Алгоритм приведения к каноническому виду уравнения с корнем

Примеры решения.

Задача 1.
Установите, какую линию определяет уравнение

$$y = 7 - \frac{3}{2}\sqrt{x^2 - 6x + 13}, y < 7, x \in R.$$

Нарисуйте ее график.

Из условия видим, что множество значений, которые может принимать y, удовлетворяет неравенству:

$y<7$.

Избавимся от иррациональности. Для этого перенесем свободный член в левую сторону уравнения

$$y-7=-\frac{3}{2}\sqrt{x^2-6x+13}$$

и возведем обе части равенства в квадрат:

$$(y-7)^2=\frac{9}{4}\left(x^2-6x+13\right). \qquad (1)$$

Для дальнейшего приведения к каноническому виду выделим в правой части полный квадрат:

$$x^2-6x+13=x^2-2\cdot 3x+3^2-3^2+13=\left(x^2-2\cdot 3x+3^2\right)-3^2+13=(x-3)^2+4$$

Подставим преобразованное выражение в равенство (1) $(y-7)^2=\frac{9}{4}\left((x-3)^2+4\right)$, раскроем большие скобки в правой части $(y-7)^2=\frac{9}{4}(x-3)^2+9$,

соберем все неизвестные слева

$$(y-7)^2-\frac{9}{4}(x-3)^2=9 \quad \Big|:9$$

$$\frac{(y-7)^2}{9}-\frac{(x-3)^2}{4}=1$$

- гипербола, O(3, 7), полуоси мнимая a = 2, действительная b =

Множество значений y: y<7.

$$y - 7 = -\frac{3}{2}\sqrt{x^2 - 6x + 13}$$

$$(y-7)^2 = \frac{9}{4}\left(x^2 - 6x + 13\right). \qquad (1)$$

$$x^2 - 6x + 13 = x^2 - 2\cdot 3x + 3^2 - 3^2 + 13 = \left(x^2 - 2\cdot 3x + 3^2\right) - 3^2 + 13 = (x-3)^2 + 4$$

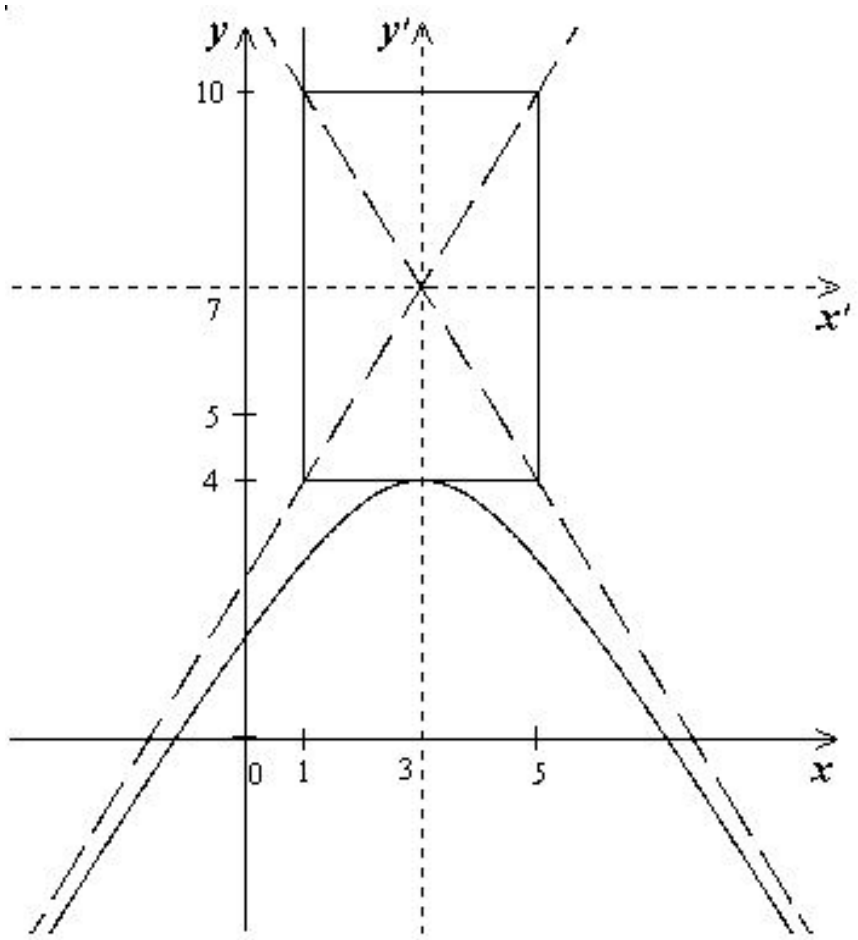
$$(y-7)^2 = \frac{9}{4}\left((x-3)^2 + 4\right), \qquad (y-7)^2 = \frac{9}{4}(x-3)^2 + 9,$$

$$(y-7)^2 - \frac{9}{4}(x-3)^2 = 9 \quad \Big|:9$$

$$\frac{(y-7)^2}{9} - \frac{(x-3)^2}{4} = 1$$ - гипербола, O(3, 7), полуоси: мнимая a = 2, действительная b = 3.

Исходное уравнение $\begin{cases} y = 7 - \dfrac{3}{2}\sqrt{x^2 - 6x + 13}, \\ y < 7 \end{cases}$

определяет **нижнюю ветвь гиперболы, расположенную под прямой y=7.**



Задача 2.

Установите, какую линию определяет уравнение $x = 1 - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{y+1}{2}}$.
Нарисуйте ее график.

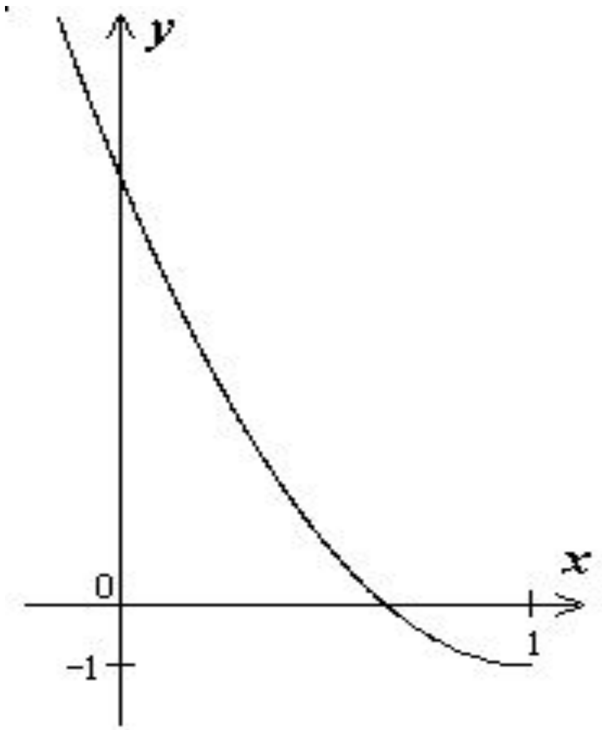
**Решени
е**.

$$x - 1 = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{y+1}{2}}, \qquad (x-1)^2 = \frac{1}{4}\left(\frac{y+1}{2}\right), \Big| \cdot 8$$

$$8(x-1)^2 = y+1 \quad \text{или} \quad y+1 = 8(x-1)^2$$

Учтем ОДЗ заданного уравнения:

$$\begin{cases} \frac{y+1}{2} \ge 0, \\ x - 1 \le 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y \ge -1, \\ x \le 1 \end{cases}$$



Вывод: исследуемое уравнение задает кривую 2-го порядка – **левая ветвь параболы с вершиной в точке** (1, -1).

Задача 3.

Установите, какую линию определяет уравнение $y = -2 - \sqrt{9 - x^2 + 8x}$.

Нарисуйте ее график.

Решение. $y + 2 = -\sqrt{9 - x^2 + 8x}$, $\quad (y+2)^2 = \left(-\sqrt{9 - x^2 + 8x}\right)^2$, $\quad (y+2)^2 = 9 - x^2 + 8x$

Выделим полный квадрат: $\quad x^2 - 8x = x^2 - 2\cdot 4x + 4^2 - 4^2 = \left(x^2 - 2\cdot 4x + 4^2\right) - 4^2 = (x-4)^2 - 4^2.$

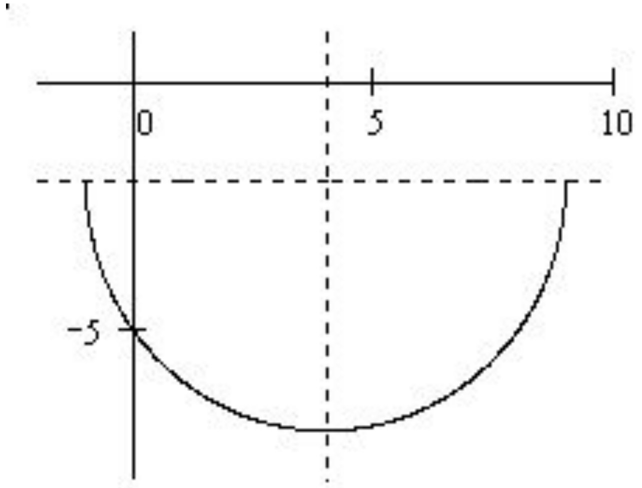
Тогда $(y+2)^2 = 9 - \left((x-4)^2 - 16\right)$ или $(y+2)^2 + (x-4)^2 = 9 + 16$

Искомая линия –

нижняя часть окружности:

$(y + 2)^2 + (x - 4)^2 = 5^2,$

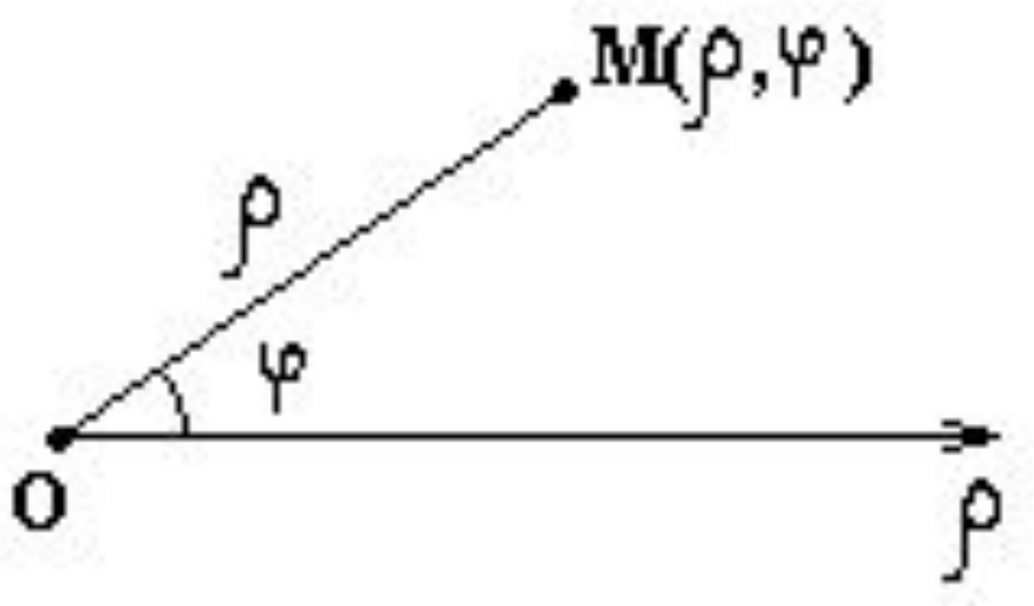
$y \le -2,\ x \in [-1, 9].$



КРИВЫЕ В ПОЛЯРНОЙ СИСТЕМЕ КООРДИНАТ

РЕШЕНИЕ задач на построение

- **Полярные координаты на плоскости**

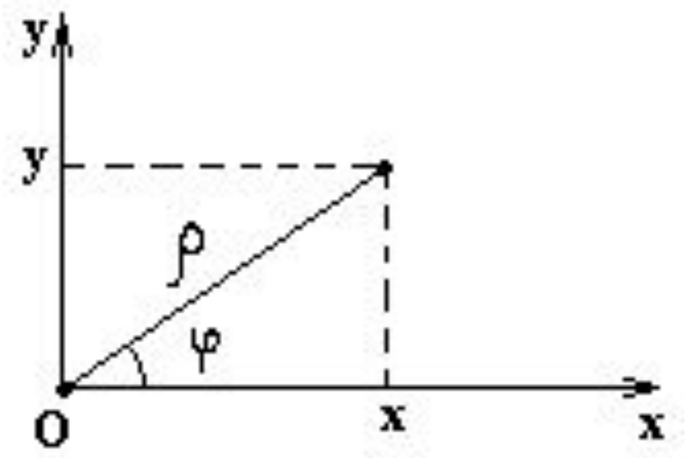


$$\left|\overrightarrow{OM}\right| = \rho$$

$$0 \le \rho \le \infty,$$

$$0 \le \varphi \le \infty$$

Связь полярных координат с декартовыми



$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi, \\ y = \rho\sin\varphi, \end{cases} \qquad \rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad tg\varphi = \frac{y}{x}.$$

- **как построить линию в полярной системе координат?**

- – Сначала необходимо отметить полюс, изобразить полярную ось и указать масштаб. Кроме того, на первоначальном этапе желательно найти область определения функции, чтобы сразу же исключить из рассмотрения лишние угловые значения.
- – В большинстве случаев потребуется найти несколько точек, принадлежащих линии. Но иногда можно обойтись только схематическим чертежом.
- – На следующем шаге следует прочертить угловые направления и отметить найденные значения точек.
- – Отложенные точки соединить плавной линией.
- Рассмотрим несколько типовых задачах:

Задача 1.

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi, \\ y = \rho\sin\varphi, \end{cases} \qquad \rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \qquad tg\varphi = \frac{y}{x}.$$

Постройте в полярной системе координат линию $\rho = 2a\cdot\sin\varphi$, $a > 0$.

Решение. Найдем уравнение данной линии в прямоугольной системе координат. Воспользуемся уравнениями перехода из полярной системы координат в декартову прямоугольную (формулы расположены в правом верхнем углу слайда). Подставим их в исходное уравнение:

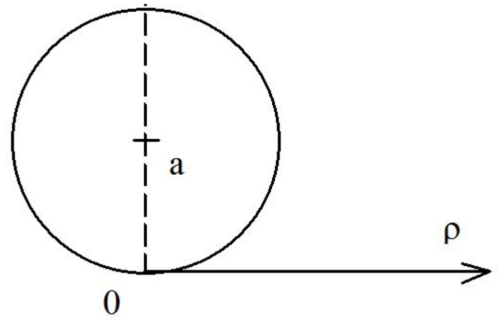
$$\sqrt{x^2 + y^2} = 2a\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad \Big|\cdot\sqrt{x^2 + y^2} \qquad \Rightarrow \; x^2 + y^2 - 2ay = 0,$$

Выделим полный квадрат для слагаемых с переменной y:

$$x^2 + (y - a)^2 = a^2.$$

- окружность со смещенным центром.

Рисунок – в правом нижнем углу.



Задача 2.

- Постройте в полярной системе координат линию $\rho = 2 + \cos\phi$.

Решение. 1) Найдём область определения. Поскольку полярный радиус неотрицателен, то и правая часть уравнения линии должна подчиняться неравенству:

$2 + \cos\phi \geq 0$ или $\cos\phi \geq -2$, откуда ϕ - любое действительное число.

2) Найдем координаты нескольких точек и занесем их в таблицу. Например,

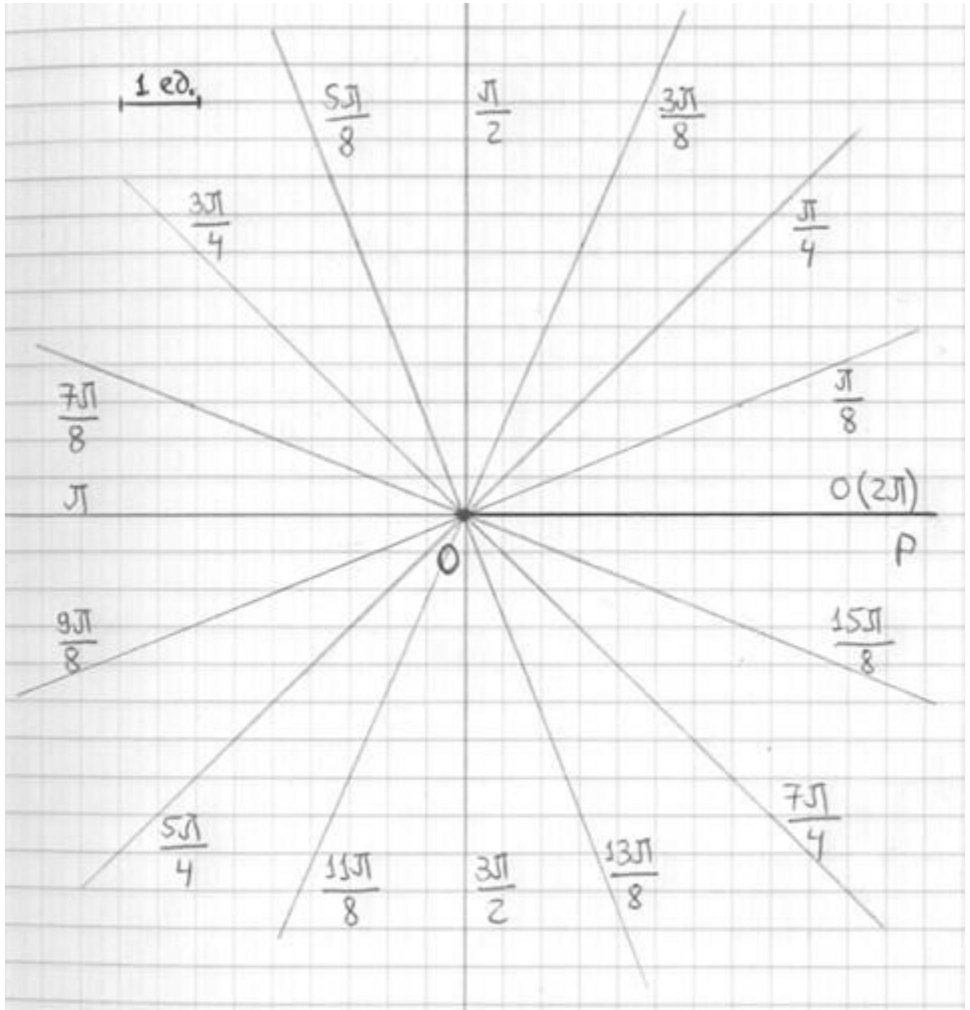
при $\phi = 0$, $\rho = 2 + \cos 0 = 2 + 1 = 3$.

Желательно составить таблицу точек с шагом для угла в $\pi/8$ радиан.

ϕ	ρ
0	3
$\pi/2$	2
π	1

3) Начертить «заготовку», на которой изображены радиусы при разных значениях угла (рисунок на следующем слайде).

4) Отметить на «заготовке» найденные точки и аккуратно соединить их линией.



«заготовка» для построения линий в полярной системе координат.

Замечание: данная линия $\rho = 2 + \cos\phi$ - улитка Паскаля может быть получена так: **каждый радиус-вектор окружности $\rho = \cos\phi$ увеличить на два**.

ϕ	ρ
0	3
$\pi/2$	2
π	1

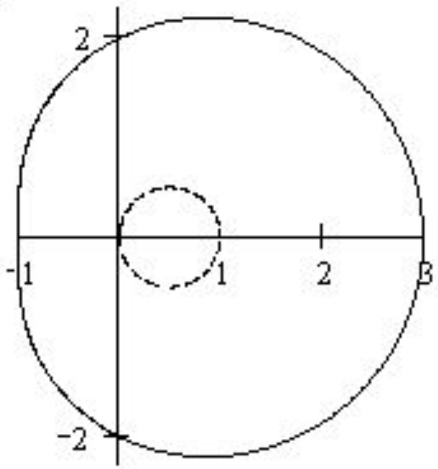


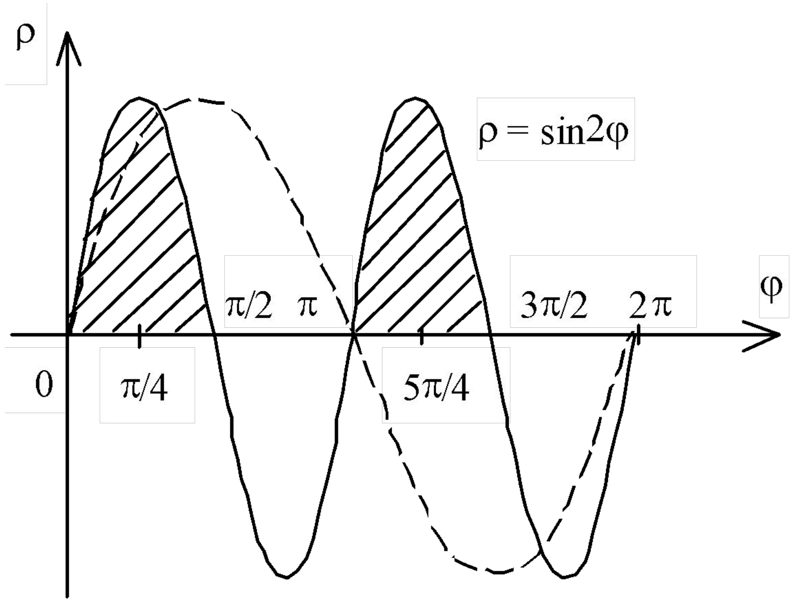
Рис. Улитка Паскаля.

задача 3.

- Постройте в полярной системе координат линию
- $\rho = a\sin 2\varphi,\ a>0;\ 0 \le \varphi \le 2\pi,\ 0 \le \rho \le a$
- .
- **Решение**. 1) составим таблицу пар точек, принадлежащих данной линии.

ϕ	0	10	20	30	40	45	50	60	70	80	90
ρ	0	0,3	0,6	0,86	0,99	1	0,99	0,86	0,6	0,3	0

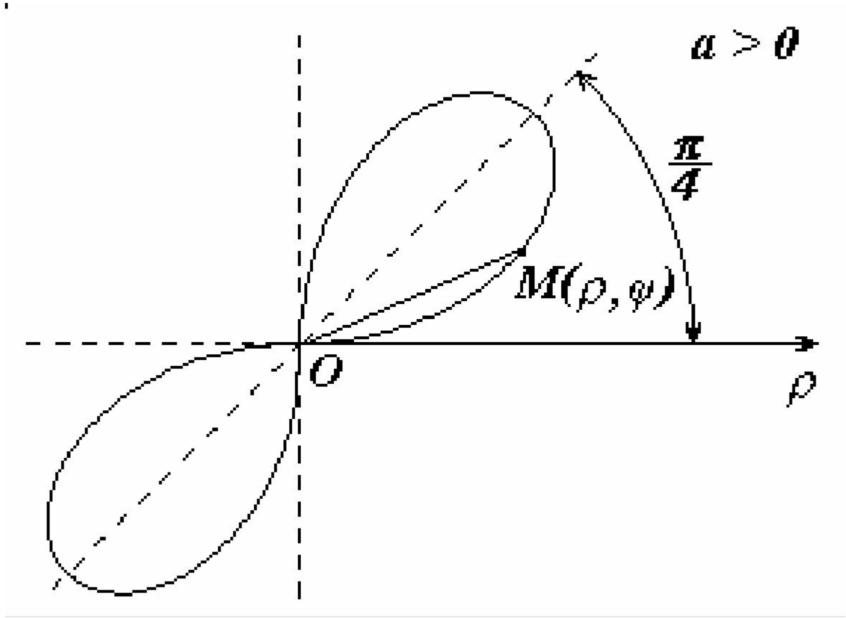
- 2) Для нахождения вида кривой обратимся к графику функции для $\phi \in [0; 2\pi)$



Функция $\rho = a\sin 2\phi$ при $a>0$ принимает:

- допустимые, неотрицательные значения $\rho \geq 0$ при $\phi \in [0, \pi/2] \cup [\pi, 3\pi/2]$;
- принимает максимальные, равные a, значения при $\phi = \pi/4$ и $\phi = 5\pi/4$;
- интервалами возрастания функции являются значения $\phi \in [0, \pi/4) \cup [\pi, 5\pi/4)$;
- убывания – $\phi \in [\pi/4, \pi/2] \cup [5\pi/4, 3\pi/2]$;

В результате график функции принимает вид двухлепестковой розы:



Задача 4.

- Постройте в полярной системе координат линию

$$\rho = \frac{9}{4 - 5\cos\varphi}$$

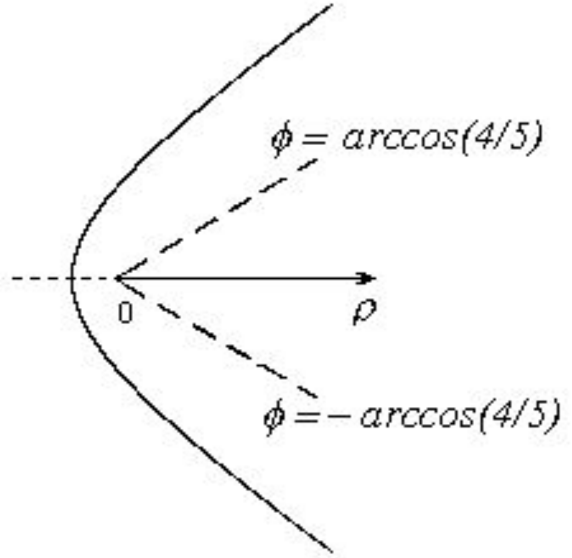
Решение:
Исходя из области определения переменной ρ, найдем пределы изменения аргумента ϕ.
Очевидно, что знаменатель дроби должен быть строго положительным:
$4 - 5 \cdot \cos\phi > 0$, или $\cos\phi < 4/5$, откуда $\phi \in (\arccos(4/5),\ 2\pi - \arccos(4/5))$.
По условию $\rho \cdot (4 - 5 \cdot \cos\phi) = 9$. Воспользуемся формулами, связывающими полярные и прямоугольные координаты.

$$\sqrt{x^2+y^2}\left(4-5\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)=9,$$

$$4\sqrt{x^2+y^2}=5x+9, \qquad 16\left(x^2+y^2\right)=\left(5x+9\right)^2,$$

$16x^2 + 16y^2 = 25x^2 + 90x + 81,$
$9x^2 + 90x – 16y^2 +81 = 0,$
$9(x + 5)^2 – 16y^2 = 144 \;\rightarrow$

$$\frac{(x+5)^2}{4^2}-\frac{y^2}{3^2}=1$$ – правая ветвь гиперболы при указанных ϕ.



(Кривую можно было построить по точкам,
например, при $\phi = \pi$: $\rho = 9/1$ и так далее)

Задача 5.

- Постройте в полярной системе координат линию $\rho^2 \cdot \sin 2\varphi = a^2$.

Решение: $\sin 2\varphi \geq 0, \quad \varphi \in [0, \pi/2] \cup [\pi, 3\pi/2].$

$$\rho = \frac{|a|}{\sqrt{\sin 2\varphi}}.$$

Перейдем к декартовым координатам, учтем, что $\sin 2\varphi = 2\cos\varphi \cdot \sin\varphi \cdot \dfrac{\rho^2}{\rho^2} = \dfrac{2xy}{x^2 + y^2},$

Отсюда, кривая принимает вид гиперболы:
(рисунок справа)

$$y = \frac{\frac{a^2}{2}}{x}$$