

Лекция № 4

Логические основы построения ЭВМ

Вопросы лекции:

1. Основные понятия математической логики
2. Операции в математической логике
3. Алгебра логики и двоичное кодирование
4. Законы алгебры логики
5. Логические основы построения ЭВМ

Основные понятия математической логики

Алгебра логики — это раздел математики, изучающий высказывания, рассматриваемые со стороны их логических значений (истинности или ложности) и логических операций над ними.

Алгебра логики возникла в середине XIX века в трудах английского математика **Джорджа Буля**. Ее создание представляло собой попытку решать традиционные логические задачи алгебраическими методами.

Высказывание (суждение) — это повествовательное предложение, в котором что-либо утверждается или отрицается.

По поводу любого высказывания можно сказать, истинно оно или ложно. Например: «Лед — твердое состояние воды» — истинное высказывание. «Треугольник, это геометрическая фигура» — истинное высказывание.

«Париж — столица Китая» — ложное высказывание.

$6 < 5$ — ложное высказывание.

Логическое высказывание — это любое повествовательное предложение, в отношении которого можно однозначно сказать, истинно оно или ложно.

Основные понятия математической логики

Разумеется, не всякое предложение является логическим высказыванием. Высказываниями не являются, например, предложения "ученик десятого класса" и "информатика — интересный предмет". Первое предложение ничего не утверждает об ученике, а второе использует слишком неопределённое понятие "интересный предмет". **Вопросительные и восклицательные предложения также не являются высказываниями,** поскольку говорить об их истинности или ложности не имеет смысла.

Алгебра логики рассматривает любое высказывание только с одной точки зрения — является ли оно истинным или ложным. Зачастую трудно установить истинность высказывания. Так, например, высказывание: "площадь поверхности Индийского океана равна 75 млн кв. км" в одной ситуации можно посчитать ложным, а в другой — истинным. Ложным — так как указанное значение неточное и вообще не является постоянным. Истинным — если рассматривать его как некоторое приближение, приемлемое на практике.

Предложения типа "в городе А более миллиона жителей", "у него голубые глаза" не являются высказываниями, так как для выяснения их истинности или ложности нужны дополнительные сведения: о каком конкретно городе или человеке идет речь. Такие предложения называются **высказывательными формами.**

Основные понятия математической логики

Высказывательная форма — это повествовательное предложение, которое прямо или косвенно содержит хотя бы одну переменную и становится высказыванием, когда все переменные замещаются своими значениями.

Употребляемые в обычной речи слова и словосочетания "не", "и", "или", "если... , то", "тогда и только тогда" и другие позволяют из уже заданных высказываний строить новые высказывания. Такие слова и словосочетания называются **логическими связками**.

Высказывания, образованные из других высказываний с помощью логических связок, называются **составными**. Высказывания, не являющиеся составными, называются **элементарными**.

Так, например, из элементарных высказываний "Петров — врач", "Петров - шахматист" при помощи связки "и" можно получить составное высказывание "Петров — врач и шахматист", понимаемое как "Петров — врач, хорошо играющий в шахматы".

При помощи связки "или" из этих же высказываний можно получить составное высказывание "Петров - врач или шахматист", понимаемое в алгебре логики как "Петров или врач, или шахматист, или и врач и шахматист одновременно".

Основные понятия математической логики

Истинность или ложность получаемых таким образом составных высказываний зависит от истинности или ложности элементарных высказываний.

Чтобы обращаться к логическим высказываниям, им назначают имена. Пусть через A обозначено высказывание "Тимур поедет летом на море", а через B — высказывание "Тимур летом отправится в горы". Тогда составное высказывание "Тимур летом побывает и на море, и в горах" можно кратко записать как A и B . Здесь "и" - логическая связка, A , B - логические переменные, которые могут принимать только два значения - "истина" или "ложь", обозначаемые, соответственно, "1" и "0".

Каждая логическая связка рассматривается как операция над логическими высказываниями и имеет свое название и обозначение:
Логические величины: понятия, выражаемые словами: ИСТИНА, ЛОЖЬ (true, false). Следовательно, истинность высказываний выражается через логические величины.

Логическая константа: ИСТИНА или ЛОЖЬ.

Логическая переменная: символически обозначенная логическая величина. Следовательно, если известно, что A , B , X , Y и пр. — переменные логические величины, то это значит, что они могут принимать значения только «ИСТИНА» или «ЛОЖЬ».

Операции в математической логике

Логическое выражение — простое или сложное высказывание. Сложное высказывание строится из простых с помощью логических операций (связок).

Логические операции. В математической логике определены пять основных логических операций: **конъюнкция**, **дизъюнкция**, **отрицание**, **импликация**, **эквиваленция**. Первые три из них составляют полную систему операций, вследствие чего остальные операции могут быть выражены через них (нормализованы). В информатике обычно используются эти три операции.

Конъюнкция (логическое умножение). В русском языке она выражается союзом «И». В математической логике используются знаки **&** (амперсанд) или **∧**. Конъюнкция — двухместная операция: записывается в виде: $A \wedge B$. Значение такого выражения будет ЛОЖЬ, если значение хотя бы одного из операндов ложно.

Дизъюнкция (логическое сложение). В русском языке этой связке соответствуют союз ИЛИ. В математической логике она обозначается знаком **∨**. Дизъюнкция — двухместная операция; записывается в виде: $A \vee B$. Значение такого выражения будет ИСТИНА, если значение хотя бы одного из операндов истинно.

Операции в математической логике

Отрицание. В русском языке этой связке соответствует частица НЕ (в некоторых высказываниях применяется оборот «неверно, что...»). Отрицание — унарная (одноместная) операция; записывается в виде: — $\neg A$ или \bar{A} .

Логическая формула (логическое выражение) — формула, содержащая лишь логические величины и знаки логических операций. Результатом вычисления логической формулы является ИСТИНА или ЛОЖЬ.

Пример 1. Рассмотрим сложное высказывание: «Число 6 делится на 2, и число 6 делится на 3». Представить данное высказывание в виде логической формулы.

Обозначим через A простое высказывание «число 6 делится на 2», а через B простое высказывание «число 6 делится на 3». Тогда соответствующая логическая формула имеет вид: $A \& B$. Очевидно, ее значение — ИСТИНА.

Пример 2. Рассмотрим сложное высказывание: «Летом я поеду в деревню или в туристическую поездку».

Обозначим через A простое высказывание «летом я поеду в деревню», а через B - простое высказывание «летом я поеду в туристическую поездку». Тогда логическая форма сложного высказывания имеет вид $A \vee B$.

Операции в математической логике

Пример 3. Рассмотрим высказывание: «Неверно, что 4 делится на 3». Обозначим через A простое высказывание «4 делится на 3».

Тогда логическая форма отрицания этого высказывания имеет вид \overline{A} .

Правила выполнения логических операций отражены в следующей таблице, которая называется **таблицей истинности**.

A	B	\overline{A}	$A \& B$	$A \vee B$
И	И	Л	И	И
И	Л	Л	Л	И
Л	И	И	Л	И
Л	Л	И	Л	Л

Операции в математической логике

Последовательность выполнения операций в логических формулах определяется старшинством операций. В порядке убывания старшинства логические операции расположены так:

1. отрицание,
2. конъюнкция,
3. дизъюнкция.

Кроме того, на порядок операции влияют скобки, которые можно использовать в логических формулах.

Например: $(A \text{ и } B)$ или $(\text{не } A \text{ и } B)$ или $(\text{не } A \text{ и не } B)$

Пример 4. Вычислить значение логической формулы:

$\text{не } X \text{ и } Y \text{ или } X \text{ и } Z,$

если логические переменные имеют следующие значения:

$X = \text{ЛОЖЬ}, Y = \text{ИСТИНА}, Z = \text{ИСТИНА}.$

Отметим цифрами сверху порядок выполнения операций в выражении:

1 2 4 3
 $\text{не } X \text{ и } Y \text{ или } X \text{ и } Z.$

Используя таблицу истинности, вычислим формулу по шагам:

- 1) $\text{не } \text{ЛОЖЬ} = \text{ИСТИНА};$
- 2) $\text{ИСТИНА и ИСТИНА} = \text{ИСТИНА};$
- 3) $\text{ЛОЖЬ и ИСТИНА} = \text{ЛОЖЬ};$
- 4) $\text{ИСТИНА или ЛОЖЬ} = \text{ИСТИНА}.$

Ответ: **ИСТИНА.**

Алгебра логики и двоичное кодирование

Математический аппарат алгебры логики очень удобен для описания того, как функционируют аппаратные средства компьютера, поскольку основной системой счисления в компьютере является двоичная, в которой используются цифры 1 и 0, а значений логических переменных тоже два: “1” и “0”.

Из этого следует два вывода:

1. Одни и те же устройства компьютера могут применяться для обработки и хранения как числовой информации, представленной в двоичной системе счисления, так и логических переменных;
2. На этапе конструирования аппаратных средств алгебра логики позволяет значительно упростить логические функции, описывающие функционирование схем компьютера, и, следовательно, уменьшить число элементарных логических элементов, из десятков тысяч которых состоят основные узлы компьютера.

Алгебра логики и двоичное кодирование

В 1938 году К. Шеннон впервые применил булеву алгебру для анализа и разработки релейных переключательных схем. Так был разработан метод представления любой сети, состоящей из набора переключателей и реле, математическими выражениями, а также принципы их преобразования на основе правил булевой алгебры. Ввиду наличия аналогий между релейными и современными электронными схемами аппарат булевой алгебры нашел широкое применение для анализа, описания проектирования логических схем (Л.с.).

Использование булевой алгебры позволяет:

- удобно оперировать с булевыми выражениями, описывающими те или иные устройства и узлы, а не со схемами;
- на формальном уровне путем эквивалентных преобразований упрощать их, давая возможность создавать экономически и технически более совершенные электронные устройства.

Использование операций булевой алгебры в программном обеспечении микро-ЭВМ позволяет заменить аппаратную логику на программную, что является одним из применений микропроцессора.

Таким образом, булева алгебра является основным средством анализа, разработки и описания структурно-функциональной архитектуры современной вычислительной техники и поэтому заслужено является составной частью целого ряда разделов вычислительных наук.

Законы алгебры логики

В булевой алгебре выполняются **законы**:

сочетательный

$$(a + b) + c = a + (b + c);$$

$$(a * b) * c = a * (b * c);$$

переместительный

$$a + b = b + a ;$$

$$a * b = b * a ;$$

распределительный

$$a * (b + c) = a * b + a * c ;$$

$$a + b * c = (a + b) * (a + c).$$

Законы алгебры логики

Справедливы также следующие соотношения:

$$\overline{0} = 1; \quad \overline{1} = 0; \quad a + \overline{a} = 1;$$

$$a * \overline{a} = 0; \quad \overline{\overline{a}} = a$$

- для инверсии;

$$a + a = a;$$

$$a * a = a;$$

- идемпотенции;

$$a + a * b = a \quad a + \overline{a} * b = a + b \quad a * (\overline{a} + b) = a * b \quad - \text{поглощения};$$

$$\overline{(a + b)} = \overline{a} * \overline{b};$$

$$\overline{(a * b)} = \overline{a} + \overline{b}$$

- Де Моргана.

Логические основы построения ЭВМ

Функция в алгебре логики - это алгебраическое выражение, содержащее элементы алгебры логики, связанные между собой операциями, определенными в этой алгебре.

Представив **Л.с.** в виде некоторого черного ящика, имеющего n входов и один выход, его поведение можно определить некоторой логической **F** (x, x, \dots, x) - функцией от n логических переменных. Логическая **F** -функция может быть задана таблицей истинности или посредством булевых выражений. **Л.с.**, представленные одним из этих способов, называются **комбинационными**.

x	y	z	G (x,y,z)
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

$$G(x,y,z) = y + x * z \equiv y \vee x \wedge z$$

Логические основы построения ЭВМ

Схемы любых вычислительных устройств можно условно разбить на три группы :

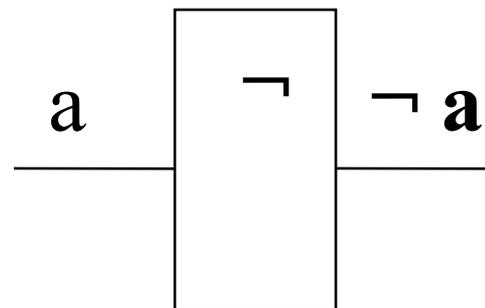
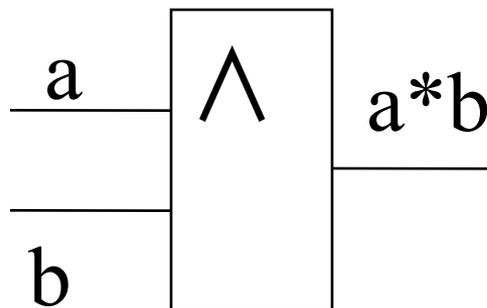
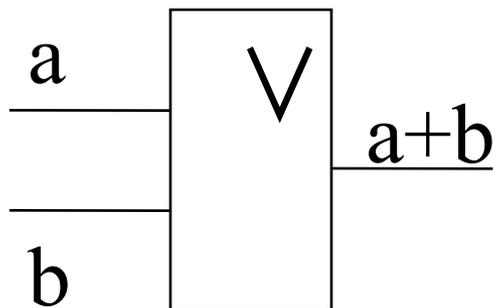
- исполнительные;
- информационные;
- управляющие.

Во всех случаях, как правило, в тех или иных точках логических схем появляются сигналы двух различных уровней. Следовательно, сигналы могут представляться бинарными символами $\{0, 1\}$ или логическими значениями $\{\text{истина, ложь}\}$. Поэтому множество элементов $V = \{0, 1\}$ выбирается бинарным. Такая алгебра называется **бинарной** или **переключательной**, а ее элементы - **константами**, или **логическими 0 и 1**. Для структурно-функционального описания Л.с. ее узлам ставятся в соответствие булевы переменные, принимающие значения 0 и 1; для их обозначения используются буквы латинского алфавита.

На основе базовых вентилях может быть построена любая Л.с.; при этом вентили могут иметь любое количество входов, определяемое количеством переменных логического выражения, описывающего Л.с.

Логические основы построения ЭВМ

Булева алгебра позволяет не только проводить анализ Л.с., описываемых таблицей истинности или логическими выражениями, но и синтез их из более простых. Элементарные Л.с. , используемые при создании средств цифровой вычислительной техники , называются **вентильями**. Так как набор { **И** , **ИЛИ** , **НЕ** } логических операций является универсальным (функционально полным), т.е. на его основе можно представить любую логическую функцию, то соответствующий ему набор вентилей также будет универсальным.



Для построения современных ЭВМ обычно применяются системы интегральных элементов, у которых с целью большей унификации в качестве базовой Л.с. используется всего одна из схем: И - НЕ (штрих Шеффера), ИЛИ - НЕ (стрелка Пирса), И - ИЛИ - НЕ.

