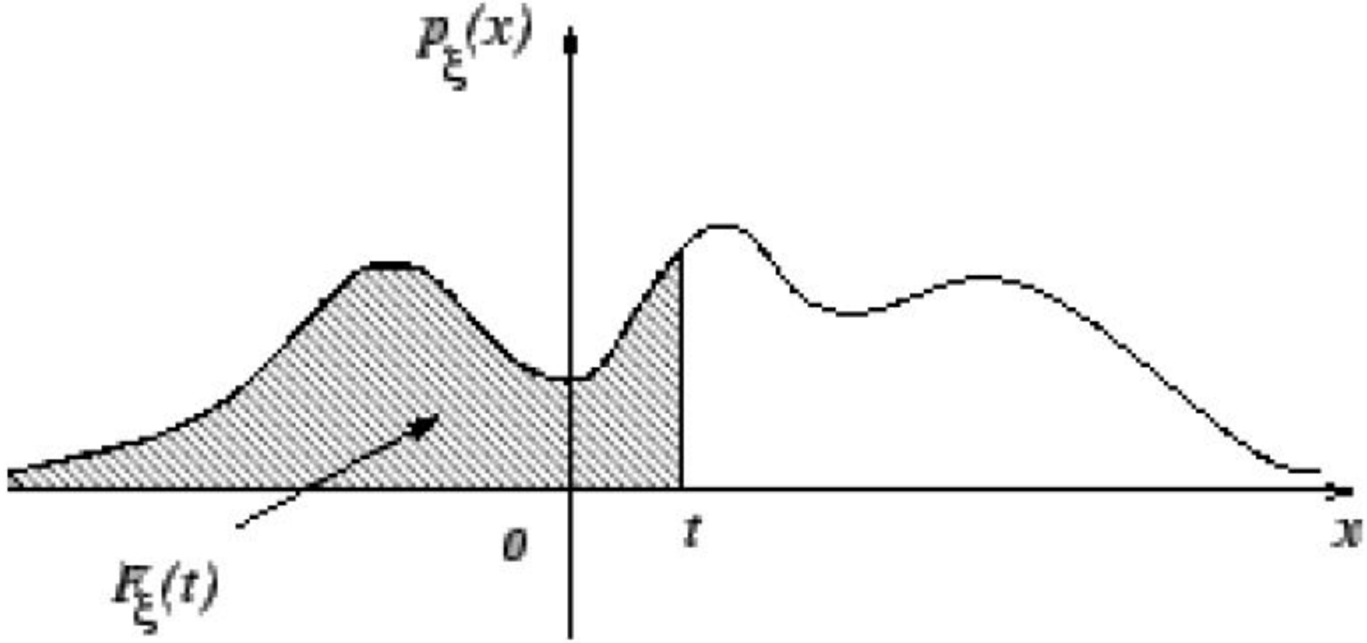
Распределения непрерывных случайных величин

- Случайную величину назовем непрерывной, если ее функция распределения не имеет скачков и разрывов.
- **Непрерывной называется случайная величина ξ,** *функцию распределения которой F(x) можно представить в виде:*

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} p(x)dx.$$

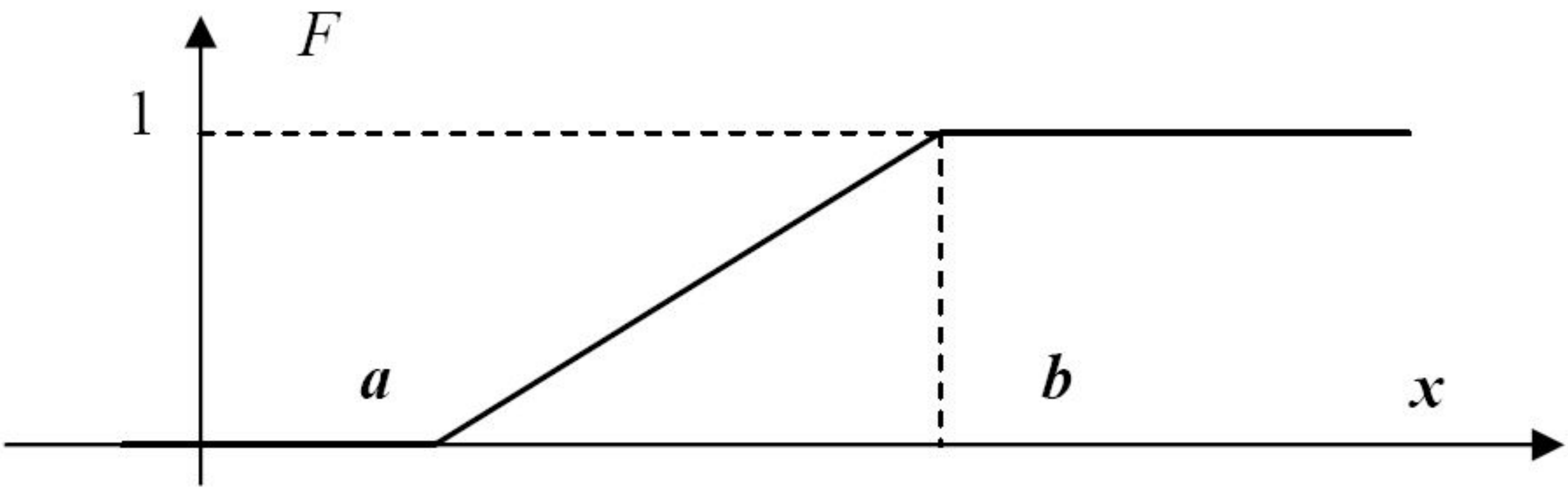
- *Функция p(x) называется* ***плотностью распределения*** *(вероятностей) случайной величины ξ*

Плотность распределения (вероятностей) случайной величины ξ



Равномерное распределение

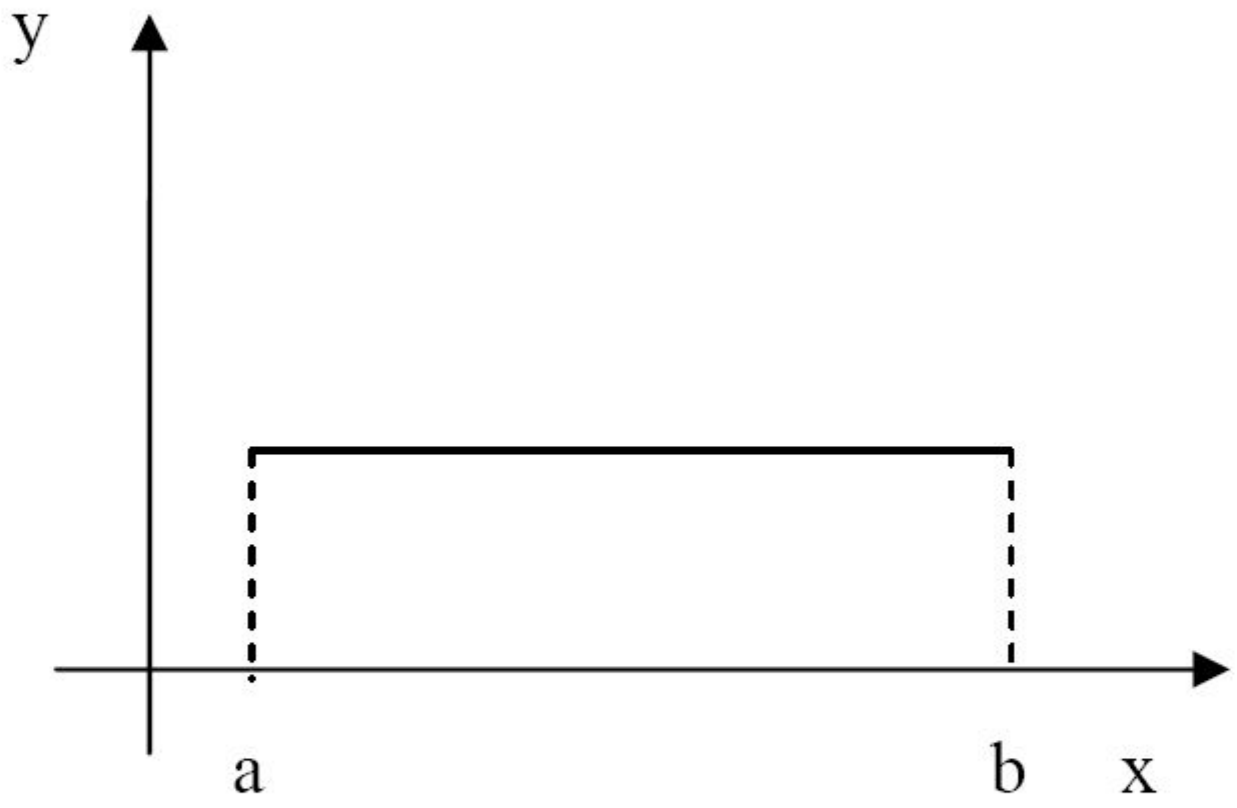
- Равномерно распределенная на отрезке [a,b] случайная величина имеет функцию распределения



Функция равномерного распределения имеет вид:

$$F(x) = \begin{cases} 0, \text{ если } x < a, \\ \dfrac{x - a}{b - a}, \text{ если } a \le x \le b, \\ 1, \text{ если } x > b. \end{cases}$$

Плотность равномерного распределения



$$p(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, \text{ если } \mathrm{a}\le \mathrm{x}\le \mathrm{b},\\ 0, \boldsymbol{\text{если } x<a \text{ или } x>b.}\end{cases}$$

Нормальное распределение

- Случайная величина распределена по нормальному или гауссову закону, если она имеет плотность распределения

$$\varphi_{m,\sigma}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(x-m)^2}{2\sigma^2}} \qquad (-\infty < \mathrm{m} < \infty, \sigma > 0).$$

- где **m – математическое ожидание** или среднее значение нормального закона;
- σ- среднее квадратичное отклонение


Плотность нормального
распределения
0,90
0,80
0,70
0,60
0,50
0,40
0,30
0,20
0,10
0,00
σ = 0,5
σ = 1
0
1
2
3
4
5


Функция нормального
распределения
1,200
1,000
0,800
0,600
0,400
0,200
0,000
0
1
2
3
4
5

- Параметр **m определяет положение центра нормальной плот**ности, а σ – разброс относительно центра.
- Если m=0, σ = 1, то такой нормальный закон называется *стандартным* и его функция распределения обозначается через Φ(x).

Генеральная совокупность (популяция) W

- – *полный набор* объектов w, с которыми связана данная проблема. С каждым объектом связана величина (или величины), называемая исследуемым признаком (xi).

- ***Различные значения признака,*** *наблюдающиеся у членов ге*неральной совокупности (или выборки), называются вариантами, а числа, показывающие сколько раз встречается каждый вариант – их частотами.

Пример 1.

- При регистрации размеров продаваемой магазином женской верхней одежды были получены данные о 100 покупках

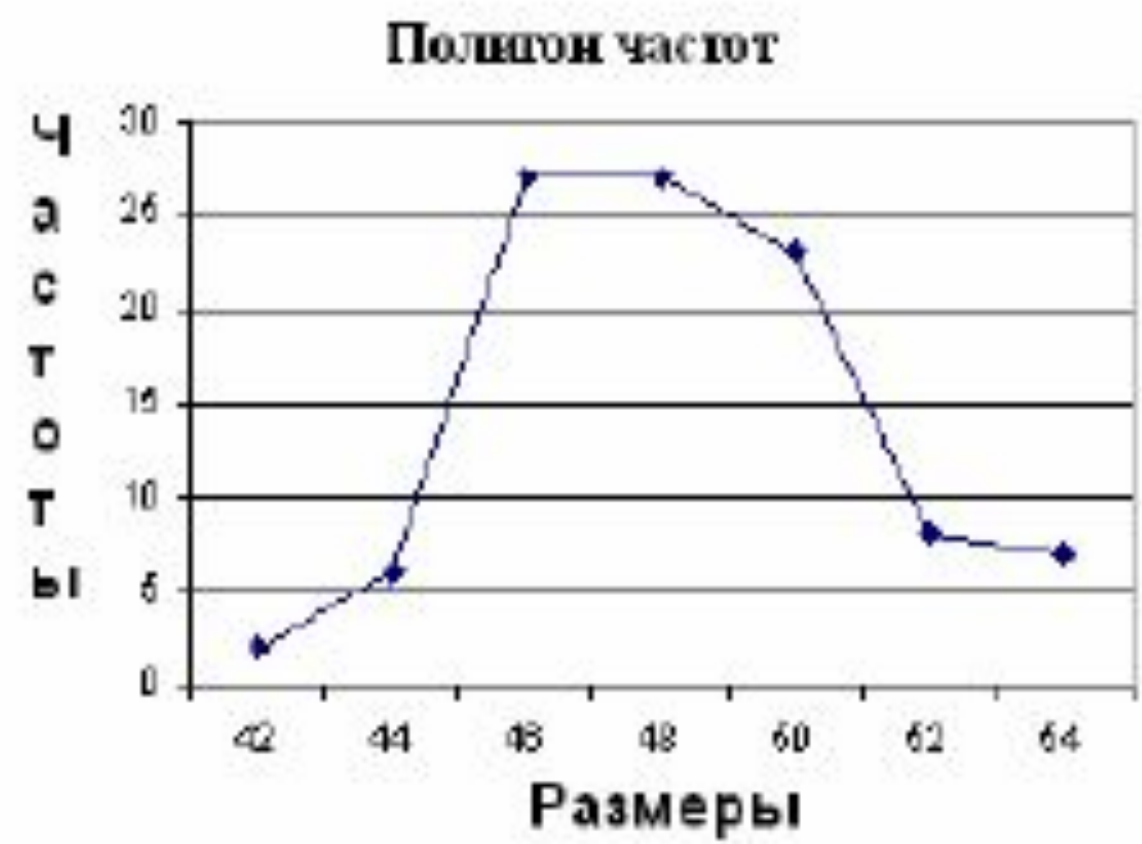
Размеры одежды, купленной в магазине

42	48	50	46	50	48	48	46	50	50
50	50	48	48	44	48	50	46	50	52
46	50	46	46	50	50	42	48	48	46
52	48	54	48	46	50	48	54	46	50
50	50	50	44	50	48	46	48	46	52
54	50	46	48	52	48	46	46	46	44
48	46	54	48	46	50	44	48	52	50
46	46	48	46	50	48	50	48	54	46
48	48	46	46	46	52	54	46	46	46
48	44	44	48	52	54	48	48	52	50

Построение признаков и частот по выборке

Признаки	Частоты
42	2
44	6
46	27
48	27
50	23
52	8
54	7


Гистограмма частот
30
25
20
15
10
5
0
42
44
46
48
50
52
54


Полигон частот
Частоты
30
25
20
15
10
5
0
42
44
46
48
50
52
54
Размеры

Формы распределения

- Симметричные
- Несимметричные
  - Умеренно ассиметричные
  - Крайне ассиметричные
  - U-образные

ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Математическое ожидание и его свойства

- Математическим ожиданием (или средним значением) ***дискретной*** случайной величины *называется* сумма произведений всех её возможных значение на соответствующие им вероятности.

$$M(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i P_i$$

- Для ***непрерывной*** сл. величины, заданной функцией плотности вероятности f(x), математическое ожидание определяется в виде интеграла

$$M(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$$

Свойства мат.ожидания

1. Если случайная величина ξ принимает всего одно значение *С с вероятностью единица. Математическое ожидание по*стоянной величины равно этой постоянной:

$$MC = C * 1 = C$$

Свойства мат.ожидания

2. Пусть $\eta = a\xi + b$ – случайная величина, выраженная линейной функцией, тогда математическое ожидание этой случайной величины равно:

$$M(a\xi + b) = aM\xi + b$$

Свойства мат.ожидания

3. Пусть η – случайная величина, которая является суммой двух других величин:

$\eta = \xi_1 + \xi_2$.

Тогда математическое ожидание суммы двух случайных величин равно сумме математических ожиданий каждой из этих величин:

$$\mathbf{M(\xi_1 + \xi_2) = M\xi_1 + M\xi_2}$$

Свойства мат.ожидания

4. Если ξ_1 и ξ_2 *независимы, то математическое ожидание* их произведений $\eta = \xi_1 \xi_2$ равно произведению их математических ожиданий

$$M(\xi_1 \xi_2) = M\xi_1 * M\xi_2$$

Средние величины

- ***Среднее арифметичес*** $\overline{X}$ ***е определяется по формуле***

$$\overline{x} = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \ldots + x_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \ ,$$

где x_i – значения вариант.

- ***Мода –*** (наиболее вероятное значение) является наиболее часто встречающейся в выборке величиной.
- ***Медиана –*** *срединное значение для ряда измерений n. Для* ее вычисления необходимо все наблюдения расположить в порядке возрастания или убывания результатов. Если n – *не*четное число, то медиана просто является числом, находящимся в середине упорядоченной последовательности. При четном *равна среднему арифметическому двух располо*женных в середине значений

Дисперсия и среднее квадратическое отклонение

- дают представление о разбросе случайных величин относительно их среднего значения
- ***Дисперсией*** (рассеянием) случайной величины называется математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от ее математического ожидания

- ***Дисперсия Dξ*** *дискретной случайной величины ξ определяется формулой*

$$D\xi = \sum_{i=1}^{n} (x_i - M(\xi))^2 \cdot p_i = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \cdot p_i - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot p_i \right)^2.$$

- *Дисперсией непрерывной случайной величины называют ма*тематическое ожидание квадрата ее отклонения*. Если возмож*ные значения X принадлежат отрезку [a,b], то

$$D\xi = \int_{-\infty}^{\infty} (x - M\xi)^2 p(x)dx.$$

$$D(x) = M(X - M(x))^2$$

$$D(x) = M(x^2) - [M(x)]^2 .$$

Свойства дисперсии

1. Если случайная величина ξ с вероятностью 1 принимает одно и тоже постоянное значение С, то из свойства 1 математического ожидания ($MC = C \cdot 1 = C$) получаем

$$\boxed{D\xi = M(\xi - c)^2 = (c - c)^2 \cdot 1 = 0}$$

2. Постоянный множитель можно выносить за знак дисперсии, возведя его в квадрат:

$$\boxed{D(a\xi) = a^2 D\xi.}$$

Свойства дисперсии

3. Дисперсия суммы случайной величины и постоянной равна:

$$\boxed{D(x+C)=Dx}$$

4. Дисперсия суммы двух независимых случайных величин ξ и η равна сумме дисперсий каждой из этих величин:

$$\boxed{D(\xi+\eta) = D\xi + D\eta.}$$