
УРАВНЕНИЯ МАКСВЕЛЛА

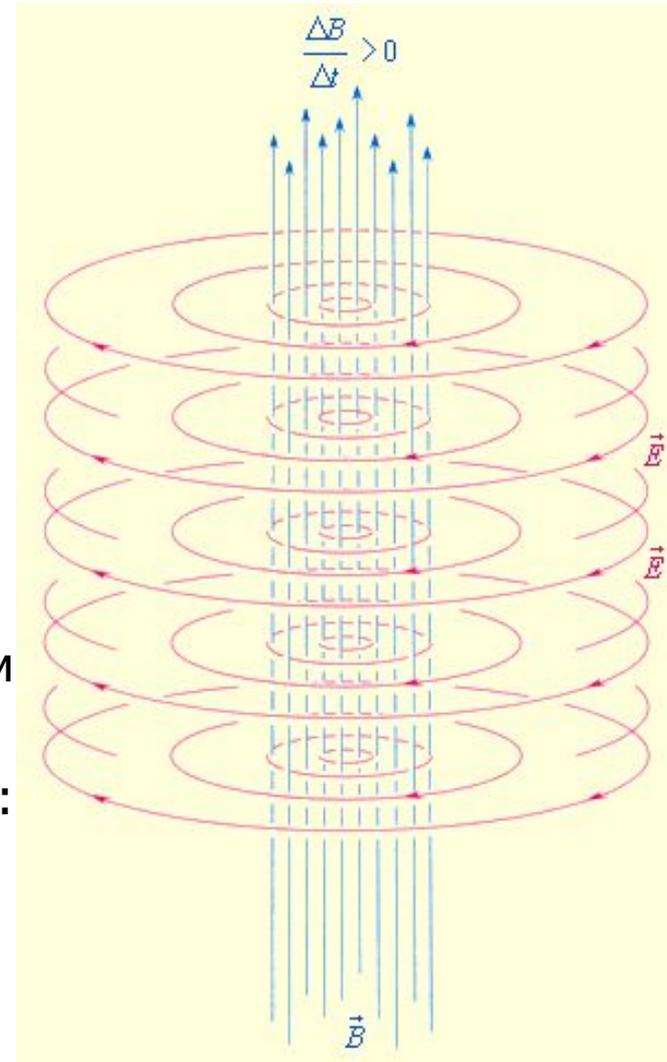
1. ВИХРЕВОЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ

Если неподвижный проводящий контур пронизывается переменным магнитным полем, то в контуре появляется индукционный ток.

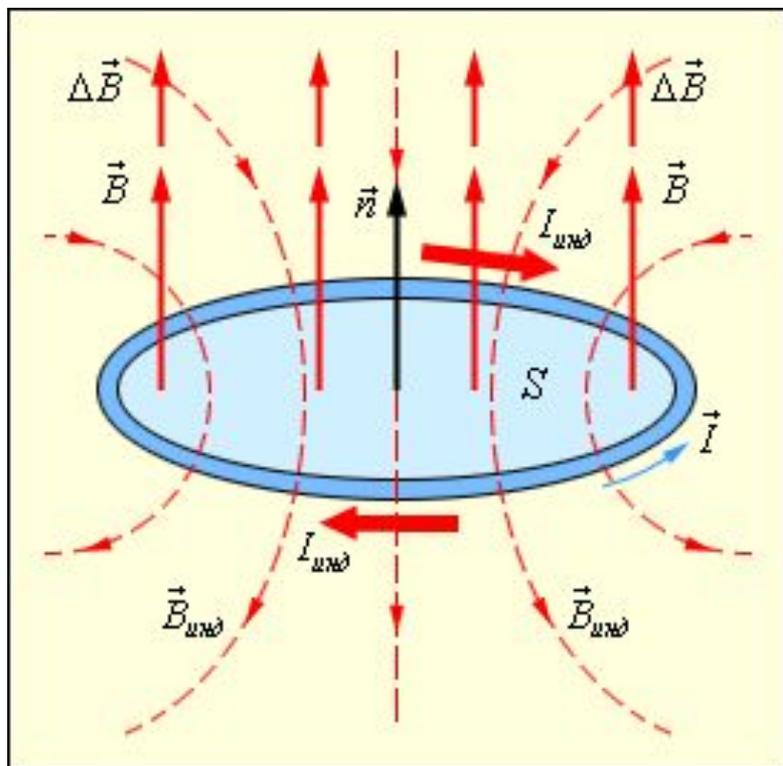
Возникновение индукционного тока говорит о том, что изменение магнитного поля вызывает появление в контуре сторонних сил $\vec{F}^* = q\vec{E}^*$, действующих на носители тока (заряды).

Действие сторонней силы связано с появлением вихревого электрического поля \vec{E}^* . ЭДС индукции равна циркуляции \vec{E}^* по контуру:

$$\mathcal{E}_i = \frac{A^*}{q} = \frac{1}{q} \oint \vec{F}^* \cdot d\vec{l} = \frac{1}{q} \oint q\vec{E}^* \cdot d\vec{l} = \oint \vec{E}^* \cdot d\vec{l}.$$



2. ПЕРВОЕ УРАВНЕНИЕ МАКСВЕЛЛА



По закону Фарадея $\mathcal{E}_i = -\frac{\Phi}{dt} \Rightarrow$

$$\oint_L \vec{E}^* dl = -\frac{\Phi}{dt}; \quad \Phi = \int_S \vec{B} d\vec{S} \Rightarrow$$

$$\oint_L \vec{E}^* dl = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} d\vec{S}.$$

Поскольку контур и поверхность S , для которой вычисляется магнитный поток, неподвижны, то операции дифференцирования по времени и интегрирования по поверхности можно поменять местами:

$$\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} d\vec{S} = \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S} \Rightarrow \oint_L \vec{E}^* dl = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S}.$$

3. ЗАКОН ФАРАДЕЯ В ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ФОРМЕ

Первое уравнение Максвелла выражает закон электромагнитной индукции Фарадея:

$$\oint_L \vec{E}^* dl = - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} dS.$$

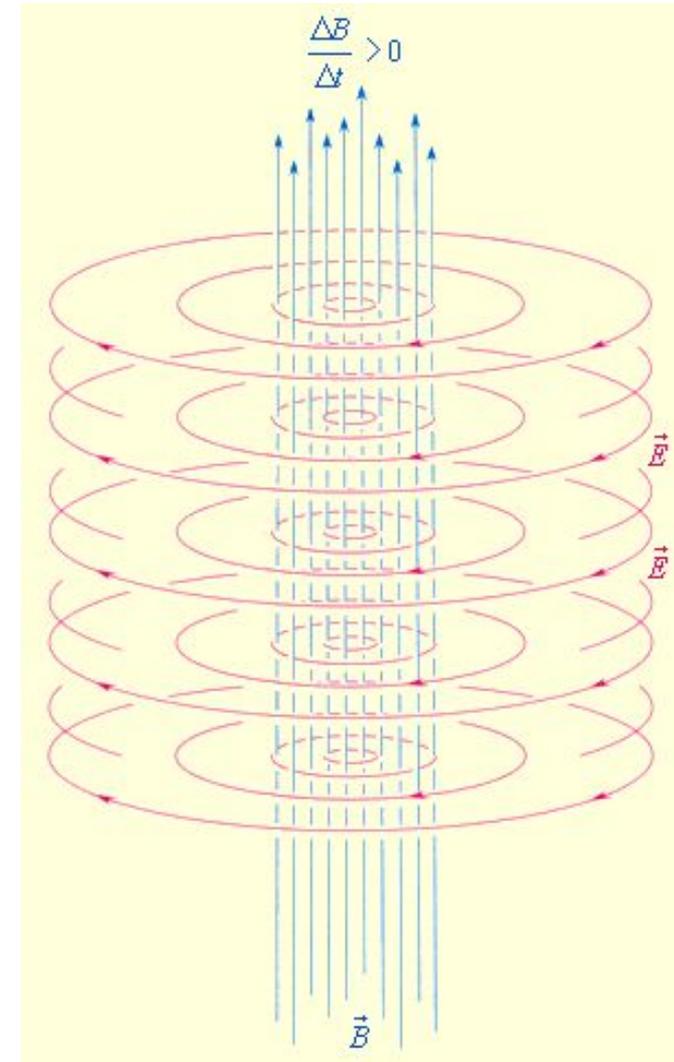
Преобразуем левую часть по теореме Стокса:

$$\oint_L \vec{E}^* dl = \int_S [\nabla \times \vec{E}^*] dS \Rightarrow \int_S [\nabla \times \vec{E}^*] dS = - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} dS.$$

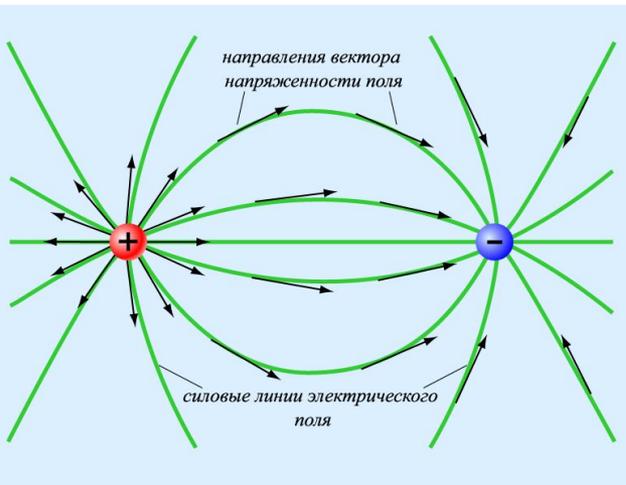
Ввиду произвольности выбора поверхности интегрирования в каждой точке должно выполняться равенство

$$\boxed{[\nabla \times \vec{E}^*] = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}},$$

выражающее закон электромагнитной индукции Фарадея в дифференциальной форме.



4. ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ



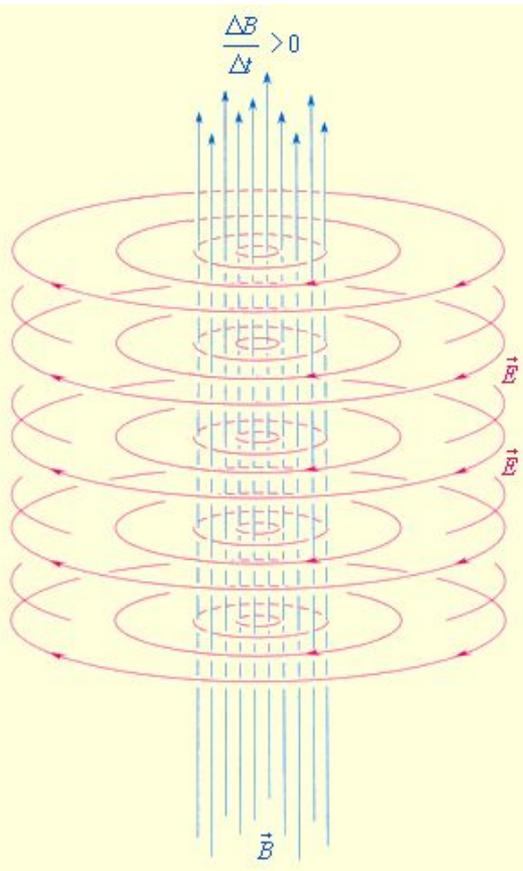
Вихревое электрическое поле \vec{E}^* , порождаемое переменным магнитным полем существенно отличается от порождаемого зарядами электростатического поля \vec{E}_0 .

Электростатическое поле потенциально ($[\nabla \times \vec{E}_0] = 0$), его линии напряженности начинаются на положительных зарядах, заканчиваются на отрицательных.

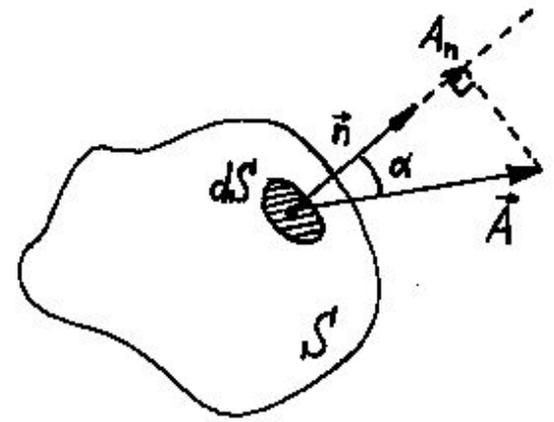
Вихревое поле непотенциально ($[\nabla \times \vec{E}^*] = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$), его линии напряженности замкнуты сами на себя, для создания поля требуются не электрические заряды, а меняющееся во времени магнитное поле.

В общем случае $\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}^* \Rightarrow$

$$[\nabla \times \vec{E}] = [\nabla \times \vec{E}_0] + [\nabla \times \vec{E}^*] \Rightarrow [\nabla \times \vec{E}] = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}.$$



5. УРАВНЕНИЕ НЕПРЕРЫВНОСТИ



Рассмотрим воображаемую замкнутую поверхность S в некоторой среде с током.

Выражение $\oint_S \mathbf{j} dS$ определяет заряд, вышедший из объема V , ограниченного поверхностью S .

В силу закона сохранения заряда эта величина должна быть равна скорости убывания заряда q , содержащегося в данном объеме:

$$\oint_S \mathbf{j} dS = -\frac{dq}{dt}; \quad q = \int_V \rho dV \Rightarrow \oint_S \mathbf{j} dS = -\frac{d}{dt} \int_V \rho dV;$$

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho dV \equiv \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV \Rightarrow \oint_S \mathbf{j} dS = -\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV.$$

По теореме Остроградского-Гаусса

$$\oint_S \mathbf{j} dS = \int_V (\nabla \cdot \mathbf{j}) dV \Rightarrow$$

$$\int_V (\nabla \cdot \mathbf{j}) dV = -\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV \Rightarrow \boxed{\nabla \cdot \mathbf{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}}$$

- уравнение непрерывности. $\rho = const \Rightarrow \nabla \cdot \mathbf{j} = 0.$

6. ТОК СМЕЩЕНИЯ

Теорема о циркуляции в виде $[\nabla \times \vec{H}] = \vec{j}$ противоречит уравнению непрерывности:

$$\nabla[\nabla \times \vec{H}] = \nabla \vec{j}; \quad \nabla[\nabla \times \vec{H}] \equiv 0 \Rightarrow \nabla \vec{j} = 0, \quad \text{но} \quad \nabla \vec{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}.$$

Вывод: $\nabla \vec{j} = 0$ только для стационарных процессов, при нестационарных процессах плотность зарядов ρ может меняться со временем. В этом случае в полном согласии с уравнением непрерывности $\nabla \vec{j} \neq 0$.

Чтобы согласовать теорему о циркуляции и уравнение непрерывности, Максвелл ввел в правую часть теоремы о циркуляции дополнительное слагаемое и назвал его плотностью тока смещения. Таким образом,

$$[\nabla \times \vec{H}] = \vec{j}_0 + \vec{j}_c; \quad \vec{j}_0 \equiv \vec{j}; \quad \vec{j}_n = \vec{j} + \vec{j}_c. \quad \vec{j}_c = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \Rightarrow [\nabla \times \vec{H}] = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}.$$

Сумму тока проводимости и тока смещения принято называть **ПОЛНЫМ**

ТОКОМ.

7. УРАВНЕНИЯ МАКСВЕЛЛА В ИНТЕГРАЛЬНОЙ ФОРМЕ

$$\oint_l \vec{E} d\vec{l} = - \int_s \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S} \quad (1)$$

$$\oint_s \vec{B} d\vec{S} = 0 \quad (2)$$

$$\oint_l \vec{H} d\vec{l} = \int_s (\vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}) d\vec{S} \quad (3)$$

$$\oint_s \vec{D} d\vec{S} = \int_v \rho dV \quad (4)$$

Уравнение (1) является обобщением закона Фарадея (закона электромагнитной индукции), уравнение (3) - обобщенный закон полного тока, уравнения (2) и (4) выражают теорему Остроградского - Гаусса для магнитного и электрического полей, соответственно

8. УРАВНЕНИЯ МАКСВЕЛЛА В ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ФОРМЕ

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0$$

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho$$

Материальные уравнения :

$$\vec{D} = \varepsilon \varepsilon_0 \vec{E}, \quad \vec{B} = \mu \mu_0 \vec{H}, \quad \vec{j} = \sigma \vec{E}$$

(среда изотропная , несегнетоэлектрическая ,
неферромагнитная)