаимодействии рентгеновского фотона с электроном последний получает энергию (W) и импульс ($p = mv$) покидает атом (электрон отдачи), а энергия и импульс рассеянного фотона уменьшаются.



Изменение длины волны фотона

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = \frac{h}{mc}(1 - \cos\theta)$$

где λ – длина волны падающего фотона, λ' – длина волны рассеянного фотона, θ – угол рассеяния фотона, m – масса электрона, c – скорость света, h – постоянная Планка.

Величину $h / mc = 2,43 \cdot 10^{-12}$ м
называют комптоновской длиной
волны.

Максимальное значение $\Delta\lambda$
достигается для лучей, рассеянных
под углом $\phi = \pi$.

Явление Комптона наблюдается не только на электронах, но и любой заряженной частице, которая может взаимодействовать с электромагнитным излучением. При повышении энергии падающих фотонов все больше и больше проявляются его корпускулярные свойства, заключающиеся в том, что фотоны превращаются в пары *электрон – позитрон*.

Это происходит, когда фотон достигает энергии $h\nu \geq 2mc^2$.

Такие фотоны вблизи ядер атомов превращаются в пары *электрон – позитрон*, а фотон исчезает.

Наряду с рождением частиц фотонов высоких энергий имеет место и обратный процесс – аннигиляция – превращение электрона и позитрона в два или большее число фотонов.

42. Спектр атомов. Модель атома Резерфорда. Постулаты Бора.

Спектры атомов

Классическая теория никак не могла объяснить линейчатые спектры атомов. Спектром называют совокупность (сплошная, дискретная) монохроматических колебаний, излучаемых или поглощаемых каким-либо телом.



Экспериментально была выведена
следующая зависимость частот
спектра для атома водорода

$$\nu = R \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2} \right)$$
$$\omega = R \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2} \right)$$

R – постоянная Ридберга,

$$R = 3,29 * 10^{15} \text{ с}^{-1},$$

$$R = 2,07 * 10^{16} \text{ с}^{-1}.$$

Ридберг показал, что в линейчатых спектрах атома водорода наблюдаются спектральные серии.

I. серия *Лаймана*

(ультрафиолетовый спектр),

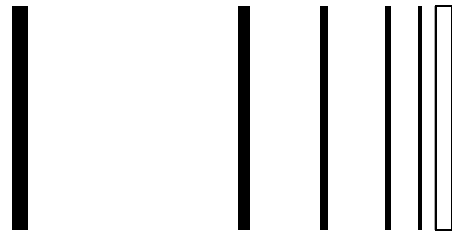
где $n = 1$, $m = 2, 3, 4, \dots$.

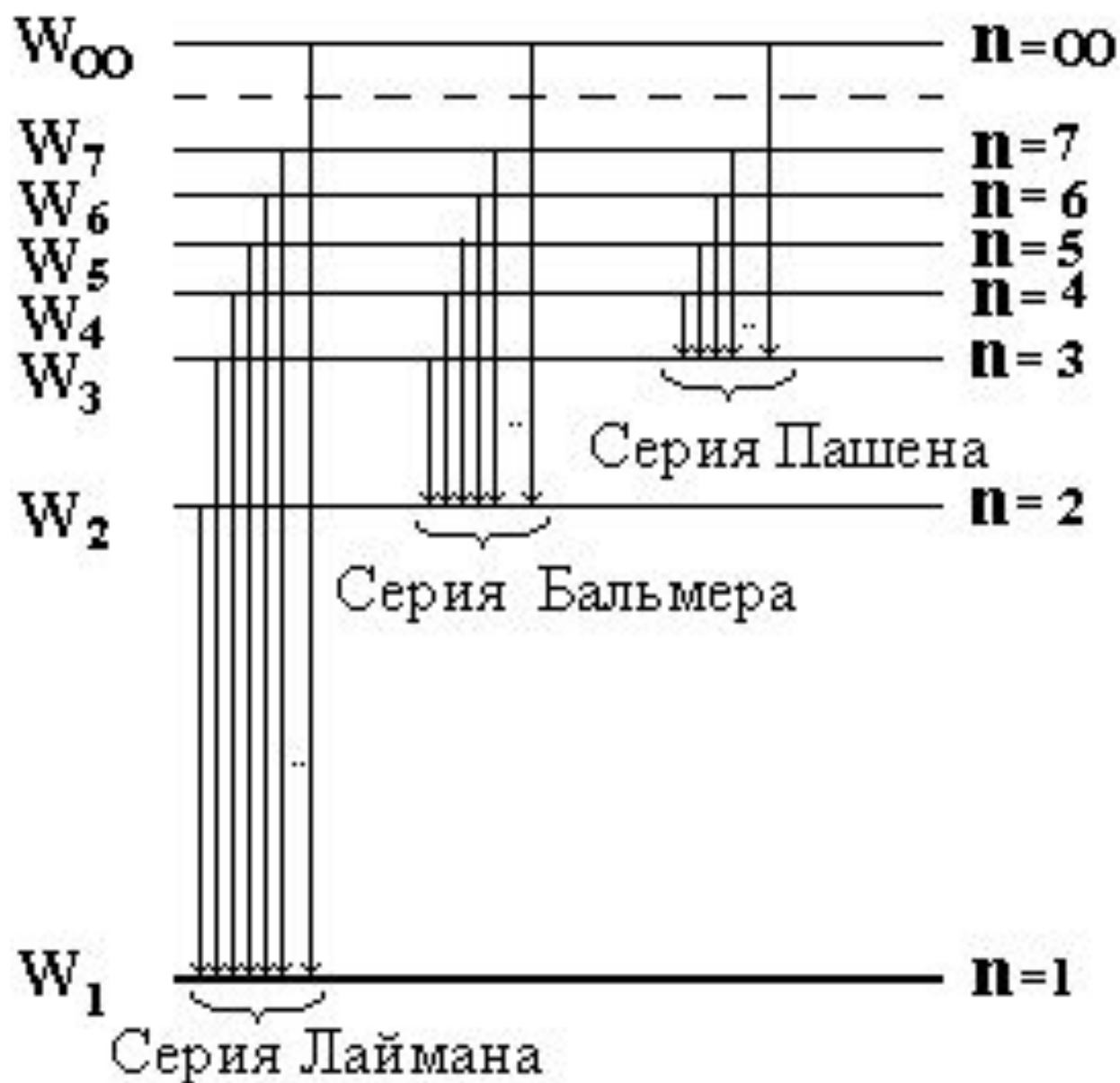
II. серия *Бальмера* (видимый спектр),

где $n = 2$, $m = 3, 4, 5, \dots$.

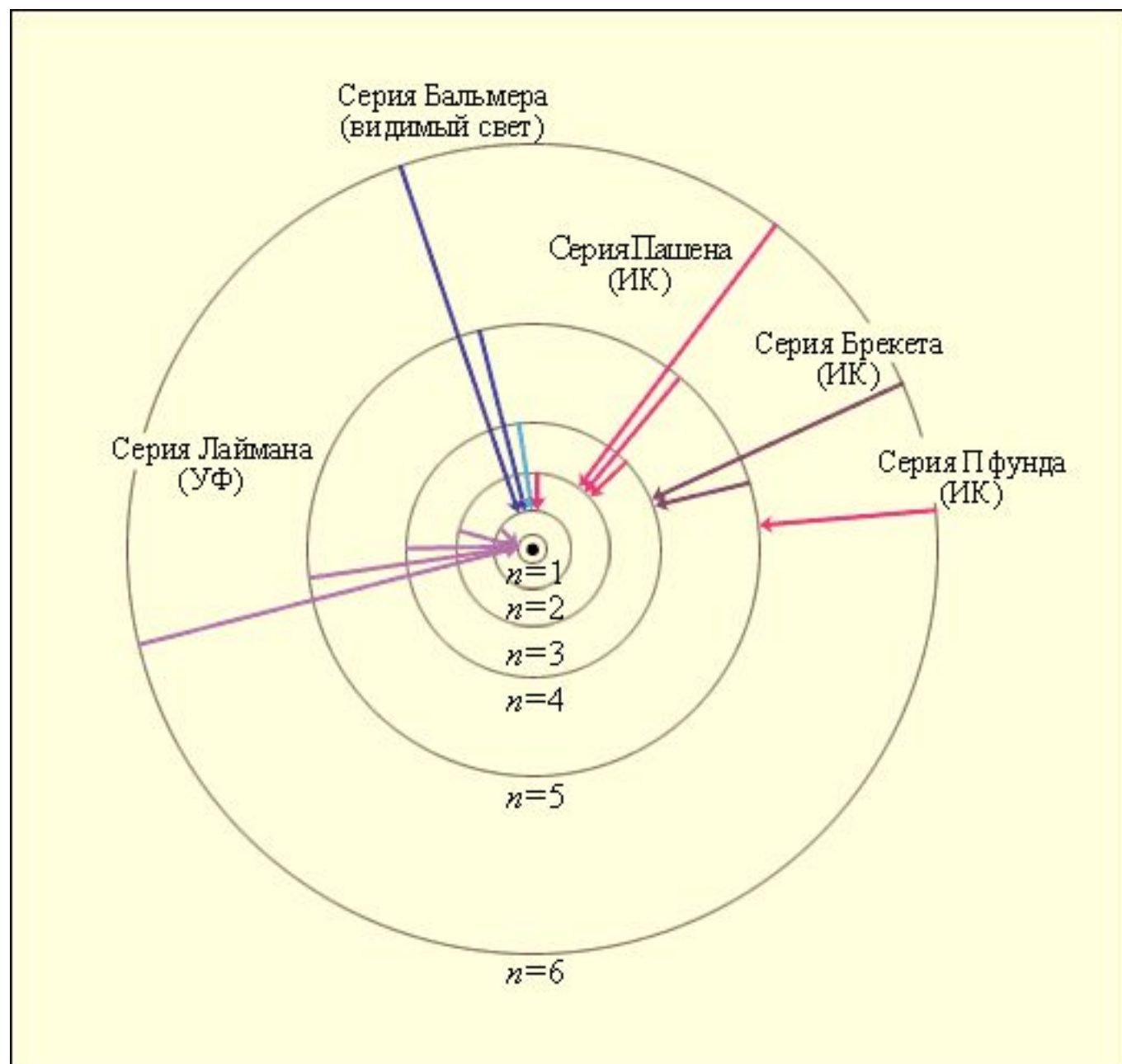
III. серия *Пашена* (инфракрасный спектр), где $n = 3$, $m = 4, 5, \dots$.

Первая линия серии называется головной, она самая яркая ($m = n + 1$). Далее расстояние между линиями уменьшается и их интенсивность уменьшается. В конце концов линии сливаются. Серия подошла к своей границе ($m \rightarrow \infty$).





Для объяснения было сделано следующее. Резерфорд предложил планетарную модель атома: в центре положительно заряженное ядро, внешняя оболочка из отрицательно заряженных электронов. Но электрон, вращаясь по орбите с ускорением, должен был бы отдать всю энергию излучению и упасть на ядро.



Для объяснения свойств атомов Бор предложил использовать постулаты:

1) Существует стационарные состояния атома, находясь в котором он не излучает энергии.

2) В стационарном состоянии атома электрон, двигаясь по круговой орбите, должен иметь квантованное значение момента импульса, т.е.

$$L_n = mvr = n\hbar,$$

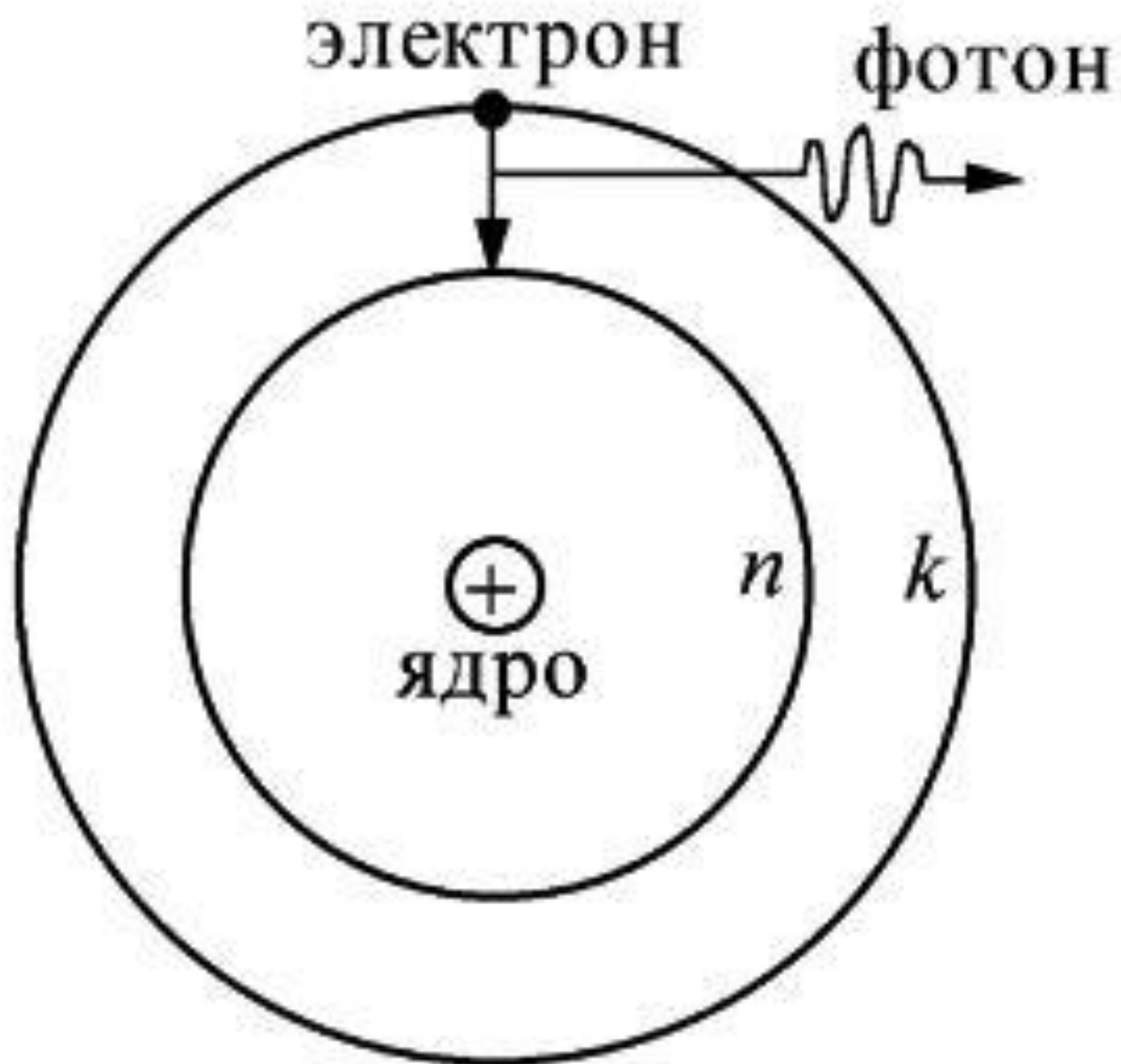
где m – масса электрона; v – его скорость; r – радиус орбиты; $\hbar$ – постоянная Планка.

Как показала квантовая теория, $n = 1, 2, 3, \dots$, – главное квантовое число, характеризует энергетические уровни атомов.

3) При переходе электрона в атоме с высшего возбужденного энергетического уровня W_m на низший W_n испускается квант энергии

$$\varepsilon = h\nu_{mn} = \Delta W = W_m - W_n.$$

При поглощении кванта энергии $\varepsilon = h\nu_{mn}$ атомом электрон переходит с энергетического уровня W_n на энергетический уровень W_m .



Полная энергия электрона в атоме

$$W_n = -\frac{1}{n^2} \cdot \frac{Z^2 m e^4}{8 \varepsilon_0^2 h^2}$$

где m – масса электрона; ε_0 – электрическая постоянная, Z – порядковый номер в периодической системе элементов.

При $n \rightarrow \infty$, $W_n \rightarrow 0$.

Абсолютное значение W_n называют *энергией связи* электрона в атоме, находящегося в состоянии n .

Для атома водорода при $n = 1$
потенциал ионизации $\phi = 13,53 \text{ В}$,
 $W_1 = -2,16 \cdot 10^{-18} \text{ Дж} = -13,53 \text{ эВ}$.

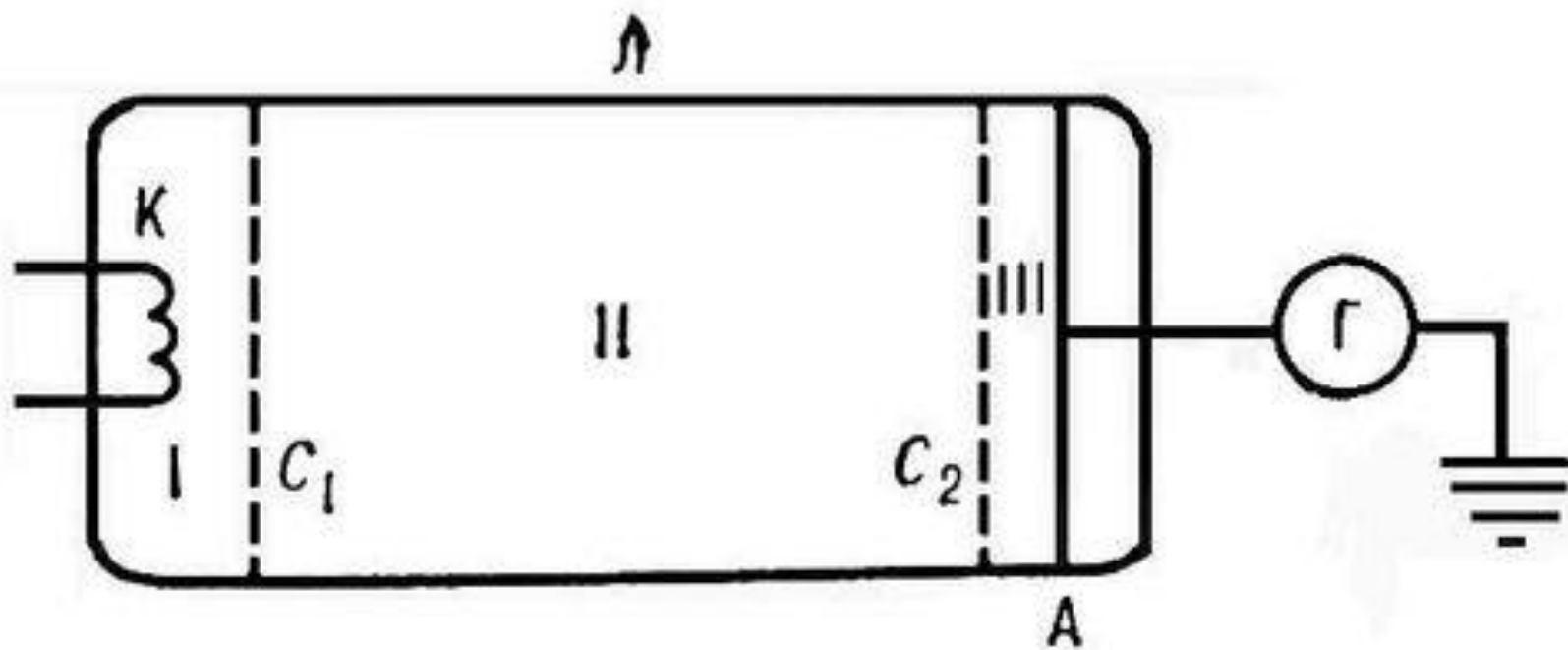
Радиусы боровских орбит электрона
в водородоподобных атомах можно
вычислить по формуле

$$r_n = \frac{\varepsilon_0 h^2 n^2}{\pi Z m e^2}$$

43. Опыт Франка и Герца. Тормозное рентгеновское излучение.

Опыт Фракна и Герца
Гипотеза Бора о существовании
стационарных состояний атомов (1-й
постулат) и правило частот (3-й
постулат) были подтверждены
опытами *Франка и Герца*.

Катод К, испускающий за счет термоэлектронной эмиссии электроны, сетчатый электрод S и анод А соединены с гальванометром, помещены в стеклянный сосуд, наполненный парами ртути при давлении $P = 0,1 \div 1$ мм рт. ст.



Между катодом и сеткой создавалась разность потенциалов, ускоряющая электроны, а между сеткой и анодом – слабое электрическое поле, замедляющее электроны. При столкновении электрона с атомами ртути возможно взаимодействие двух типов.

1) упругое взаимодействие, в результате которого энергия электронов не изменяется, изменяется только направление движения.

При достижении электронами анода в цепи появляется электрический ток, который возрастает по мере увеличения ускоряющей разности потенциалов;

2) неупругое взаимодействие электронов с атомами ртути. При этом энергия электронов уменьшается за счет передачи ее атомам ртути.

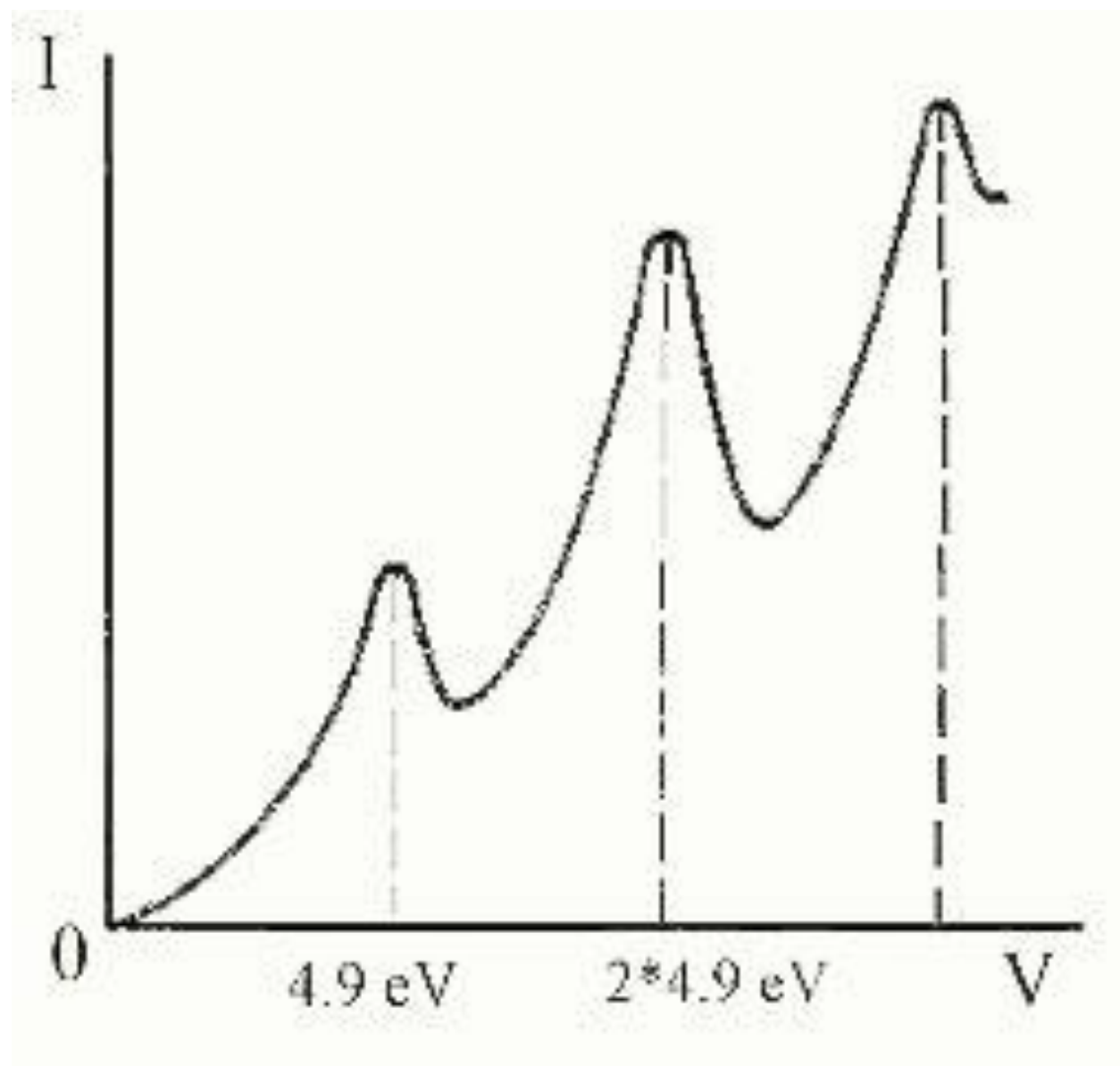
В соответствии с постулатами Бора атом ртути может поглотить энергию в виде порции $\varepsilon = h\nu$ и перейти в возбужденное состояние, занимая вышерасположенный энергетический уровень.

Первому возбужденному состоянию атома ртути соответствует энергия 4,86 эВ. При энергии менее $|e|\phi = 4,86$ эВ электроны испытывают упругое взаимодействие с атомами ртути и анодный ток возрастает.

При достижении электронами энергии $W_k = 4,86$ эВ происходят неупругие взаимодействия их с атомами ртути, которые получают порцию энергии $\varepsilon = h\nu = 4,86$ эВ и переходят из нормального состояния в возбужденное.

Такой электрон, потерявший энергию, не может преодолеть задерживающий потенциал. Поэтому при $|e|\phi = 4,86 \text{ эВ}$ происходит уменьшение тока.

Аналогичное явление наблюдается
при $|e|\phi = 2 \cdot 4,86 \text{ эВ};$
 $|e|\phi = 3 \cdot 4,86 \text{ эВ};$
 $|e|\phi = 4 \cdot 4,86 \text{ эВ}$ и т. д., когда
электроны могут испытывать два,
три и т. д. неупругих столкновений с
атомами ртути, теряют энергию и не
могут достичь анода.



При этом наблюдается скачкообразное изменение тока. Атомы паров ртути, получив порцию энергии от электронов, переходят в возбужденное состояние и занимают энергетический уровень с большей энергией.

После истечения времени $\tau \approx 10^{-8}$ сек атомы самопроизвольно переходят в исходное состояние, испуская квант света с длиной волны $\lambda \approx 254$ нм (ультрафиолетовое излучение), которое было зафиксировано во время опыта.

Таким образом, теория Бора пыталась связать классические представления о наблюдаемых на опытах явлениях с положениями, противоречащими классической физике и сыграла заметную роль в становлении квантовой механики.

Тормозное рентгеновское излучение

Электроны, вырванные из катода (например, термоэлектронной эмиссией), разгоняются напряжением U до энергии eU . Попадая в вещество анода электроны испытывают сильное торможение и становятся источником электромагнитных волн.

График эксперимента соответствует классической теории, но не было объяснения резкому обрыву и наличию $\lambda_{\min}$.

Объяснение дала квантовая теория: квант излучения $\hbar\omega_{\max}$ не может превысить энергию электрона $\hbar\omega \leq eU$.

$$\lambda_{\min} = \frac{2\pi c}{\omega_{\max}} = \frac{2\pi \hbar c}{eU}$$

