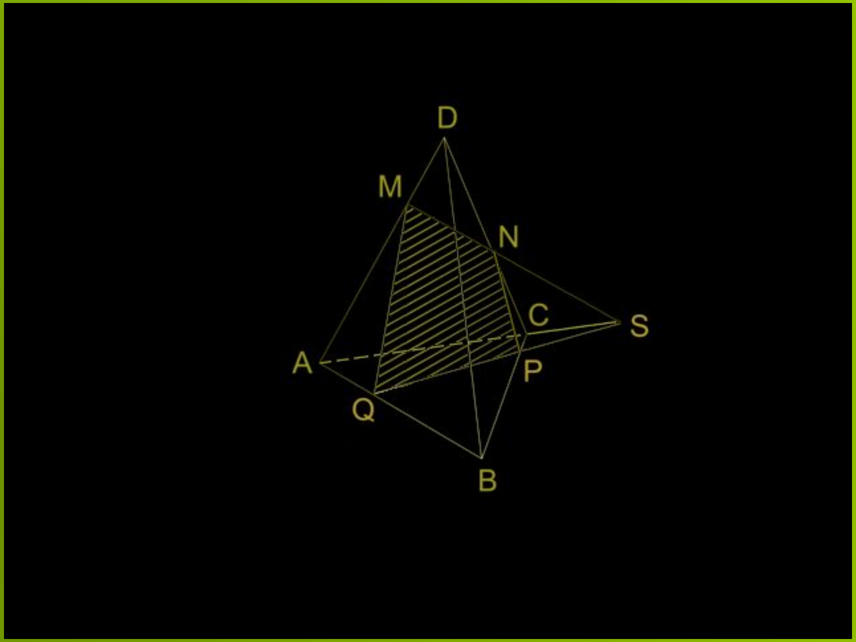
Построение сечения многогранника плоскостью

Сечения многогранника плоскостью используются при решении многих стереометрических задач. Мною разобраны некоторые способы построения сечений, а также задачи связанные с их построением. Рассмотрены сечения плоскостями, проходящими через данную точку и прямую, через три данные точки, а также сечения, когда секущая плоскость задана одним из условий.

Плоскость проходит через три данные точки

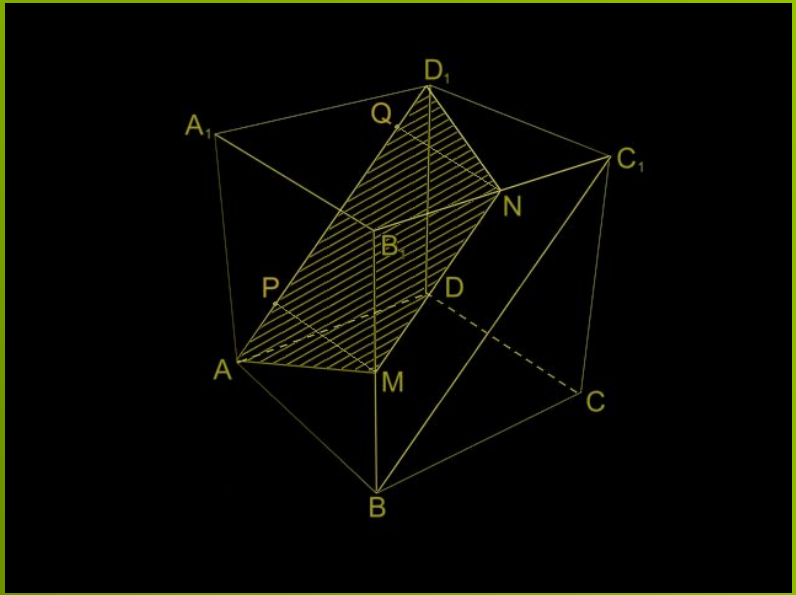
На рисунке показано построение сечения тетраэдра плоскостью, проходящей через точки M, N, P на ребрах тетраэдра. Точки M и N заданы так, что прямые MN и AC не параллельны. Отрезки MN и AP являются сторонами сечения. Точка P – общая для плоскостей MNP и ABC. Вторую общую точку находим в пересечении прямых MN и AC, S=MNAC. Прямая SP – линия пересечения плоскостей MNP и ABC. Пересечение этой прямой с ребром AB дает вершину Q сечения, Q=SPAB. Сечение – четырехугольник MNPQ.



Плоскость проходит через данную точку и прямую

Дано:

Длина ребра куба равна a. Найти площадь сечения проведенного через диагональ AD_1 грани AA_1D_1D и середину M ребра BB_1.



Решение:

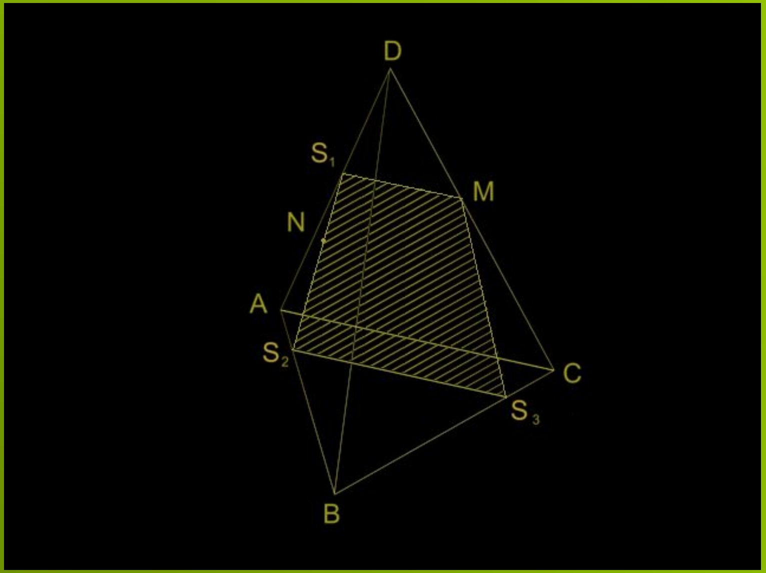
Обозначим секущую плоскость α. отрезки AD_1 и AM принадлежат и плоскости и граням куба, поэтому являются сторонами сечения. Построим сторону сечения в грани BB_1C_1C. Плоскости BB_1C_1C и AA_1D_1D параллельны, поэтому линия пересечения плоскостей и BB_1C_1C параллельна прямой AD_1. Поскольку прямые BC_1 и AD_1 параллельны, эта линия пересечения параллельна и прямой BC_1. Проводим через точку M в плоскости BB_1C_1C прямую, параллельную прямой BC_1, ее пересечение с ребром B_1C_1 дает вершину сечения. Сечение – трапеция $AMND_1$, $MN \parallel AD_1$.

Найдем длины сторон этой трапеции. Имеем $AD_1 = \frac{a}{\sqrt{2}}$, отрезок MN – средняя линия в треугольнике BB_1C_1, поэтому $MN = \frac{1}{2} BC_1 = \frac{a}{\sqrt{2}}$. В прямоугольных треугольниках ABM и D_1C_1N ($AB = C_1D_1 = a$, $BM = NC_1 = \frac{a}{2}$) находим $AM = D_1N = \frac{a\sqrt{5}}{2}$. Значит, трапеция $AMND_1$ равнобедренная. Найдем ее высоту. Опускаем перпендикуляры MP и NQ на основание AD_1, получаем $PQ = MN = \frac{a}{\sqrt{2}}$, $D_1Q = PA = \frac{1}{2}(D_1A\text{-}QP) = \frac{a}{2\sqrt{2}}$. В прямоугольном треугольнике D_1QN ($D_1N = \frac{a\sqrt{5}}{2}$, $D_1Q = \frac{a}{2\sqrt{2}}$) находим $NQ = \frac{3a}{2\sqrt{2}}$. Определяем площадь сечения

$S = \frac{1}{2} (MN + D_1A) * NQ = \frac{9}{8} a^2$.

Ответ: $\frac{9}{8} a^2$

Плоскость проходит через две точки параллельно ребру (прямой).



Дано:

На рисунке показано построение сечения тетраэдра плоскостью, параллельной ребру AC и проходящей через точку M ребра CD и точку N в грани ABD.

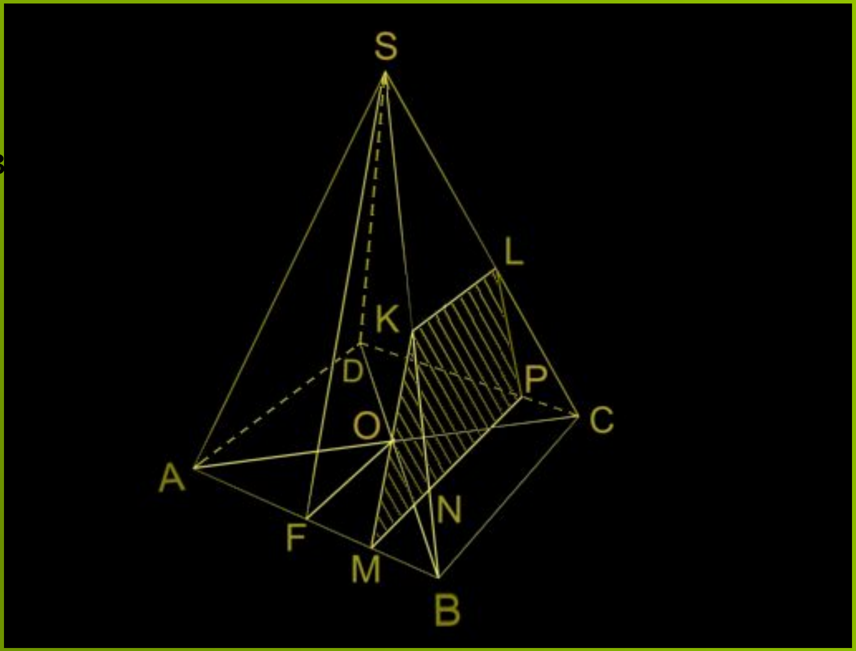
Решение:
Построение основано на следующей теореме:
Если плоскость проходит через прямую, параллельную другой плоскости и пересекает эту плоскость, то линия пересечения плоскостей параллельна данной прямой. Обозначим плоскость сечения α. Плоскость ACD имеет с плоскостью α общую точку M и содержит прямую AC, параллельную плоскости α. Следовательно, линия пересечения этих плоскостей проходит через точку M параллельно прямой AC. В соответствии с этим построена сторона MS_1 сечения, $MS_1 \parallel AC$. Проведя прямую S_1N, найдем вторую сторону сечения – S_1S_2. На рисунке точка N дана так, что точка S_2 принадлежит ребру AB. Плоскость ABC также содержит прямую AC, параллельную плоскости сечения. Поэтому сторона сечения S_2S_3 проведена параллельно ребру AC. Отрезок S_3M – четвертая сторона сечения. Сечение $MS_1S_2S_3$ – трапеция ($MS_1 \parallel AC \parallel S_2S_3$).

Построение сечений многогранника плоскостью, заданной точкой и условием параллельности или перпендикулярности к указанным прямым и плоскостям.

1. Плоскость проходит через данную точку перпендикулярно к данной прямой.

Дано:

На ребре AB правильной четырехугольной пирамиды SABCD дана точка M, BM = AB. Через точку M проведена секущая плоскость перпендикулярно к прямой AB. Построить сечение и вычислить его площадь, если сторона основания пирамиды равна a, а высота пирамиды H.



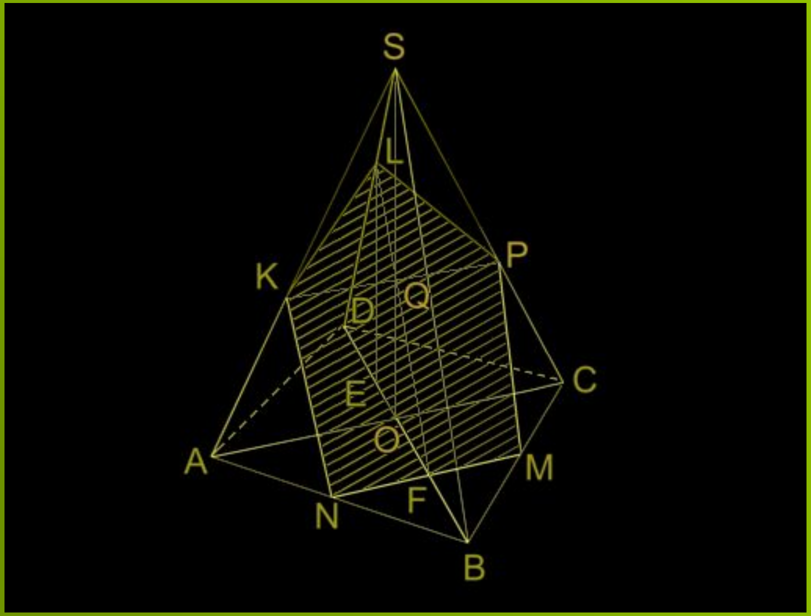
Решение:

На ребре AB пирамиды SABCD откладываем отрезок BM = AB. Через точку M в грани ASB проводим MKAB (точка K лежит на ребре, MK║SF, где SF – апофема пирамиды), а в основании ABCD проводим MPAB, где точка P лежит на ребре DC (MP║FO). Плоскости SFO и KMP параллельны между собой и перпендикулярны к AB, следовательно, перпендикуляры к основанию ABCD пирамиды. Так как BC║MP, то прямая BC параллельна секущей плоскости KMP. Поэтому грань BSC, имея с секущей плоскостью общую точку K, пересекается с нею по прямой KL║BC – по теореме, обратной теореме о параллельности прямой и плоскости. Искомое сечение трапеция MKLP. Пусть N– точка пересечения диагонали BD основания пирамиды и отрезка MP. Но KN║SO как линии пересечения параллельных плоскостей SFO и KMP третьей плоскостью DSB. Поскольку SO перпендикулярна к плоскости основания пирамиды, то и отрезок KN перпендикулярен к этой плоскости. Следовательно, KNMP, отрезок KM – высота трапеции MKLP.

2. Плоскость проходит через данную точку и параллельна двум пересекающимся или скрещивающимся прямым. Пример 1.

Дано:

Построить сечение правильной четырехугольной пирамиды SABCD плоскостью, проходящей через середину M стороны BC основания параллельно диагонали AC основания и боковому ребру SB. Вычислить площадь сечения, если длина стороны основания пирамиды a, а боковое ребро наклонено к плоскости основания под углом α.



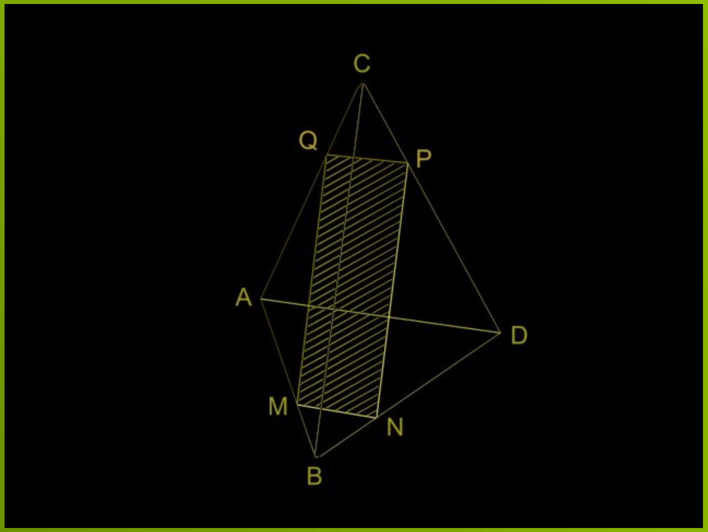
Решение:

Ссылаясь на упомянутую выше теорему, последовательно строим линии пересечения секущей плоскости с плоскостями основания ABC, DSB и ASC. Эти построения дают нам все искомые вершины сечения. Из хода построения следует, что N – середина AB, точка Q – середина SO, следовательно, точки K и P – середины боковых ребер SA и SC пирамиды соответственно. Отсюда: KN║SB║PM. Кроме того QF║KN║PM. Но QFNM, в чем легко убедиться применив теорему о трех перпендикулярах. Следовательно, сечение составлено из прямоугольника KNMP и равнобедренного треугольника KLP, имеющих общее основание KP.

2. Плоскость проходит через данную точку и параллельна двум пересекающимся или скрещивающимся прямым. Пример 2.

Дано:

На ребре AB тетраэдра расположена точка M так, что AM:AB = λ, $0<\lambda<1$. Построить сечение тетраэдра плоскостью, проходящей через точку M и параллельно ребрам AD и BC. При каком значении λ это сечение будет ромбом, если AD:BC = m?



Решение:

Секущую плоскость обозначим α. Линия пересечения этой плоскости с плоскостью ABD параллельна прямой AD (AD $\parallel$ α). Проводим MN $\parallel$ AD. Линии пересечения плоскостей BCA и BCD с плоскостью параллельны прямой BC (BC $\parallel$ α). Строим MQ $\parallel$ BC и NP $\parallel$ BC. Четвертая сторона сечения PQ параллельна ребру AD. Сечение – параллелограмм MNPQ (MN $\parallel$ AD $\parallel$ PQ, NP $\parallel$ BC $\parallel$ MQ).

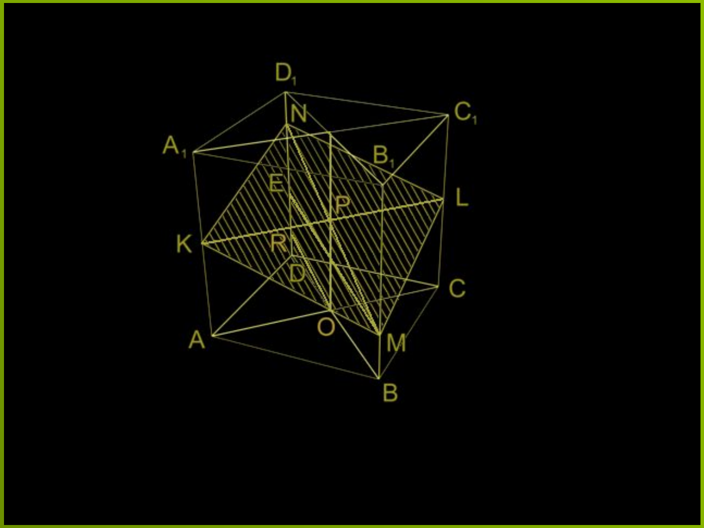
Выразим длины сторон параллелограмма MNPQ через длины ребер AD и BC. Из подобия треугольников AMQ и ABC имеем MQ:BC = AN:AB = λ, откуда MQ = λ*BC. Теперь находим BM = AB – AM = (1– λ)*AB и из подобия треугольников BMN и BAD получаем MN:AD = BM:BA = 1– λ, т.е. MN = (1– λ)*AD.подставляя в равенство MN = MQ получаем выражения, будем иметь (1– λ)*AD = λ*BC, откуда $\lambda = \frac{AD}{BC+AD} = \frac{m}{m+1}$

Ответ: сечение будет ромбом при $\lambda = \frac{m}{m+1}$.

3. Плоскость проходит через данную точку и параллельна двум пересекающимся или скрещивающимся прямым.

Дано:

В основании прямой призмы лежит ромб. В плоскости меньшего диагонального сечения призмы дана прямая MN, пересекающая оба боковых ребра призмы. Через эту прямую проведена секущая плоскость, параллельная диагонали основания призмы. Построить сечение и исследовать его форму.



Решение:

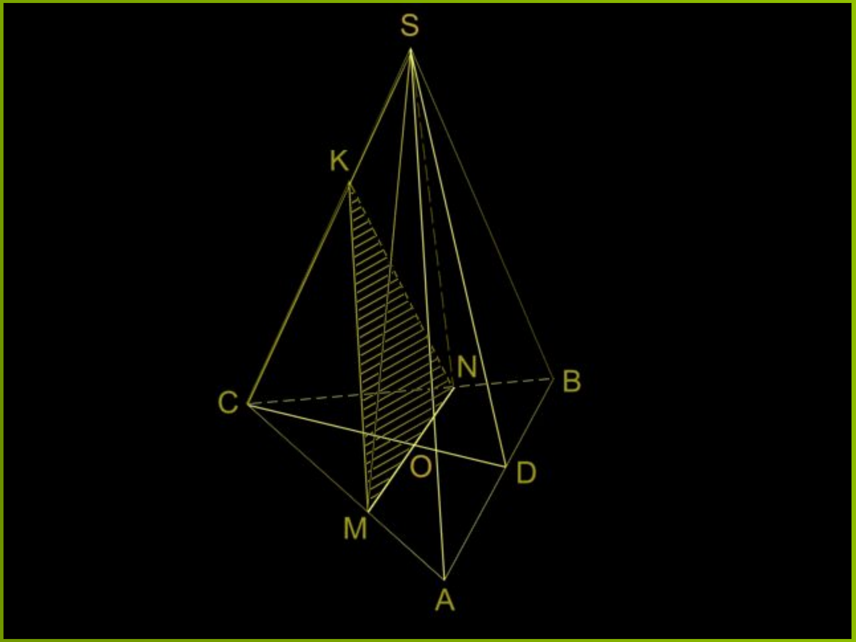
Пусть в ромбе ABCD $BD<AC$. Тогда меньшее диагональное сечение призмы проходит через BD. Построение искомого сечения не составляет труда. Находим точку P пересечения прямой MN с осью OO_1 призмы, в ее диагональном сечении AA_1C_1C проводим $KL \parallel AC$. Остается соединить последовательно отрезками точки K, M, L, N пересечения секущей плоскости с боковыми ребрами призмы.

Из условия следует, что секущая плоскость пересекает все боковые ребра параллелепипеда. В сечении получаем параллелограмм (противоположные боковые грани пересекаются секущей плоскостью по параллельным прямым). В данном случае сечение является ромбом. Для этого достаточно доказать, что в параллелограмме KMLN диагонали взаимно перпендикулярны. Последнее следует из того, что проекцией наклонной на плоскости основания призмы является диагональ DB основания, но ACDB, поэтому ACNM (для доказательства последнего утверждения можно провести $OR \parallel MN$ и применить теорему о трех перпендикулярах). А так как $KL \parallel AC$, то KLNM.

4. Плоскость проходит через данную точку и параллельна данной плоскости.

Дано:

Построить сечение правильной треугольной пирамиды плоскостью, проходящей через центр основания параллельно боковой грани пирамиды.



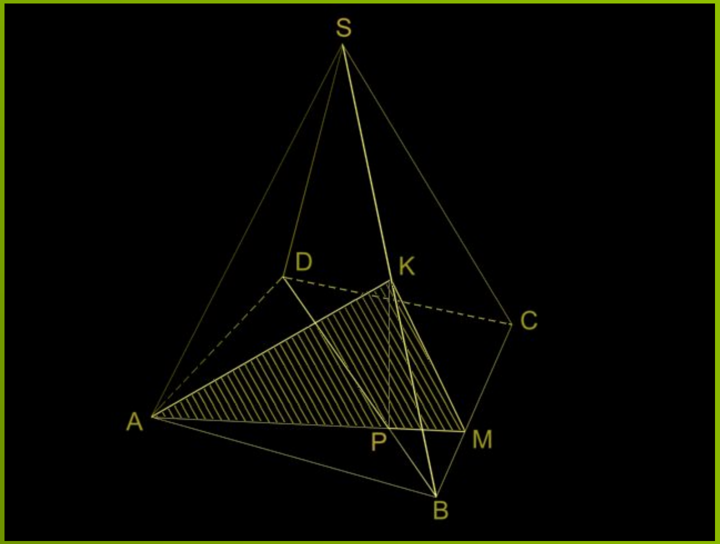
Решение:

Пусть секущая плоскость параллельна грани ASB пирамиды SABC. После проведения через центр O основания пирамиды прямой MN║AB следы секущей плоскости в боковых гранях можно строить по-разному: либо провести OK║SD (SD – апофема пирамиды) и соединить точку K с точками M и N, либо провести NK║BS и MK║AS (прямые MK и NK пересекаются в точке K на ребре SC). Можно, проведя NK║BS и получив точку K, соединить ее с точкой M.

5. Плоскость проходит через данную прямую и перпендикулярна к данной плоскости (не перпендикулярной к данной прямой).

Дано:

Построить сечение правильной четырехугольной пирамиды SABCD плоскостью, проходящей через медиану AK боковой грани ASB и перпендикулярно к плоскости основания.

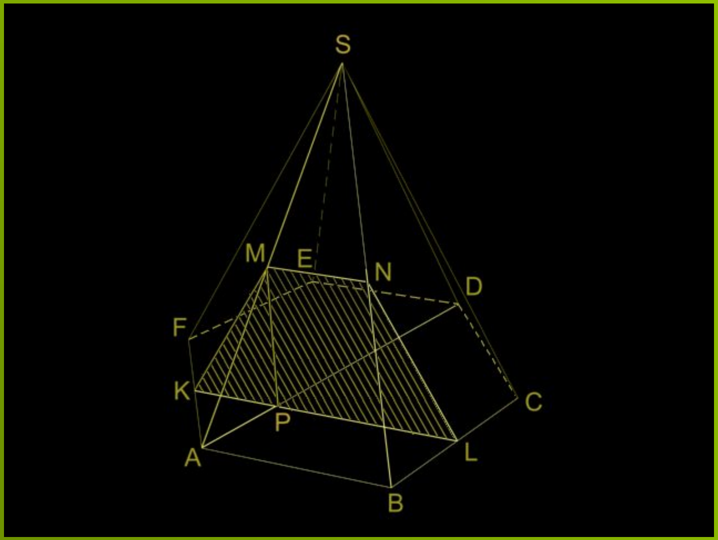


Решение:

Медиана боковой грани правильной пирамиды не перпендикулярна к плоскости основания, поэтому условия задачи определяют единственную секущую плоскость.

Если в условии задачи речь идет о перпендикулярности плоскости β к плоскости α,нужно постараться из удобной для нас точки плоскости β провести перпендикуляр к плоскости α В данном случае удобнее всего из конца K медианы AK боковой грани ASB опустить перпендикуляр на плоскость основания. Поскольку точка K лежит в плоскости DSB, перпендикулярной к плоскости основания, основание P этого перпендикуляра будет лежать на прямой BD пересечения перпендикулярных плоскостей DSB и ABC. Остается в плоскости основания пирамиды провести прямую AP и найти точку M ее пересечения прямой BC. В полученном треугольнике AKM построенный отрезок KP является высотой. Таким образом, в этом случае в ходе построения не только выяснена форма, но и построена высота треугольника AKM, необходимая для определения его площади.

6. Плоскость проходит через данную точку, перпендикулярна к данной плоскости и параллельна данной прямой.



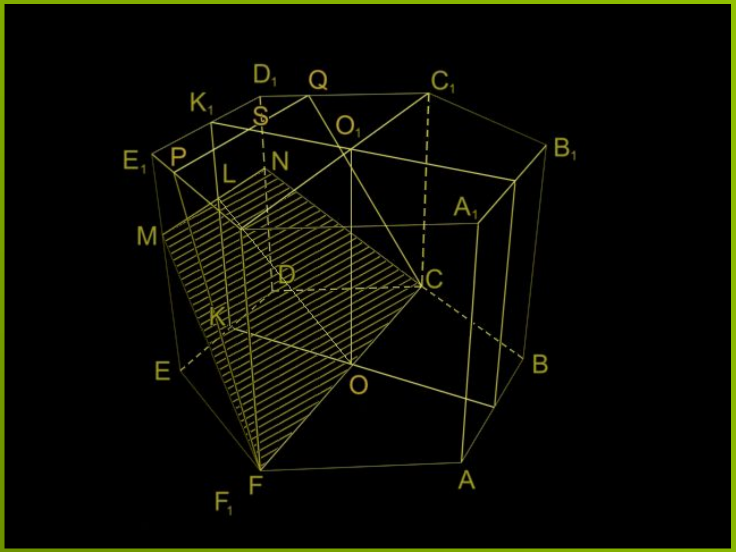
Дано:

Построить сечение правильной шестиугольной пирамиды плоскостью, проходящей через середину бокового ребра параллельно стороне основания и перпендикулярно к плоскости основания пирамиды.

Решение:

Пусть секущая плоскость проходит через середину M бокового ребра SA данной пирамиды SABCDEF параллельно стороне основания AB. Как и в предыдущей задаче, прежде всего опустим из точки M перпендикуляр MP на плоскость Основания пирамиды. Основание P этого перпендикуляра окажется на OA. Затем через точку P (середину OA) проведем KL║AB. Точки K и L – середины сторон AF и BC основания пирамиды. Через M проводим MN║AB (это следует из условия параллельности секущей плоскости прямой AB). В сечении получена равнобедренная трапеция KMNL, отрезок MP – ее высота.

7. Плоскость проходит через данную прямую под данным углом к данной плоскости.

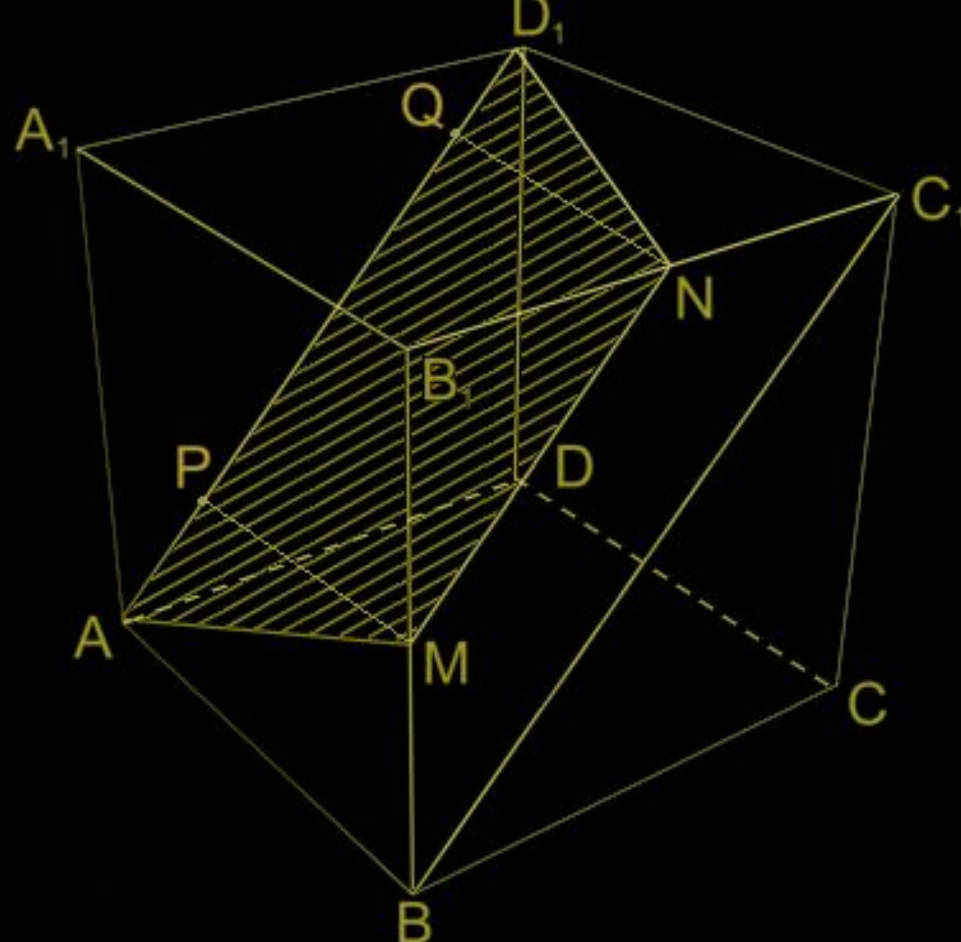


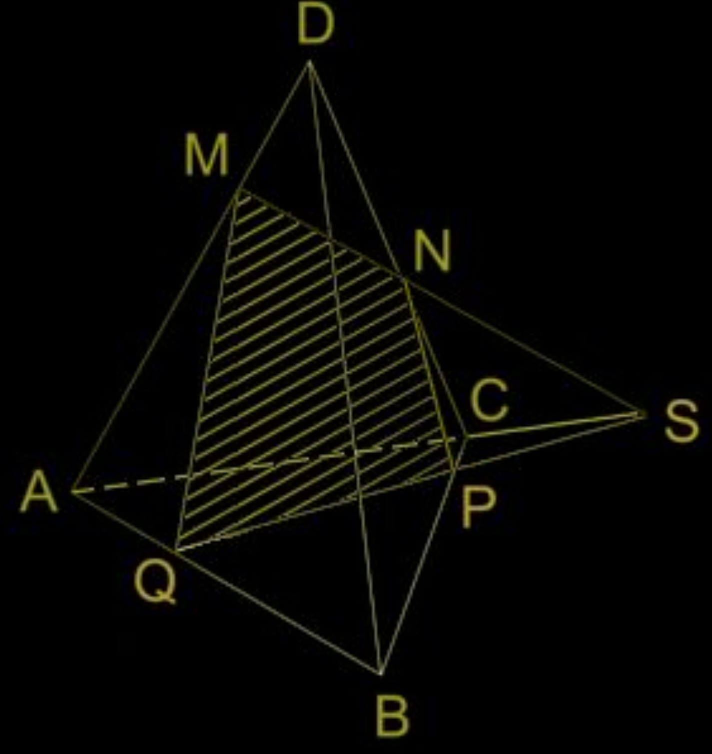
Дано:

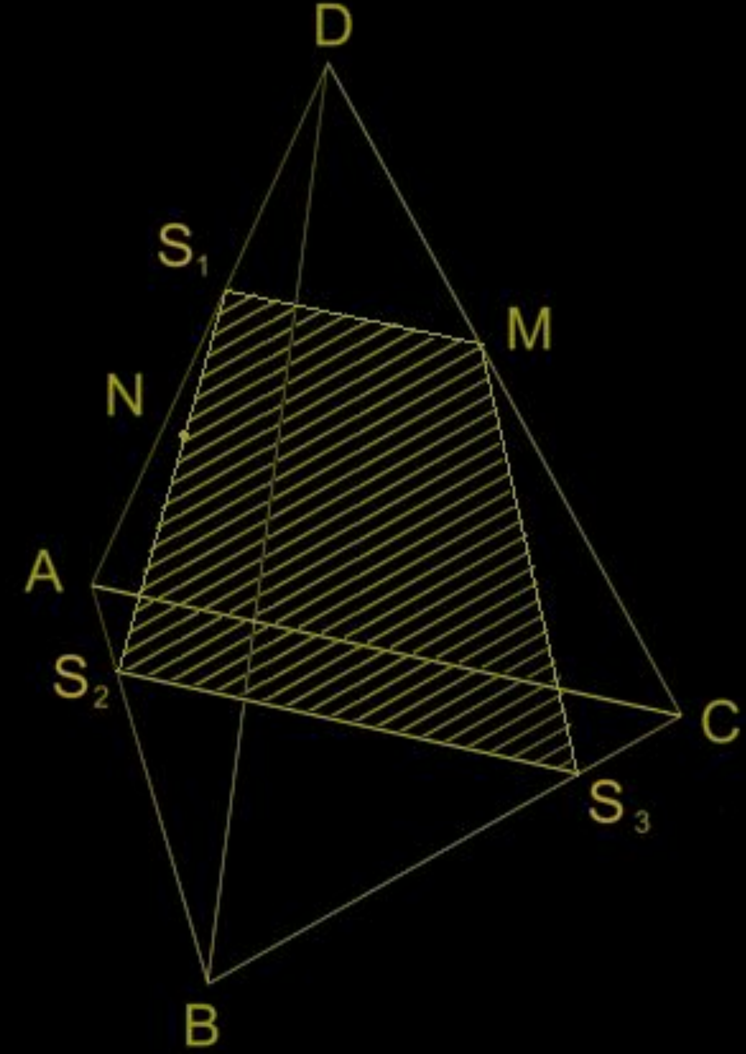
Построить сечение правильной шестиугольной призмы плоскостью, проходящей через большую диагональ основания под углом α к плоскости основания.

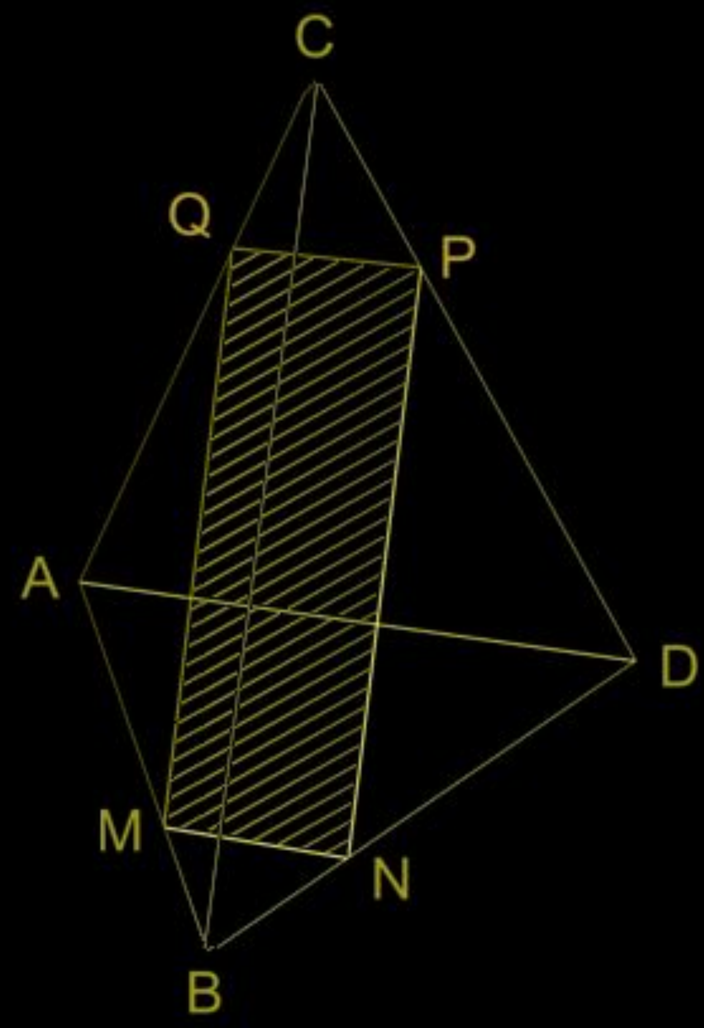
Решение:

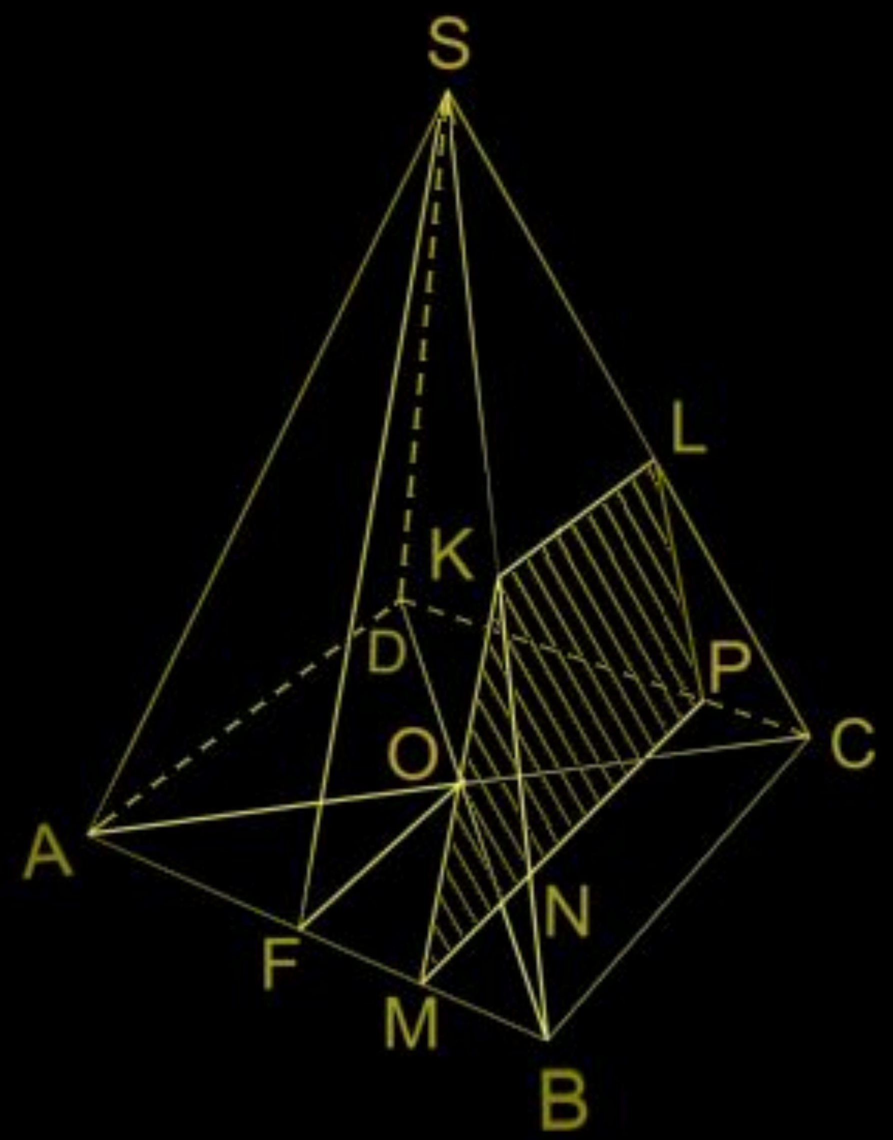
Решение таких задач начинаем с построения двугранного угла. Это облегчает дальнейшие построения и установление формы сечения.
Пусть в данной правильной шестиугольной призме O – центр, FC – большая диагональ основания. Проводим OKDE (K– середина DE), $KK_1 \parallel DD_1$. Плоскость O_1OK перпендикулярна к плоскости снования призмы и к диагонали FC основания (так как FCOK и $FCOO_1$). Остается в это плоскости провести луч OL под данным углом к OK, чтобы получить линейный угол LOK двугранного угла между секущей плоскостью и плоскостью основания призмы.
Точка L принадлежит секущей плоскости и плоскости грани DD_1E_1E. Эти плоскости пересекаются по прямой MN, проходящей через L параллельно прямой DE. Трапеция CNMF – искомое сечение. Из хода построения следует, что эта трапеция – равнобокая, отрезок LO служит ее высотой.

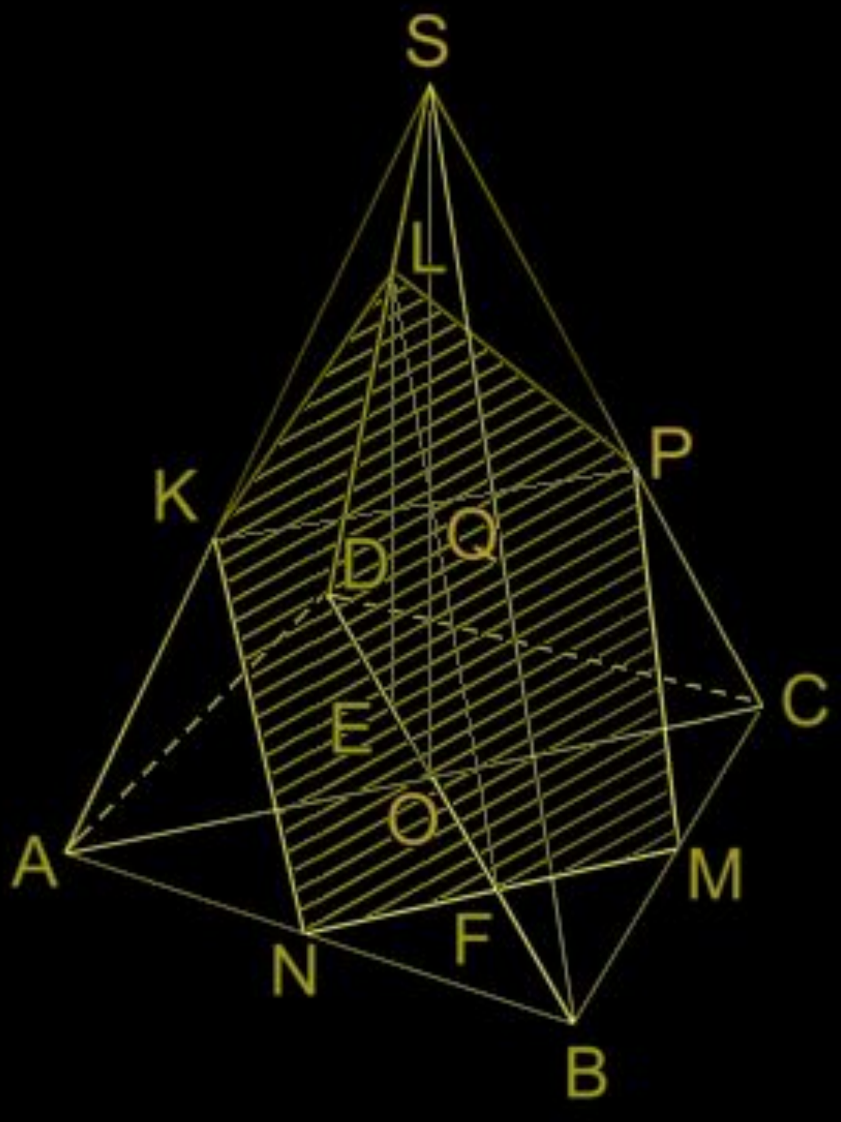

D1
Q
A1
C1
N
B1
P
D
A
M
C
B

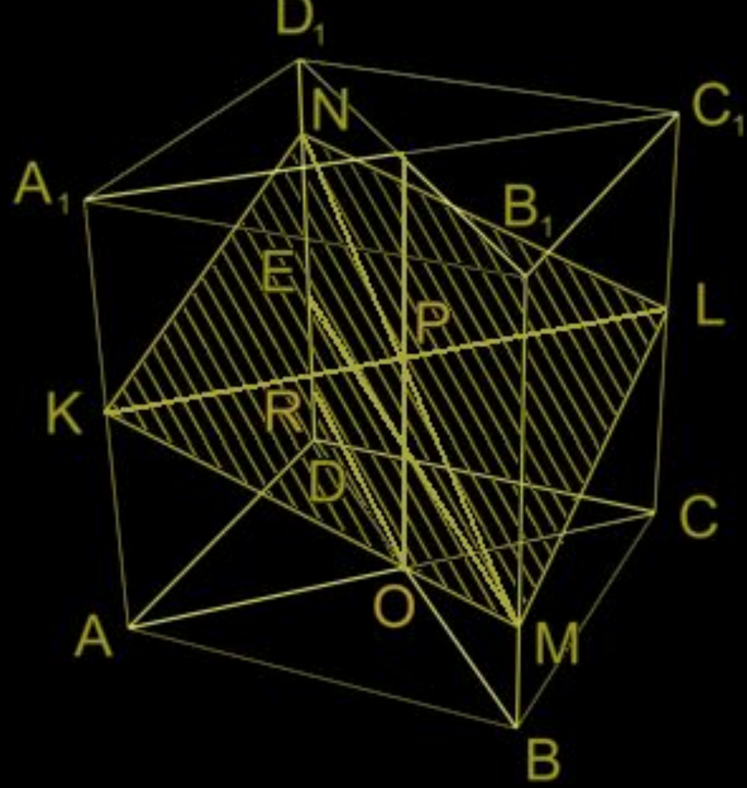

D
M
N
C
S
A
P
Q
B

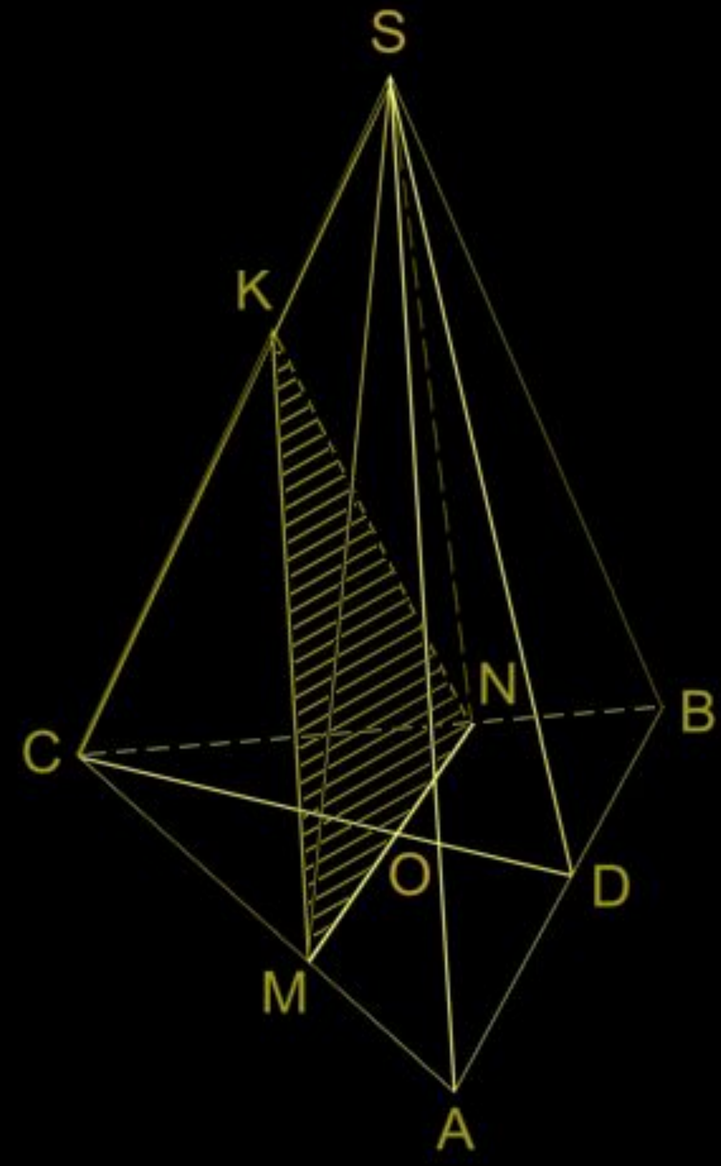

D
S1
M
N
A
S2
C
S3
B

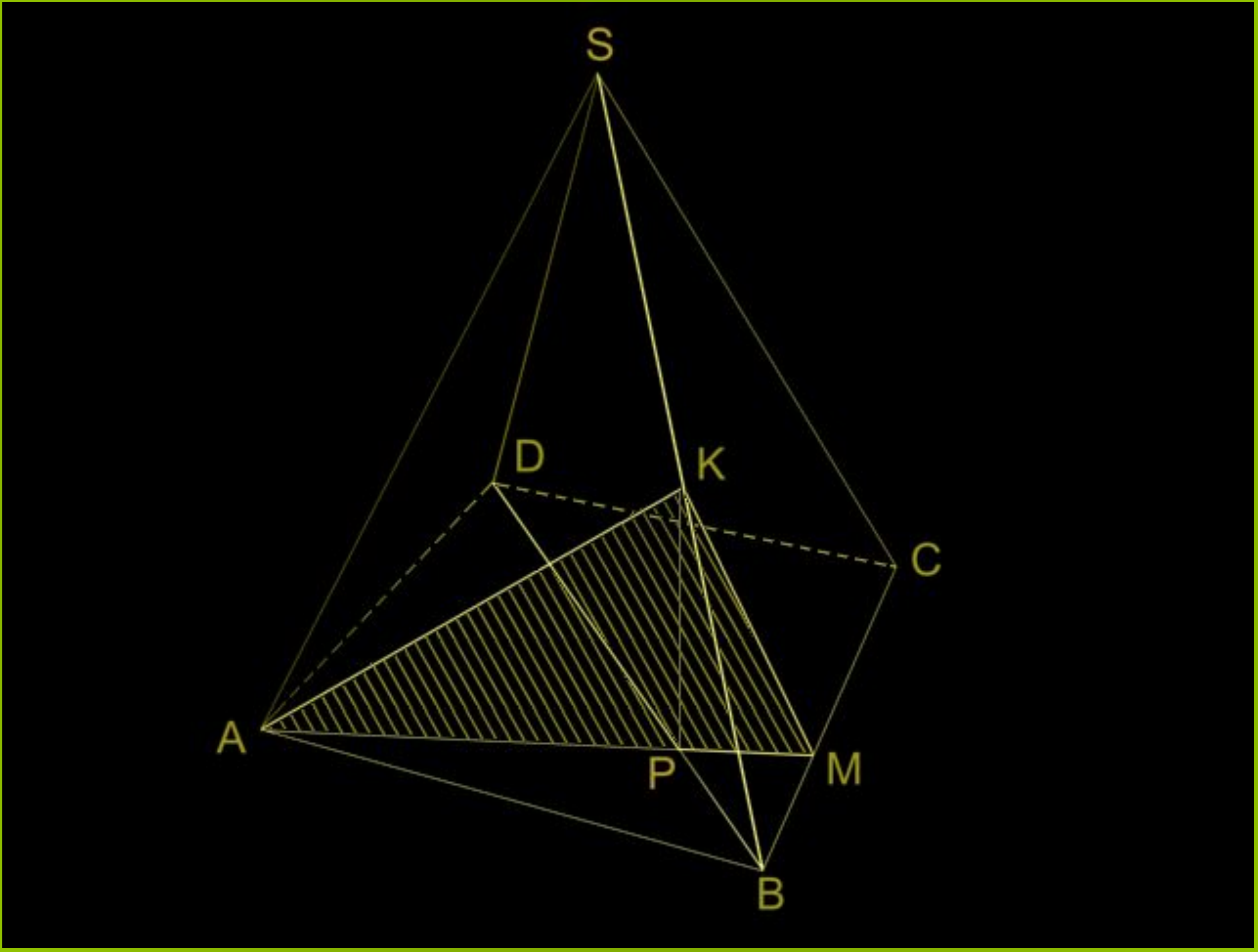

C
Q
P
A
D
M
N
B

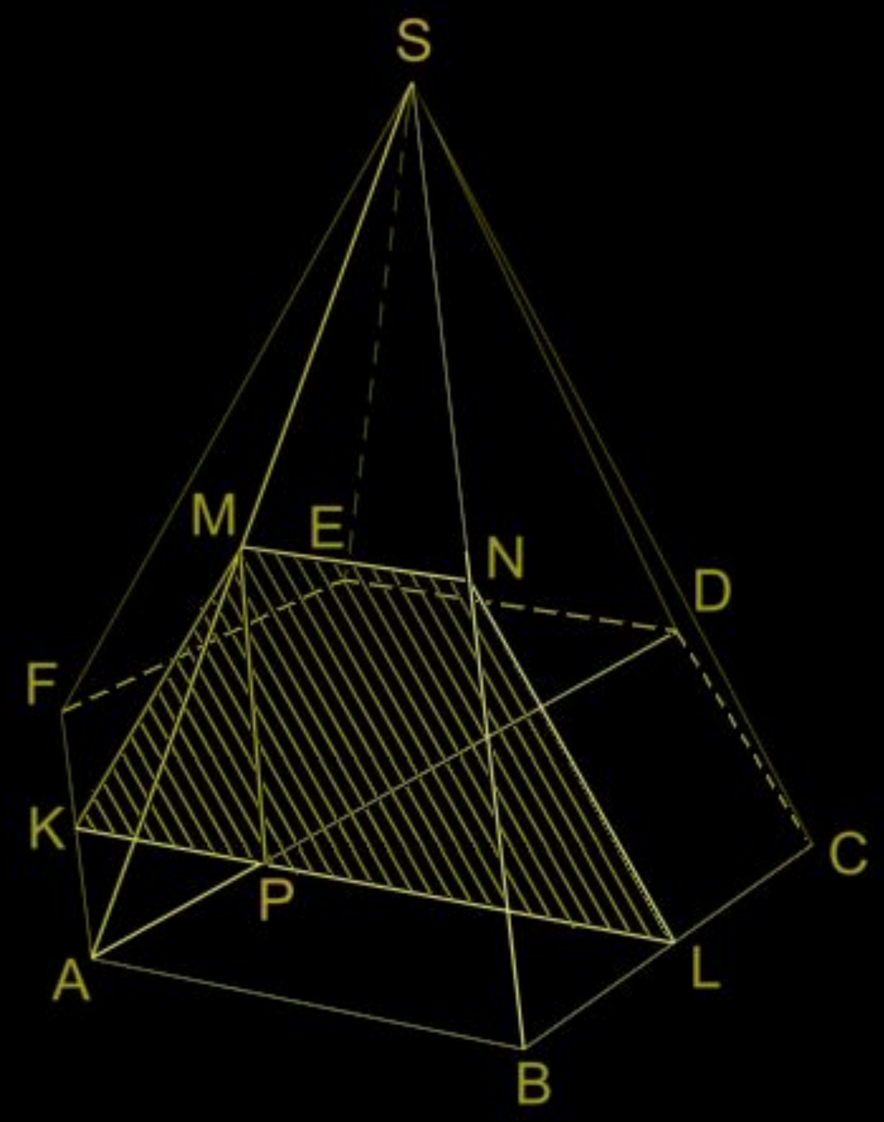

S
L
K
D
P
O
C
A
N
F
M
B

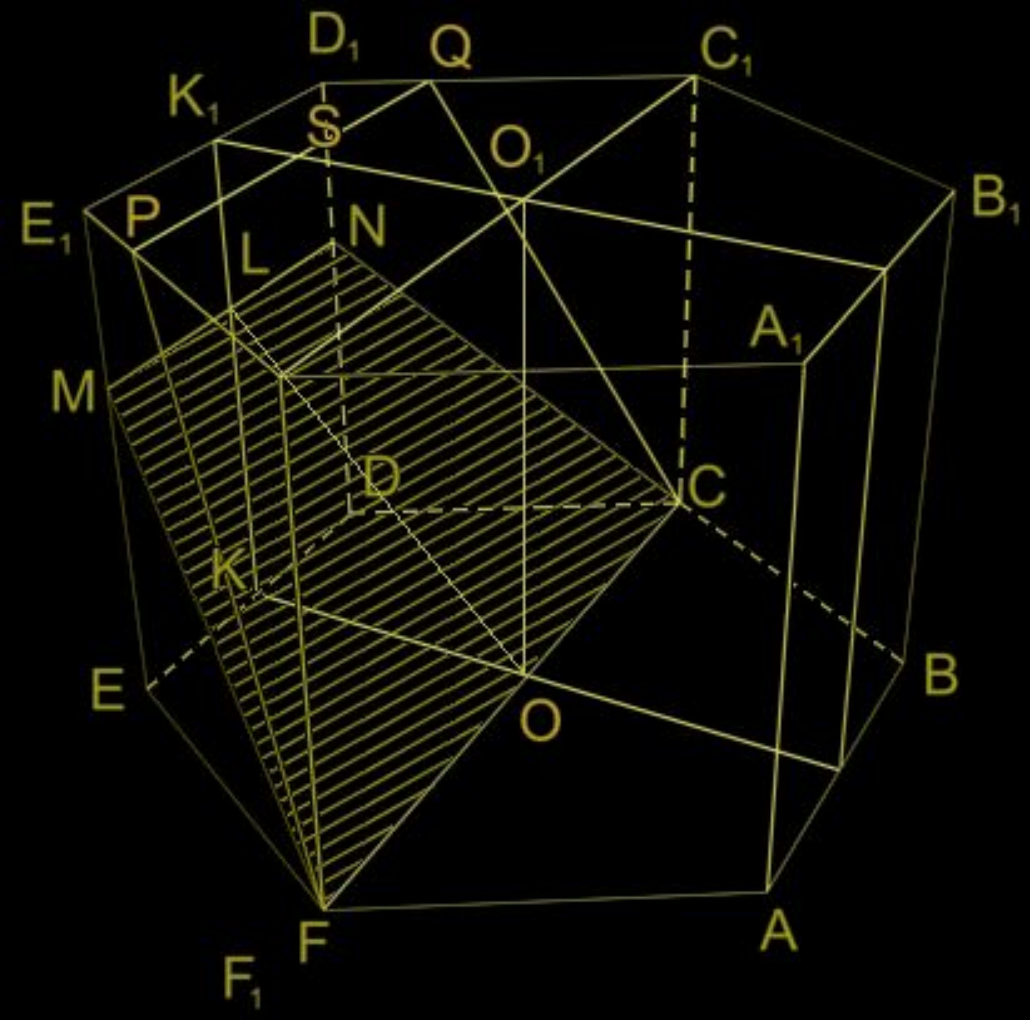

S
L
K
P
Q
D
E
C
O
A
M
F
N
B


D1
N
C1
A1
B1
E
L
P
K
R
D
C
O
A
M
B


S
K
N
B
C
O
D
M
A


S
D
K
C
A
P
M
B


S
M
E
N
D
F
K
C
P
A
L
B



D1
Q
C1
K1
S
O1
B1
E1
P
N
L
A1
M
D
C
K
E
B
O
F
A
F1